



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS DA  
COMPUTAÇÃO

JEFFERSON LOURENÇO GURGURI

ESTUDO POLIÉDRICO DE DECOMPOSIÇÃO EM ÁRVORE

FORTALEZA

2016

**JEFFERSON LOURENÇO GURGURI**

**ESTUDO POLIÉDRICO DE DECOMPOSIÇÃO EM ÁRVORE**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Computação.  
Área de concentração: Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Victor Almeida Campos.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

G987e Gurguri, Jefferson Lourenço  
Estudo poliédrico de decomposição em árvore / Jefferson Lourenço Gurguri. – 2015.  
66 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2015.  
Área de Concentração: Matemática Computacional.  
Orientação: Prof. Dr. Victor Almeida Campos.

1. Largura em árvore. 2. Formulação por ordem de eliminação. 3. Facetas e combinatória poliédrica. I. Título.

JEFFERSON LOURENÇO GURGURI

ESTUDO POLIÉDRICO DE DECOMPOSIÇÃO EM ÁRVORE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Computação.

Área de concentração: Matemática Computacional

Orientador: Prof. Dr. Victor Almeida Campos

Aprovada em: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Victor Almeida Campos  
(Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Ana Shirley F. da Silva  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Manoel Bezerra Campelo Neto  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Yuri Abitbol de Menezes Frota  
Universidade Federal Fluminense (UFF)

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me amparar em todos os momentos, dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me oferecer o suficiente em todas as minhas necessidades.

Ao meu orientador Victor Almeida Campos, por acreditar em mim, por estar disponível para ouvir meus questionamentos e me instruir com bons comentários e sugestões fundamentais para a pesquisa.

A todos professores do ParGO, pela docência exemplar, pelo incentivo, apoio e paciência, em especial aos professores Victor Campos, Ana Shirley e Manoel Campelo.

A minha família, que é a base da minha sustentação e que me acompanha com carinho e amor em toda minha formação pessoal e profissional.

A minha companheira, Ingrid, pela paciência, carinho e compreensão nos meus momentos de ausência, enquanto estava mergulhado na pesquisa.

Finalmente, a CAPES - Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior - pelo financiamento da bolsa de estudos para a realização da presente dissertação.

“Quantas noites cortei?  
É importante dizer  
Que é preciso amar, é preciso lutar  
E resistir até morrer.  
Quanta dor cabe num peito  
Ou numa vida só?  
É preciso não ter medo.  
É preciso ser maior.”  
(Leandro Roque de Oliveira)

## RESUMO

O conceito de largura em árvore (“treewidth”) foi introduzido por Robertson e Seymour. A largura em árvore de um grafo  $G$  é o mínimo  $k$  tal que  $G$  pode ser decomposto em uma Decomposição em Árvore (DEA) com cada subconjunto de vértice com no máximo  $k + 1$  vértices.

Resultados recentes demonstram que vários problemas NP-Completo podem ser resolvidos em tempo polinomial, ou ainda linear, quando restritos a grafos com largura em árvore pequena.

Em nossa pesquisa bibliográfica, focamos a atenção no cálculo de limites inferiores para a largura em árvore e descrevemos, em nossa dissertação, alguns dos resultados já disponíveis na literatura.

Nós percebemos que formulações lineares-inteiras para a determinação da largura em árvore são limitadas na literatura e não há estudos disponíveis sobre os poliedros associados a elas.

A Formulação por Ordem de Eliminação (EOF) foi proposta por Koster e Bodlaender. Ela é baseada na eliminação ordenada de vértices e na relação entre a largura em árvore de um grafo e suas cordalizações.

Como resultado de nosso estudo, apresentamos uma simplificação da formulação EOF, demonstramos que o poliedro associado a simplificação é afim-isomórfico ao da formulação EOF, verificamos a dimensão do poliedro associado à simplificação, apresentamos brevemente um rol de facetas muito simples desse poliedro e, em seguinte, introduzimos, analisamos e demonstramos ser faceta algumas desigualdades mais complexas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Largura em árvore. Formulação por Ordem de Eliminação. Facetas e Combinatória Poliédrica.

## ABSTRACT

The concept of treewidth was introduced by Robertson and Seymour. Treewidth may be defined as the size of the largest vertex set in a tree decomposition.

Recent results show that several NP-Complete problems can be solved in polynomial time, or linear, when restricted to graphs with small treewidth.

In our bibliographic research, we focus attention on the calculation of lower bounds for the treewidth and we described, in our dissertation, some of the main results already available in the literature.

We realized that linear-integer formulations for determining the treewidth are very limited in the literature and there are no studies available on the polyhedra associated with them. The Elimination Order Formulation (EOF) has been proposed by Koster and Bodlaender. It is based on orderly disposal of vertices and the relationship between the treewidth of a graph and its chordalizations.

As a result of our study, we present a simplification of EOF formulation, we show that the polyhedron associated with this simplification is affine isomorphic to the EOF formulation. We determine the dimension of the polyhedron associated with the simplification, we briefly present a set of very simple facets and we introduce, analyze and demonstrate be a facet, some more complex inequalities.

**KEYWORDS:** Treewidth. Elimination Order Formulation. Facets and Polyhedral Combinatorics.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de DEA . . . . .	13
Figura 2 – $H$ e $G_\rho$ . . . . .	23
Figura 3 – $\text{Cord}(s)$ . . . . .	24
Figura 4 – Restrição (3.13) . . . . .	25
Figura 5 – $\text{Cord}(s)$ . . . . .	29
Figura 6 – Observações sobre $v_1$ . . . . .	33
Figura 7 – $P_4$ . . . . .	36
Figura 8 – Casos 1, 2 e 3 . . . . .	37
Figura 9 – Cordalizações para buracos . . . . .	39
Figura 10 – $H[V(C)]$ . . . . .	39
Figura 11 – Caminhos entre $v_i, v_j$ e $v_k$ . . . . .	40
Figura 12 – Caminho de $u$ a $v$ . . . . .	42
Figura 13 – Representação das $s^1$ e $s^2$ . . . . .	45
Figura 14 – Casos . . . . .	45

## SUMÁRIO

	LISTA DE ILUSTRAÇÕES . . . . .	7
	SUMÁRIO . . . . .	8
1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
1.1	Largura em Árvore e organização do texto . . . . .	9
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	11
2.1	Conceitos em Teoria dos Grafos . . . . .	11
2.2	Conceitos em Combinatória Poliédrica . . . . .	14
3	LIMITES INFERIORES . . . . .	17
3.1	Baseados em graus . . . . .	17
3.2	Baseados na tomada de subgrafos e/ou menores . . . . .	18
3.3	Baseados em grafos melhorados . . . . .	19
3.4	Maximum Cardinality Search . . . . .	20
3.5	Baseados em Esquemas Perfeitos . . . . .	21
3.6	Formulação por Ordem de Eliminação . . . . .	24
4	ESTUDO POLIÉDRICO . . . . .	26
4.1	Uma simplificação para a formulação EOF . . . . .	26
4.2	Introdução ao estudo poliédrico . . . . .	28
4.3	Dimensão . . . . .	30
4.4	Facetas básicas . . . . .	31
4.5	Facetas geradas por Caminhos Induzidos . . . . .	32
4.6	Facetas geradas por Buracos . . . . .	38
5	CONCLUSÃO . . . . .	47
	REFERÊNCIAS . . . . .	48
	APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES DE FACETAS BÁSICAS	51

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Largura em Árvore e organização do texto

O conceito de Largura em Árvore (“*treewidth*”) foi introduzido por Robertson e Seymour [1,2] em sua série de artigos sobre menores de grafos.

A largura em árvore de um grafo  $G$  é o mínimo  $k$  tal que  $G$  pode ser decomposto em uma Decomposição Em Árvore (DEA) com cada subconjunto de vértices com no máximo  $k + 1$  vértices.

Para problemas computacionalmente complexos, e.g. problemas NP-Completo, é importante saber para quais instâncias estão disponíveis algoritmos eficientes. Vários problemas NP-Completo podem ser resolvidos em tempo polinomial, ou ainda linear, quando restritos a grafos com largura em árvore pequena, veja em [3,4]. De acordo com Bodlaender [5], grafos com largura em árvore limitada ocorrem com frequência em problemas práticos como: Sistemas especialistas, Resistência de redes elétricas, Processamento de linguagem natural, etc.

Determinar a largura em árvore de um grafo arbitrário é um problema NP-Difícil [4], assim o que podemos esperar é obter bons limites. Obter limites superiores é relativamente simples, por exemplo, escolhendo uma triangulação para  $G$  e avaliando o número-clique de  $G$  menos uma unidade ( $\omega(G) - 1$ ) [6]; entretanto, obter bons limites inferiores vem sendo uma tarefa mais desafiadora.

Determinar bons limites inferiores para largura em árvore de um grafo tem diversas aplicações como: Limites inferiores podem ser usado como subrotinas para algoritmos de Branch-And-Bound; Na resolução de problemas combinatórios, um limite inferior alto para largura em árvore pode indicar a inviabilidade no tempo de computação utilizando DEA; Limites inferiores podem indicar a qualidade de limites superiores por um “gap” reduzido.

Técnicas conhecidas para achar limites inferiores simples podem ser encontradas em Koster et al [7], Ramachandramurthi [8] e Lucena [9]. Foi demonstrado, também, que todo limite inferior pode ser modificado de forma a ser tomado como o máximo limite inferior sobre todos os subgrafos ou menores de grafo [10,11].

Contudo, estudos sobre a largura em árvore com abordagens de Programação Linear Inteira (PLI) são limitados na literatura. Observando essa carência, nós apresentamos novos resultados sobre formulação por Ordem de Eliminação, em inglês “Elimination Order Formulation” (EOF). Determinamos a dimensão e demonstramos novas classes de facetas para o poliedro associado a esta formulação.

No Capítulo 2, apresentamos brevemente a notação em Teoria dos Grafos utilizada e as definições específicas para a compreensão deste trabalho. Além disso, apresentamos

algumas definições e proposições clássicas em Combinatória Poliédrica que serão utilizadas no Capítulo 4.

No Capítulo 3, exploramos os limites inferiores disponíveis na literatura, finalizamos ao apresentar a formulação linear inteira denominada formulação por ordem de eliminação a qual é o alvo do nosso estudo poliédrico.

No Capítulo 4, apresentamos uma simplificação da formulação EOF, demonstramos que o poliedro associado a simplificação é afim-isomórfico ao da formulação EOF. Verificamos a dimensão do poliedro associado à simplificação, apresentamos brevemente um rol de facetas muito simples desse poliedro e, em seguida, introduzimos, analisamos e demonstramos ser faceta algumas desigualdades mais complexas.

Finalmente, no Capítulo 5, listamos nossas conclusões e propomos alguns trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta capítulo iremos expor alguns conceitos básicos, notações e propriedades utilizadas no restante do texto, contudo, para sermos objetivos, assumimos que o leitor possui alguma familiaridade com Teoria dos Grafos, Combinatória Poliédrica e Teoria da Computação.

### 2.1 Conceitos em Teoria dos Grafos

A notação que adotamos em Teoria dos Grafos provém de (Diestel [12]).

Vamos denotar por  $G = (V(G), E(G))$  um grafo simples,  $n = |V(G)|$  o número de vértices de  $G$  e  $m = |E(G)|$  o número de arestas de  $G$ . Denotamos, também,  $\bar{E}(G)$  o conjunto de não-arestas de  $G$ , ou seja,  $\bar{E}(G) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ e } uv \notin E(G)\}$  e  $\bar{m} = |\bar{E}(G)|$ .

Um *grafo direcionado* ou *digrafo*  $D = (V(D), A(D))$  consiste em um grafo onde as arestas são orientadas, e são ditas arcos. Um arco  $(u, v) \in A(D)$  é representado por uma seta partindo de  $u$  em direção a  $v$  e o denotamos por conveniência, também, por  $uv$ .

Um *grafo orientado*  $D = (V(D), A(D))$  difere de um digrafo apenas por não possuir arcos simétricos, ou seja, temos no máximo um dos arcos  $uv$  e  $vu$  em  $A(D)$ .

Para o grafo  $G = (V, E)$  e um conjunto de vértices  $W \subseteq V$ , o *subgrafo de  $G$  induzido por  $W$*  é denotado por  $G[W] = (W, \{uv \in E \mid u, v \in W\})$ .

Um *passeio* em um grafo simples  $G$  é uma sequência finita e não-nula  $P = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  tal que para  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_i = v_{(i-1)}v_i$  é uma aresta em  $G$ . O *tamanho (comprimento) de um passeio* é o número de arestas contidas nele.

Um *caminho* é um passeio que não contém vértices repetidos. Sejam  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ . Um  $uv$ -caminho é um caminho que começa em  $u$  e termina em  $v$ . Sejam  $P, Q$  dois  $uv$ -caminhos.  $P$  e  $Q$  são disjuntos em vértices se eles não possuem vértices internos em comum.

Se  $C = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  é um passeio com todos os vértices distintos, exceto por  $v_0 = v_n$ , dizemos que  $C$  é um *ciclo*.

A *vizinhança de um vértice  $v$*  em  $G$  será denotada por  $N_G(v)$  e para  $S \subseteq V(G)$  temos  $N_G(S) = (\bigcup_{v \in S} N_G(v)) \setminus S$ . O *grau de um vértice  $v$*  em  $G$  é denotado por  $d_G(v)$ .

Quando  $G$  estiver implícito iremos suprimi-lo nos subscritos em nossa notação.

Um *buraco* é um *ciclo induzido* de tamanho pelos menos 4. Denotamos por  $C_n$  o ciclo induzido com  $n$  vértices. Um grafo é *completo* se todos os vértices deste grafos são *adjacentes* entre si. O grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . Uma *clique* de um grafo  $G$  é um subconjunto  $S \subseteq V(G)$  tal que  $G[S]$  é um subgrafo completo de  $G$ . O *número clique* de  $G$ , denotado por  $\omega(G)$ , é o tamanho da maior clique em  $G$ .

Uma *partição* de um conjunto  $S$  é uma família de subconjuntos não-vazios, também ditos partes ou classes,  $\Pi = \{S_i : i \in I\}$ , tais que  $\cup_{i \in I} S_i = S$  e  $S_i \cap S_j = \emptyset$ , para todo  $\{i, j\} \subseteq I$ .

Um grafo  $G$  é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos  $X$  e  $Y$  tais que toda aresta tem uma extremidade em  $X$  e outra em  $Y$ . Se todo vértice de  $X$  é adjacente a todo vértice em  $Y$ , então  $G$  é um grafo bipartido completo e é denotado por  $K_{r,s}$  com  $r = |X|$  e  $s = |Y|$ .

Uma relação binária  $R$  é uma ordem parcial sobre um conjunto  $U$  se :  $R$  é reflexiva, ou seja, para todo  $u \in U$  temos  $(u, u) \in R$ ;  $R$  é antisimétrica, ou seja, para todo  $uv \in U$  se  $(u, v) \in R$  e  $(v, u) \in R$ , então  $u = v$ ; e  $R$  é transitiva, ou seja, para todo  $u, v, w \in U$  se  $(u, v) \in R$  e  $(v, w) \in R$ , então  $(u, w) \in R$ . Seja  $R$  uma ordem parcial sobre  $U$  e  $u, v \in U$  com  $(u, v) \in R$ , dizemos que  $u$  precede  $v$  ou, equivalentemente,  $v$  sucede (ou é posterior) a  $u$ . Se  $(u, v) \notin R$  e  $(v, u) \notin R$ , dizemos que  $u$  e  $v$  são incomparáveis. Podemos usar a notação  $aRb$  significando que  $(a, b) \in R$ .

Iremos representar uma ordem parcial  $\rho$  sobre  $V$  através da sequência  $\rho = \langle S_1, \dots, S_k \rangle$ . Os termos dessa sequência são subconjuntos de  $V$  mutuamente disjuntos. Os vértices em  $S_i$ , para  $i \in \{1, \dots, k\}$ , são incomparáveis entre si. Se  $S_i$  precede  $S_j$  na sequência, então todos os vértices em  $S_i$  precedem os vértices em  $S_j$ . Seja  $S = \cup_{i \in \{1, \dots, k\}} S_i$ . Os vértices em  $V \setminus S$  são incomparáveis entre si e sucedem os vértices em  $S$ .

Seja  $\rho$  uma ordem parcial sobre  $V$ . Se para todo  $a, b \in V$  temos  $aRb$  ou  $bRa$  dizemos que  $\rho$  é uma ordem total. Usamos a notação  $v \prec_\rho w$  para expressar  $(v, w) \in \rho$ . Quando a ordem  $\rho$  estiver implícita denotaremos simplesmente  $v \prec w$ .

Dizemos que uma ordem (total)  $\rho^*$  respeita uma ordem parcial  $\rho$ , quando  $\rho \subseteq \rho^*$ .

Seja  $\delta$  uma ordem dos vértices de  $G$  tal que se  $d_G(v) \leq d_G(w)$ , então  $v \prec_\delta w$ , ou seja, os vértices são ordenados pelo valor de seu graus em ordem não-decrescente e vamos denotar por  $\delta_k(G)$  o  $k$ -ésimo vértice nessa ordem.

**Definição 2.1.1** (Contração). *Uma contração (de arestas) é uma relação entre um grafo  $G = (V, E)$ , uma aresta  $e = uv \in E$  e um novo grafo  $G' = (V', E')$ , denotado por  $G/e$ . Para obtermos  $G/e$  a partir de  $G$ , nós substituímos os vértices  $u$  e  $v$  por um novo vértice  $v_e$  que é feito adjacente a todos os vizinhos de  $u$  e  $v$  em  $G$ , ou seja,  $V' = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{v_e\}$  e  $E' = \{wt \in E : \{w, t\} \cap \{u, v\} = \emptyset\} \cup \{v_e w : uw \in E - e\} \cup \{v_e w : vw \in E - e\}$ .*

**Definição 2.1.2** (Menor). *Um menor de  $G$  é um grafo  $H$ , obtido por operações de: eliminação de vértices e/ou arestas e contrações de arestas sobre  $G$ .*

**Definição 2.1.3** (Grafo Cordal). *Um grafo é cordal se, e somente se, não contém qualquer buraco.*

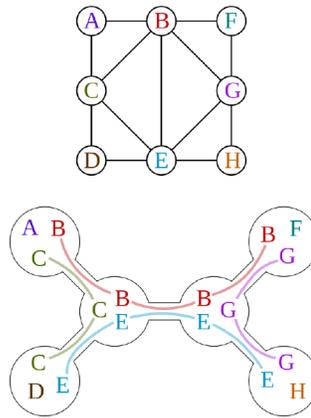
**Definição 2.1.4** (Cordalização). *Um grafo  $H = (V, E')$  é uma cordalização de um grafo  $G = (V, E)$  se  $G$  é subgrafo gerador de  $H$  e  $H$  é cordal.  $E' \setminus E$  é dito uma triangulação*

de  $G$ .  $H$  é dito uma  $k$ -cordalização de  $G$  se é uma cordalização cujo tamanho da maior clique é no máximo  $k$ .

**Definição 2.1.5** (Decomposição Em Árvore). Um par  $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$  é chamado Decomposição Em Árvore (DEA) para um grafo  $G = (V, E)$ , onde  $\{X_i \mid i \in I\}$  é uma família de subconjuntos (mochilas) de  $V$ , e  $T$  uma árvore com conjuntos de nós  $I$  e arestas  $F$  tal que:

- a)  $\bigcup_{i \in I} X_i = V$ .
- b)  $\forall uv \in E, \exists i \in I : u, v \in X_i$
- c) Para todo  $v \in V$ , o conjunto  $I_v = \{i \in I \mid v \in X_i\}$  induz uma subárvore de  $T$ , ou equivalentemente,  $\forall i, j, k \in I$ : Se  $j$  está em algum caminho de  $i$  para  $k$  em  $T$ , temos  $X_i \cap X_k \subseteq X_j$ .

Figura 1 – Exemplo de DEA



Podemos ver um exemplo de DEA na Figura 1. A parte superior apresenta o grafo que está sendo decomposto e a parte inferior apresenta as mochilas dispostas de acordo com os nós da árvore de decomposição aos quais estão associados.

**Definição 2.1.6** (Largura em árvore). A largura em árvore (“treewidth”) de uma decomposição  $D = (\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$  para  $G = (V, E)$  é definida como  $tw_D(G) := \max_{i \in I} \{|X_i| - 1\}$  e a largura em árvore de  $G$  é a largura mínima dentre todas as decomposições em árvore possíveis para  $G$ . Logo, temos  $tw(G) = \min\{tw_D(G) \mid D \text{ uma DEA de } G\}$ .

**Lema 2.1.7** (Bodlaender e Koster [13]). Seja  $G = (V, E)$  um grafo com largura em árvore no máximo  $k$ .  $G$  possui uma decomposição em árvore  $(\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$  com largura no máximo  $k$  tal que para toda aresta  $ij \in F : X_i \not\subseteq X_j$  ou  $X_j \not\subseteq X_i$ . As decomposições com tal propriedade são ditas próprias.

## 2.2 Conceitos em Combinatória Poliédrica

Nesta seção, apresentamos algumas definições e proposições bem conhecidas em Combinatória Poliédrica. Um material mais profundo sobre Combinatória Poliédrica pode ser obtido em [14].

Seja  $m > 0$ ,  $S = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ . Uma *combinação linear*  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$  é dita uma *combinação afim* se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ , ou ainda, *combinação convexa* se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  e  $\alpha_i \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ .

O *fecho afim* (*convexo*) de  $S$  é definido como o conjunto de todas as combinações afins (convexas) de elementos de  $S$  e o denotamos por  $\text{aff}(S)$  ( $\text{conv}(S)$ ).

O conjunto  $S$  é dito *linearmente independente* (LI) se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$  implica que  $\alpha_i = 0$  para  $i = 1, \dots, m$ . Caso contrário, ele é dito *linearmente dependente* (LD).

O conjunto  $S$  é dito *afim independente* (AI) se  $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$  implicam que  $\alpha_i = 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Caso contrário, ele é dito *afim dependente* (AD).

O Lema 2.2.1 afirma que podemos utilizar um conjunto afim-independente em  $\mathbb{R}^n$  para obter um conjunto afim-independente em  $\mathbb{R}^{n+1}$  de mesma dimensão.

**Lema 2.2.1.** *Se  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  é um conjunto afim-independente, então para qualquer  $y \in \mathbb{R}^n$  temos que o conjunto  $S^+ = \{(s_i^\top, y_i)^\top : i = 1, \dots, n\}$  é afim-independente.*

*Demonstração.* Vamos determinar as soluções para o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i \begin{pmatrix} s_i \\ y_i \end{pmatrix} = 0 \\ \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Como  $S$  é um conjunto afim-independente, temos que a única solução para  $\alpha$  no subsistema  $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i = 0$  e  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha = \vec{0}$ .  $\square$

O *posto* (*resp. posto-afim*) de  $S$  um conjunto não vazio é o maior número de vetores linearmente independentes (*resp. afim independentes*) em  $S$  e o denotamos por  $\text{rank}(S)$  (*resp. arank*( $S$ )).

Para  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  e  $a_0 \in \mathbb{R}$  o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = a_0\}$  é chamado *hiperplano*. Um hiperplano define um *semiespaço*  $\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq a_0\}$ . Um *poliedro* é definido como a intersecção de um número finito de semiespaços ou equivalentemente ao conjunto de soluções de um sistema finito de inequações lineares.

Mais precisamente,  $P$  é um poliedro, se existem uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e um vetor  $b \in \mathbb{R}^m$  tal que  $P = \{x : Ax \leq b\}$ . Observe que algumas inequações em  $Ax \leq b$  podem atuar conjuntamente como equações. Vamos definir o sistema  $Mx = d$  como o sistema de equações presentes em  $Ax \leq b$  e para enfatizar essas equações vamos escrever  $P = \{x : Ax \leq b, Mx = d\}$ .

A *dimensão* de um conjunto  $S$  é definido como  $\dim(S) = \text{arank}(S) - 1$  (o conjunto vazio possui dimensão  $-1$ ).

Seja  $P = \{x : Ax \leq b, Mx = d\} \subseteq \mathbb{R}^n$  um poliedro. Podemos determinar a dimensão de  $P$  como  $\dim(P) = n - \text{posto}(M)$  [15], onde  $\text{posto}(M)$  é o número máximo de colunas linearmente independentes de  $M$ .

Um poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  possui *dimensão plena* se  $\dim(P) = n$ . Caso um poliedro possua dimensão plena, não existe qualquer equação  $a^\top x = a_0$ , com  $a \neq \mathbf{0}$ , que seja satisfeita em todos os pontos de  $P$  [15].

Uma desigualdade  $a^\top x \leq a_0$ ,  $a \neq \mathbf{0}$ , é *válida* para um poliedro  $P$  se  $P \subseteq \{x : a^\top x \leq a_0\}$ . Se  $a^\top x \leq a_0$  é válida para  $P$ , o conjunto  $F = \{x \in P : a^\top x = a_0\}$  é dito uma *face* de  $P$ . Uma face é denominada *própria* se  $\emptyset \neq F \subset P$ . Uma face de dimensão  $k$  é dita uma  $k$ -face.

A face  $F$  é denominada *faceta* se  $\dim(F) = \dim(P) - 1$  e dizemos que a desigualdade  $a^\top x \leq a_0$  *induz faceta* em  $P$ .

Para um poliedro de dimensão plena se duas desigualdades  $a^\top x \leq a_0$  e  $b^\top x \leq b_0$  induzem a mesma faceta, então elas diferem por um múltiplo positivo como pode ser visto no teorema seguinte.

**Teorema 2.2.2** (Martí e Reinelt [15]). *Seja  $P$  um poliedro de dimensão plena e  $a^\top x \leq a_0$  uma desigualdade válida tal que sua face  $F = \{x \in P : a^\top x = a_0\}$  seja própria. As seguintes proposições são equivalentes.*

- a)  $F$  é faceta de  $P$ .
- b)  $\dim(F) = \dim(P) - 1$ .
- c) Se  $F \subseteq \{x \in P : b^\top x = b_0\}$  onde  $b^\top x = b_0$  é desigualdade válida para  $P$ , então  $(a^\top, a_0) = \alpha(b^\top, b_0)$ , para  $\alpha \geq 0$ .

Uma transformação afim  $f : U \rightarrow W$  consiste de uma transformação linear ( $\mathbf{A}x$ ) seguida de uma translação por um vetor ( $\mathbf{b}$ ), ou seja,  $f(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}$ .

Dois poliedros  $P \subseteq \mathbb{R}^n, Q \subseteq \mathbb{R}^m$  são ditos afim-isomórficos se existem transformações afins  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  que definem uma bijeção entre os pontos dos dois poliedros. Ou seja, se existem

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto Fx + F_0, \quad F \in \mathbb{R}^{m \times n}, F_0 \in \mathbb{R}^m, \\ g : y &\mapsto Gy + G_0, \quad G \in \mathbb{R}^{n \times m}, G_0 \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} f(x) &\in Q, & \forall x \in P \\ g(y) &\in P, & \forall y \in Q \\ g(f(x)) &= x, & \forall x \in P \\ f(g(y)) &= y, & \forall y \in Q \end{aligned}$$

Intuitivamente, dois poliedros são afim-isomórficos se podemos obter um a partir do outro através de transformações afins como translação, rotação, escala, reflexão ou projeção ortogonal. O afim-isomorfismo é uma relação de equivalência entre dois poliedros. Se dois poliedros são afim-isomórficos, nós podemos relacionar de forma imediata suas desigualdades válidas (resp. faces, facetas) através das proposições a seguir, as demonstrações podem ser vistas em [16].

**Proposição 2.2.3.** *Se  $x^1, \dots, x^p \in P$  são afim independentes, então  $f(x^1), \dots, f(x^p) \in Q$  são afim independentes.*

**Proposição 2.2.4.**  *$P$  e  $Q$  possuem a mesma dimensão.*

**Proposição 2.2.5.** *Se a desigualdade  $\pi^\top x \leq \pi_0$  é válida para  $P$ , então a desigualdade  $\pi^\top Gy \leq \pi_0 - \pi^\top G_0$  é válida para  $Q$ .*

**Proposição 2.2.6.** *Se  $R = \{x \in P : \pi^\top x = \pi_0\}$ , então  $f(R) = \{y \in Q : \pi^\top Gy = \pi_0 - \pi^\top G_0\}$ .*

**Proposição 2.2.7.** *Se  $R$  é uma  $k$ -face de  $P$ , então  $f(R)$  é uma  $k$ -face de  $Q$ .*

**Proposição 2.2.8.** *Se  $\pi^\top x \leq \pi_0$  induz faceta de  $P$ , então  $\pi^\top Gy \leq \pi_0 - \pi^\top G_0$  em  $Q$ .*

### 3 LIMITES INFERIORES

Neste capítulo, iremos apresentar alguns limites inferiores disponíveis na literatura. Tentamos, o tanto quanto possível, fazer uma apresentação linear, passando de idéias simples até as mais rebuscadas. Optamos, também, por não apresentar aqui todos os limites inferiores que encontramos disponíveis na literatura ora devido a baixa performance do limite excluído, ora para nos manter no âmbito da Teoria dos Grafos.

#### 3.1 Baseados em graus

O parâmetro de Ramachandramurthi,  $\gamma_R(G)$ , é um limite inferior para a largura em árvore calculado utilizando o grau de vértices específicos e fundamentado pelos seguintes lemas.

**Lema 3.1.1** (Carvalho [17]). *Seja  $D$  uma DEA de  $G = (V, E)$ . Se  $W \subseteq V$  é uma clique em  $G$ , então  $W$  deve estar contido em alguma mochila de  $D$ .*

**Lema 3.1.2.** *Se  $G = (V, E)$  é um grafo não completo com largura em árvore no máximo  $k$ , então existem dois vértices  $u, v \in V$ , não adjacentes, com grau no máximo  $k$ .*

*Demonstração.* Seja uma decomposição  $D = (\{X_i : i \in I\}, T = (I, F))$  com largura em árvore no máximo  $k$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $D$  seja uma decomposição própria. Se a decomposição possui apenas uma mochila  $i$ , então o lema vale trivialmente, pois  $X_i = V$  e  $|X_i| \leq k + 1$ . Assim, todo vértice  $v \in V$  possui grau no máximo  $k$  e como  $G$  não é completo, temos que existem ao menos dois desses vértices.

Se a decomposição possui ao menos duas mochilas, então existe uma mochila,  $i$ , que é folha na árvore da decomposição e o seu vizinho  $j$ . Tome  $v \in X_i \setminus X_j \neq \emptyset$ . Pela definição de DEA temos que  $v$  não pode pertencer a qualquer outra mochila, pois não pertence a mochila  $j$ . As arestas estão distribuídas entre as mochilas da decomposição, logo todos os vizinhos de  $v$  estão na mochila  $i$  com  $|X_i| \leq \max_{k \in I} |X_k| \leq k + 1$ , portanto  $d(v) \leq k$ .

Como toda árvore possui ao menos duas folhas, temos dois vértices não adjacentes com grau no máximo  $k$ .  $\square$

Baseado nisso, Ramachandramurthi definiu  $\gamma_R(G)$  como  $n - 1$  se  $G$  é completo ou o mínimo entre todos os pares de vértices não adjacentes do máximo grau dos vértices, caso contrário. Formalmente,

**Definição 3.1.3.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Nós definimos por  $\gamma_R(G)$  como*

$$\gamma_R(G) := \begin{cases} |V| - 1, & \text{Se } G \text{ for clique} \\ \min_{uv \in \bar{E}} \max(d(u), d(v)), & \text{c.c.} \end{cases}$$

**Lema 3.1.4** (Ramachandramurthi [8]). *Para todo grafo  $G = (V, E)$ , temos*

$$\delta_1(G) \leq \delta_2(G) \leq \gamma_R(G) \leq tw(G)$$

*É trivial o cálculo de  $\delta_1(G)$ ,  $\delta_2(G)$  e também é possível calcular  $\gamma_R(G)$  em tempo  $\mathcal{O}(n+m)$ .*

### 3.2 Baseados na tomada de subgrafos e/ou menores

Os limites inferiores baseados em graus são sensíveis à vértices com baixo grau. Sabe-se pelo Lema 3.2.1 (Lema 3.2.4), a seguir, que podemos utilizar uma decomposição ótima de um grafo como base para construir decomposições para os seus subgrafos (menores) de modo a não aumentar a largura em árvore. Logo, podemos utilizar da estratégia de tomar subgrafos (menores) do grafo original e utilizar o máximo do limite inferior sobre eles.

**Lema 3.2.1.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo e  $W \subseteq V$ . Temos que  $tw(G[W]) \leq tw(G)$ .*

*Demonstração.* Seja  $D = (\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$  a decomposição em árvore ótima para  $G$ , podemos construir a decomposição  $(\{Y_i = X_i \cap W \mid i \in I\}, T = (I, F))$  para  $G[W]$ .  $\square$

**Definição 3.2.2** (Degeneração). *Seja  $G = (V, E)$*

- a) *A degeneração de  $G$ , denotado por  $\delta D(G)$ , é o máximo  $\delta_1(H)$  para qualquer  $H$  subgrafo de  $G$ .*
- b) *A  $\delta_2$ -degeneração de  $G$ , denotado por  $\delta_2 D(G)$ , é o máximo  $\delta_2(H)$  para qualquer  $H$  subgrafo de  $G$ .*
- c) *A  $\gamma_R$ -degeneração de  $G$ , denotado por  $\gamma_R D(G)$ , é o máximo  $\gamma_R(H)$  para qualquer  $H$  subgrafo de  $G$ .*

**Lema 3.2.3.** *Para qualquer grafo  $G = (V, E)$ ,  $tw(G) \geq \gamma_R D(G) \geq \delta_2 D(G) \geq \delta D(G)$ .*

Foi demonstrado por Koster, Wolle e Bodlaender em [7] que  $\delta D(G)$ ,  $\delta_2 D(G)$  podem ser computados em tempo  $O(nm)$  e que, para um grafo  $G = (V, E)$  e um dado  $k$ , é *NP-completo* decidir se  $\gamma_R D(G)$  é no mínimo  $k$ .

**Lema 3.2.4.** *Seja  $H = (W, E')$  um menor de  $G = (V, E)$ . Temos que  $tw(H) \leq tw(G)$ .*

*Demonstração.* Pela definição de menor (2.1.2), basta mostrar que as operações: eliminação de aresta; eliminação de vértice; contração de aresta. Não aumentam a largura em árvore de um grafo.

Seja  $D = (\{X_i \mid i \in I\}, T = (I, F))$  a decomposição em árvore ótima para  $G$ .

Observe que a eliminação de arestas sobre  $G$ , obtendo  $H$ , não altera a usabilidade de  $D$  como DEA para  $H$ , visto que as arestas restantes continuam distribuídas entre as mochilas da decomposição.

Suponha que realizamos apenas eliminações de vértices sobre  $G$ , obtendo  $H$ . Assim,  $H$  é subgrafo induzido de  $G$ . Pelo Lema 3.2.1, podemos obter uma DEA  $D'$  com largura em árvore no máximo  $tw_D(G)$ . Podemos ainda operar eliminações de arestas sobre  $H$ . Logo, basta demonstrar que a largura em árvore de  $G$  não aumenta com a contração de arestas.

Suponha a contração da aresta  $uv$  em  $E$  gerando o vértice  $x$ . Vamos construir uma decomposição  $D'$  para o menor obtido  $H$ . Vamos substituir a ocorrência de  $u$  ou  $v$  nas mochilas (subconjuntos) por  $x$  e definir  $X'_i = X_i$  se  $X_i \cap \{u, v\} = \emptyset$  e  $X'_i = (X_i \cup \{x\}) - \{u, v\}$  se  $X_i \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ . Como a cardinalidade das mochilas não aumentam, temos que  $tw_{D'}(H) \leq tw_D(G)$ .  $\square$

Assim, podemos calcular os limites inferiores baseados em graus como o máximo limite sobre todos os menores de um grafo.

**Definição 3.2.5.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo.*

- a) *A degeneração por contração de  $G$ , denotado por  $\delta C(G)$ , é o máximo de  $\delta_1(H)$  para qualquer  $H$  menor de  $G$ .*
- b) *A  $\delta_2$ -degeneração por contração de  $G$ , denotado por  $\delta_2 C(G)$ , é o máximo de  $\delta_2(H)$  para qualquer  $H$  menor de  $G$ .*
- c) *A  $\gamma_R$ -degeneração por contração de  $G$ , denotado por  $\gamma_R C(G)$ , é o máximo de  $\gamma_R(H)$  para qualquer  $H$  menor de  $G$ .*

**Lema 3.2.6.** *Para qualquer grafo  $G = (V, E)$ ,  $tw(G) \geq \gamma_R C(G) \geq \delta_2 C(G) \geq \delta C(G)$ .*

### 3.3 Baseados em grafos melhorados

Ainda buscando superar a fragilidade dos limites inferiores apresentados, iremos expor uma condição que permite adicionar arestas ao grafo sem alterar a sua largura em árvore.

Identificar tais condições é interessante, já que nos permitem aumentar a densidade do grafo e possivelmente aumentar o valor de nossos limites inferiores.

A seguir, temos o lema que detalha a condição sugerida.

**Lema 3.3.1** (Em [18, 19]). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo com  $tw(G) \leq k$ . Seja  $v, w$  dois vértices não-adjacentes em  $G$ . Suponha que existe ao menos  $k + 1$  caminhos disjuntos em vértices de  $v$  até  $w$ . Então, o grafo obtido pelo acréscimo da aresta  $vw$  em  $G$ ,  $G' = (V, E \cup \{vw\})$ , possui largura em árvore no máximo  $k$ .*

Considere o seguinte procedimento, dado um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k$ . Enquanto existirem vértices  $v$  e  $w$  não-adjacentes ligados por pelo menos  $k + 1$  caminhos disjuntos em vértices, adicionamos a aresta  $vw$  no grafo  $G$  corrente. O grafo resultante é denominado grafo  $(k + 1)$ -caminho melhorado.

Portanto, a largura em árvore de  $G$  é no máximo  $k$  se, e somente se, a largura em árvore do  $(k + 1)$ -caminho melhorado de  $G$  tem largura em árvore no máximo  $k$ . Mais estritamente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $G_n$  o grafo  $(k + 1)$ -caminho melhorado de  $G = (V, E)$ . Então,*

$$tw(G) \leq k \iff tw(G_n) \leq k. \quad (3.1)$$

Baseado no Teorema 3.3.2, Clautiaux et al. [19] desenvolveram o Algoritmo *LBP*. O algoritmo utiliza outro algoritmo  $X$  para calcular limites inferiores como subrotina.

---

**Algorithm 1:** *LBP*( $X$ )(Grafo)

---

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : um grafo,  $X$ : Algoritmo para limites inferiores para  $tw(G)$

**Saída:**  $low$ : limite inferior

```

1  $low \leftarrow \lceil X(G) \rceil$ ;
2 repita
3    $H \leftarrow (low + 1)$ -caminho melhorado de  $G$ ;
4    $lowH \leftarrow \lceil X(H) \rceil$ ;
5    $changed \leftarrow false$ ;
6   se  $lowH > low$  então
7      $low \leftarrow low + 1$ ;
8      $changed \leftarrow true$ ;
9 até  $not(changed)$ ;
```

---

Vamos argumentar a corretude do Algoritmo LBP (Algoritmo 1). Em cada iteração, nós calculamos o limite inferior para a largura em árvore do grafo  $(low + 1)$ -caminho melhorado de  $G$ . Como  $tw(H) \geq \lceil X(H) \rceil$ . Se  $\lceil X(H) \rceil$  for maior que  $low$ , temos que a largura em árvore de  $H$  é maior que  $low$ . Assim, pelo teorema 3.3.2 temos que  $tw(G) > low$ . Logo, podemos adicionar uma unidade a  $low$ .

### 3.4 Maximum Cardinality Search

O algoritmo Maximum Cardinality Search (MCS) foi introduzido por Tarjan e Yannakakis [20] para o reconhecimento de grafos cordais. Ele é utilizado frequentemente como heurística para limites superiores para a largura em árvore, contudo, pode ser utilizado como mecanismo de cálculo para limites inferiores como demonstrado por Lucena [9, 21].

O MCS é um algoritmo de percurso sobre grafos. O algoritmo inicia sem nenhum vértice visitado. Ele, iterativamente, visita algum vértice não visitado, tendo como critério

de escolha o vértice não visitado como o maior número de vizinho já visitados. Observe que o algoritmo gera uma ordem sobre os vértices de  $G$ .

Essas ordens geradas pelo algoritmo MCS são denominadas MCS-ordens de  $G = (V, E)$ . Lucena demonstrou que qualquer MCS-ordem produz um limite inferior para a largura em árvore de  $G$ .

**Lema 3.4.1** (Lucena [9]). *Suponha que o algoritmo “Maximum Cardinality Search” sobre o grafo  $G = (V, E)$  visita um vértice  $v \in V$  tal que, no instante da visita,  $N(v)$  contém  $k$  vértices já visitados. Então,  $tw(G) \geq k$ .*

Além disso, demonstrou o seguinte limite inferior.

**Teorema 3.4.2** (Lucena [9, 21]). *Para qualquer grafo  $G = (V, E)$  e MCS-ordem  $\pi$  de  $G$ , a largura em árvore de  $G$  é limitada inferiormente por*

$$MCSLB(G, \pi) = \max_{v \in V} |\{vw \in E : w \prec_{\pi} v\}| \quad (3.2)$$

*Observe que  $MCSLB(G, \pi)$  é o máximo número de vértices já visitados adjacentes ao vértice sendo visitado em cada iteração.*

Uma heurística para limites inferiores pode ser baseada na geração de uma MCS-ordem  $\pi$  e a avaliação de  $MCSLB$ . Infelizmente, a determinação da MCS-ordem que maximiza  $MCSLB$  é um problema NP-Difícil.

### 3.5 Baseados em Esquemas Perfeitos

Esta seção apresenta os resultados teóricos que alicercam a formulação por Ordem de Eliminação definida na Seção 3.6, cujo tratamento poliédrico é nosso principal objeto de estudo.

Podemos utilizar relaxações dessa formulação para obter limites inferiores. Iremos exibir duas caracterizações para os grafos cordais, sendo a última utilizada para gerar cordalizações do grafo original.

A caracterização de grafos cordais exibida no Teorema 3.5.1 afirma que podemos construir uma DEA para um grafo cordal através da família de cliques maximais desse grafo.

**Teorema 3.5.1** (Carvalho [17]). *Um grafo  $G = (V, E)$  é cordal se e somente se admite uma decomposição em árvore ótima  $D = (X, T)$ , onde  $X$  corresponde à família de cliques maximais de  $G$ .*

Observando conjuntamente os Teoremas 3.1.1 e 3.5.1, notamos que a decomposição em cliques maximais é ótima para um grafo cordal. Portanto, a largura em árvore de um grafo cordal é bem conhecida.

**Lema 3.5.2.** *Se  $G$  é um grafo cordal, então  $tw(G) = \omega(G) - 1$ .*

As cordalizações de um grafo podem ser utilizadas para obter limites superiores para a largura em árvore. Além disso, existe uma cordalização “ótima” que determina a largura em árvore do grafo original, como podemos ver no Teorema 3.5.4.

**Lema 3.5.3.** *Sejam  $G$  um grafo e  $H$  uma cordalização de  $G$ , então  $tw(G) \leq tw(H) = \omega(H) - 1$ .*

**Teorema 3.5.4** (Bodlaender [22]). *A largura em árvore  $tw(G)$  é a mínima largura de uma cordalização de  $G$ .*

Vamos mostrar como obter uma cordalização de um grafo a partir de uma ordem sobre os seus vértices.

Uma caracterização de grafos cordais de interesse algorítmico envolve uma ordem sobre os vértices do grafo. Um vértice  $v \in G$  é dito *simplicial* se  $N_G(v)$  induz uma clique em  $G$ . Uma ordem  $\rho = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  dos vértices de  $G$  é denominado *esquema de eliminação perfeito* (*esquema perfeito*) se cada  $v_i$  é um vértice simplicial do subgrafo induzido  $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ .

Os Lemas 3.5.5 e 3.5.6 sugerem que a partir de uma ordem qualquer dos vértices podemos obter um grafo cordal ao garantir que cada vértice seja simplicial no subgrafo induzido pelos vértices que o sucedem na ordem e isso pode ser feito por meio de acréscimos de arestas ao grafo original.

**Lema 3.5.5** ( Dirac [23] ). *Todo grafo cordal  $G$  tem um vértice simplicial. Além disso, se  $G$  não é completo, então ele tem dois vértices simpliciais não adjacentes.*

**Lema 3.5.6** (Carvalho [17]).  *$G$  é um grafo cordal se, e somente se,  $G$  admite um esquema de eliminação perfeito. Além disso, qualquer vértice simplicial pode iniciar um esquema perfeito.*

Formalmente, podemos obter a partir de um grafo  $G = (V, E)$  um supergrafo cordal  $H = (V, E')$  por acréscimos de arestas em  $G$ .  $H$  é dito *cordalização* de  $G$  e  $E' \setminus E$  é dito uma *triangulação* do grafo  $G$  resultando em  $H$ .  $H$  é dito uma  $k$ -cordalização de  $G$  se é uma cordalização cujo tamanho da maior clique é no máximo  $k$ . Seja  $\rho = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  uma ordem dos vértices de  $G$ , definimos a *vizinhança posterior de  $v$  em  $G$* , por  $\rho$ , como  $N_\rho^<(v) = \{w \in V : vw \in E, v \prec_\rho w\}$ .

O Algoritmo 2 gera uma cordalização minimal, denotado por  $G_\rho = (V, E_\rho)$ , de  $G = (V, E)$  que admite a ordem  $\rho$  como esquema perfeito. O conjunto minimal de arestas para

gerar uma cordalização de um grafo a partir de uma ordem sobre os vértices é descrito pelo conjunto  $E_\rho \setminus E$ .

---

**Algorithm 2:** Cordalização( $G, \rho$ )

---

**Entrada:**  $G = (V, E)$ : um grafo,  $\rho$ : uma ordem sobre  $V$

**Saída:**  $G_\rho = (V, E_\rho)$ : uma cordalização de  $G$

1 **for**  $i = 1$  to  $n - 2$  **do**

2      $\lfloor$  Atualize  $G$  tornando  $N^{\prec}(\rho(i))$  uma clique em  $G$ ;

---

**Teorema 3.5.7.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $\rho$  uma ordem sobre  $V$  e  $G_\rho = (V, E_\rho)$  a cordalização obtida pelo Algoritmo 2.*

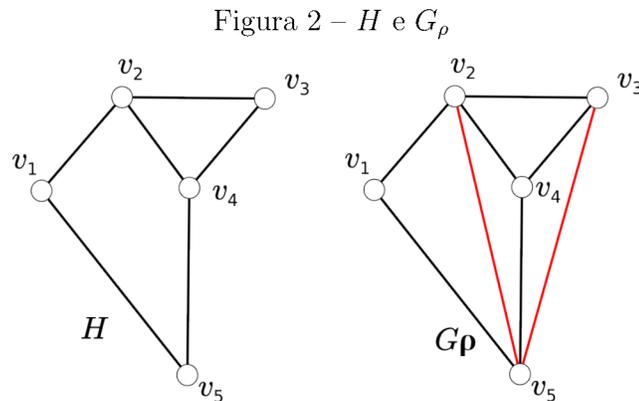
*O conjunto  $E_\rho \setminus E$  é uma triangulação para  $G$ , a largura em árvore de  $G_\rho$  é máxima cardinalidade, entre os vértices, de alguma vizinhança posterior. Ou seja,  $tw(G_\rho) = \max_{v \in V} |N_\rho^{\prec}(v)|$ . Pelo teorema 3.5.4 temos que*

$$tw(G) = \min_{\text{ordem } \rho} \left( \max_{v \in V} |N_\rho^{\prec}(v)| \right). \quad (3.3)$$

A seguir, fazemos um comparativo entre as MCS-ordens e os esquemas perfeitos.

Note que o algoritmo MCS pode ser entendido como uma heurística para geração de uma decomposição em cliques maximais. Se alterarmos o algoritmo para que, além dos passos usuais, cada visitação do algoritmo torne a vizinhança já visitada desse vértice em uma clique. Obtemos uma aproximação de uma decomposição de  $G$  em cliques maximais o que, pelo Teorema 3.5.1, corresponde a uma cordalização desse grafo.

Tais observações sugerem que há uma forte relação entre as ordens inversas às MCS-ordens e os esquemas perfeitos. Foi demonstrado que toda ordem que não é esquema perfeito, também não é MCS-ordem. Mais detalhes sobre essa relação podem ser obtido em [24].



Na Figura 2, podemos ver a aproximação da cordalização obtida pela MCS-ordem  $\rho = \langle v_5, v_4, v_3, v_2, v_1 \rangle$ ,  $H$ , e a cordalização obtida pela ordem inversa à  $\rho$  através do Algoritmo 2,  $G_\rho$ .

Observe que para essa ordem os resultados são distintos. Isto decorre do fato de que os esquemas perfeitos avaliam vizinhanças posteriores possivelmente maiores que as respectivas vizinhanças na estratégia MCS, já que arestas podem ser adicionadas no processo de cordalização.

### 3.6 Formulação por Ordem de Eliminação

Relaxações de programas inteiros para o problema de DEA podem ser utilizadas para obtenção de limites inferiores para  $tw(G)$ .

A formulação por ordem de eliminação (EOF),  $LP_{EOF}$ , foi introduzida por Campos e Silva [25]. Ela determina a largura em árvore de  $G$  identificando uma cordalização ótima.

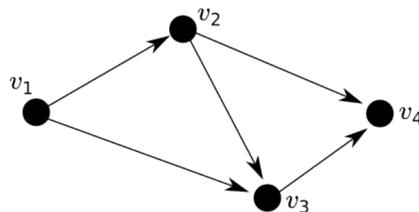
Uma *cordalização orientada* é uma cordalização gerada a partir de uma ordem  $\rho$  através da adição de arestas de forma que  $\rho$  seja esquema perfeito. Em uma cordalização orientada, as arestas (arcos) são orientados conforme a precedência entre suas extremidades. Assim, a vizinhança de saída de um vértice em uma cordalização orientada é justamente sua vizinhança posterior por  $\rho$ .

Uma solução viável  $s$  para a formulação corresponde a uma cordalização orientada de  $G$  [26]. Nós denotaremos  $\text{Cord}(s) = (V, F_s)$  essa cordalização orientada.

Na formulação existem 3 subconjuntos de variáveis de decisão. Para todo  $\{u, v\} \subseteq V$ , a variável  $z_{uv}$  modela a precedência entre  $u$  e  $v$  na ordem  $\rho$  e a variável  $x_{uv}$  indica a existência do arco  $uv$  na cordalização orientada. A variável  $\omega$  calcula a máxima  $|N_\rho^<(v)|$  entre os vértices.

Por exemplo, seja  $G = C_4$  com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $\rho = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ . Seja  $s$  tal que as variáveis  $(z_{v_1v_2}, z_{v_1v_3}, z_{v_1v_4}, z_{v_2v_3}, z_{v_2v_4}, z_{v_3v_4})$  e  $(x_{v_1v_2}, x_{v_1v_3}, x_{v_2v_3}, x_{v_2v_4}, x_{v_3v_4})$  são iguais a 1,  $\omega = 2$  e as demais variáveis são nulas. Podemos ver na Figura 3 a cordalização orientada representada por  $s$ , ou seja,  $\text{Cord}(s)$ .

Figura 3 –  $\text{Cord}(s)$ .



Formalmente, podemos descrever as variáveis de decisão como

$$z_{uv} = \begin{cases} 1, & u \prec_{\rho} v \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \forall \{u, v\} \subseteq V. \quad (3.4)$$

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & u \prec_{\rho} v \text{ e } uv \in \text{cordalização} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \forall \{u, v\} \subseteq V. \quad (3.5)$$

A formulação EOF, denotada por  $LP_{EOF}$ , é exibida a seguir.

$$LP_{EOF} : \quad (3.6)$$

$$\min \quad \omega \quad (3.7)$$

$$\text{s.t. } \omega \geq \sum_{v \in V \setminus u} x_{uv}, \quad \forall u \in V \quad (3.8)$$

$$z_{uv} + z_{vu} = 1, \quad \forall \{u, v\} \subseteq V \quad (3.9)$$

$$z_{uv} + z_{vw} \leq z_{uw} + 1, \quad \forall \{u, v, w\} \subseteq V \quad (3.10)$$

$$x_{uv} = z_{uv}, \quad \forall uv \in E \quad (3.11)$$

$$x_{uv} \leq z_{uv}, \quad \forall uv \in \bar{E} \quad (3.12)$$

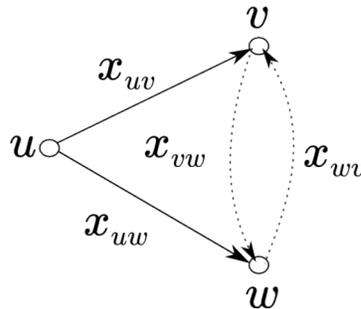
$$x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}, \quad \forall u \in V, v, w \in \bar{E} \quad (3.13)$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\}, z_{uv} \in \{0, 1\}, \quad \forall \{u, v\} \subseteq V \quad (3.14)$$

A função objetivo minimiza  $\omega$ , onde  $\omega$ , pela restrição (3.8), é o máximo dentre os graus de saída dos vértices de  $G_{\rho}$ .

As restrições (3.9), (3.10) e (3.14) garantem que  $z$  determina uma ordem total, (3.11) orienta as arestas do grafo original, (3.12) garante que podemos adicionar somente arcos que respeitem a orientação e (3.13) impõe que se  $uv$  e  $uw$  estão na triangulação com  $u$  precedendo  $v$  e  $w$ , então deve existir uma aresta  $vw$  ou  $wv$  como mostrado na Figura 4, ou seja, para todo vértice  $v \in V$  a vizinhança posterior de  $v$ ,  $N^{\prec}(v)$ , é um orientação de clique.

Figura 4 – Restrição (3.13)



## 4 ESTUDO POLIÉDRICO

Neste capítulo, estudaremos o poliedro definido pela envoltória convexa dos pontos inteiros da formulação EOF. Por simplicidade, nós denotaremos por  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  esse poliedro.

Vamos apresentar uma simplificação de  $LP_{\text{EOF}}$ . Demonstraremos que  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  e o poliedro associado a essa simplificação são afim-isomórficos. Determinaremos a dimensão desses poliedros e iremos apresentar várias classes de desigualdades que induzem faceta nesses poliedros.

### 4.1 Uma simplificação para a formulação EOF

Observe as restrições de antisimetria (3.9) e orientação de arestas (3.11) em  $LP_{\text{EOF}}$ . Elas estabelecem funções entre as suas variáveis.

Por exemplo, a restrição  $x_{uv} = z_{uv}$ , para todo  $uv \in E$ , nos permite deduzir o valor das variáveis  $x_{uv}$  tendo conhecimento apenas das variáveis  $z_{uv}$ , quando  $uv \in E$ . Assim, podemos substituir as variáveis  $x_{uv}$  na formulação pelas variáveis  $z_{uv}$ , quando  $uv \in E$ . A esse processo nós chamamos de eliminação das variáveis  $x_{uv}$  utilizando a restrição  $x_{uv} = z_{uv}$ . Podemos utilizar a mesma estratégia para eliminar exatamente uma variável para cada par  $(z_{uv}, z_{vu})$  utilizando a identidade  $z_{uv} = 1 - z_{vu}$ .

Nossa simplificação, denotada por LP, consiste na formulação resultante do processo de eliminação de variáveis.

Vamos formalizar essas idéias. Seja  $VP_{\text{EOF}}$  o conjunto de variáveis do modelo  $LP_{\text{EOF}}$  e  $VP \subset VP_{\text{EOF}}$ , tal que:

- a)  $\omega \in VP$ .
- b)  $x_{uv} \in VP$ , para todo  $uv \in \bar{E}$ .
- c) Exatamente uma entre as variáveis  $z_{uv}$  e  $z_{vu}$  pertence a VP, para todo  $\{u, v\} \subseteq V$ .
- d)  $x_{uv}$  não pertence a VP, para todo  $uv \in E$ .

Vamos definir LP como a formulação obtida a partir do seguinte processo sob a formulação  $LP_{\text{EOF}}$ . Para toda variável  $x_{uv}$  com  $uv \in E$  substitua as ocorrências de  $x_{uv}$  na formulação pela variável  $z_{uv}$ . Em seguida, para cada variável  $z_{uv}$  que não estiver no conjunto VP, substitua suas ocorrências na formulação pelo valor  $1 - z_{vu}$ . Elimine da formulação as restrições (3.11) e (3.9).

Vamos denotar a envoltória convexa dos pontos inteiros em LP por  $\mathcal{P}$ .

Iremos demonstrar que os poliedros  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  e  $\mathcal{P}$  são afim-isomórficos.

**Teorema 4.1.1.** *Os poliedros  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  e  $\mathcal{P}$  são afim-isomórficos.*

*Demonstração.* Vamos exibir duas transformações afins  $F : \mathbb{R}^{|\text{VP}_{\text{EOF}}|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{VP}|}$  e  $G : \mathbb{R}^{|\text{VP}|} \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{VP}_{\text{EOF}}|}$  e demonstrar que elas definem bijeções entre os pontos de  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  e  $\mathcal{P}$ .

Para  $y \in \mathcal{P}_{\text{EOF}}$ ,  $F(y) = s$  é uma cópia do vetor  $y$  restrita as variáveis que estão em VP. Para  $s \in \mathcal{P}$ ,  $G(s) = y$  é uma cópia do vetor  $s$  acrescida das variáveis eliminadas na simplificação. Tais variáveis anteriormente eliminadas são deduzidas utilizando as restrições de antisimetria e orientação de arestas.

Iremos exibir a transformação  $F$  (resp.  $G$ ) através das funções afins que determinam cada uma das componentes de  $F(y)$  (resp.  $G(s)$ ) existente em VP (resp.  $\text{VP}_{\text{EOF}}$ ).

Vamos denotar por  $F(y)_{uv}^x$  (resp.  $F(y)^\omega$ ,  $F(y)_{uv}^z$ ) o valor da variável  $x_{uv}$  (resp.  $\omega$ ,  $z_{uv}$ ) de  $F(y)$  e denotaremos de forma análoga os valores das variáveis em  $G(s)$ . Também utilizaremos essa notação para diferenciar os valores da mesma variável em vetores distintos, por exemplo  $y_{uv}^x$  e  $s_{uv}^x$ .

Vamos definir  $F$  conforme o sistema afim a seguir.

$$\begin{cases} F(y)^\omega = \omega \\ F(y)_{uv}^z = z_{uv}, & \text{para todo } z_{uv} \in \text{VP} \\ F(y)_{uv}^x = x_{uv} & \text{para todo } x_{uv} \in \text{VP} \end{cases}$$

Vamos definir  $G$  conforme o sistema afim a seguir.

$$\begin{cases} G(s)^\omega = \omega \\ G(s)_{uv}^z = z_{uv} & \text{se } z_{uv} \in \text{VP} \\ G(s)_{uv}^z = 1 - z_{vu} & \text{se } z_{uv} \notin \text{VP} \\ G(s)_{uv}^x = x_{uv} & \text{se } uv \in \bar{E} \\ G(s)_{uv}^x = z_{uv} & \text{se } uv \in E \text{ e } z_{uv} \in \text{VP} \\ G(s)_{uv}^x = 1 - z_{vu} & \text{se } uv \in E \text{ e } z_{uv} \notin \text{VP} \end{cases}$$

Vamos demonstrar que essas transformações definem bijeções entre  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  e  $\mathcal{P}$ .

Primeiro, vamos demonstrar as contenções  $F(\mathcal{P}_{\text{EOF}}) \subseteq \mathcal{P}$  e  $G(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}_{\text{EOF}}$ .

Observe que a transformação  $F$  apenas copia os valores das variáveis de  $y$  que estão no conjunto VP. Assim, pela forma que definimos a formulação LP,  $F(y)$  pertence a  $\mathcal{P}$ . Portanto, para todo  $y \in \mathcal{P}_{\text{EOF}}$ , temos que  $F(y) \in \mathcal{P}$ .

Observe que  $G$  copia os valores das variáveis de  $s$  que estão no conjunto VP. Para as variáveis em  $(\text{VP}_{\text{EOF}} \setminus \text{VP})$ ,  $G$  calcula seus valores utilizando as restrições (3.9) e (3.11). Portanto, para todo  $s \in \mathcal{P}$ , temos que  $G(s) \in \mathcal{P}_{\text{EOF}}$ .

Agora, vamos demonstrar que as transformações  $F$  e  $G$  são inversas. Para tal vamos mostrar que o valor das respectivas componentes em  $y$  e  $(G \circ F)(y)$ , e também  $s$  e  $(F \circ G)(s)$ , são iguais.

Seja  $y \in \mathcal{P}_{\text{EOF}}$ , vamos analisar o valor das componentes do vetor  $(G \circ F)(y)$ .

Para  $\omega$ , temos  $G(F(y))^\omega = F(y)^\omega = \omega$ .

Para  $z_{uv} \in \text{VP}$ , temos  $G(F(y))_{uv}^z = F(y)_{uv}^z = z_{uv}$ . Para  $z_{uv} \notin \text{VP}$ , temos  $G(F(y))_{uv}^z = 1 - F(y)_{vu}^z = 1 - z_{uv}$ . Como  $z_{uv} + z_{vu} = 1$ , temos  $G(F(y))_{uv}^z = z_{uv}$ .

Para  $uv \in \bar{E}$ , temos  $G(F(y))_{uv}^x = F(y)_{uv}^x = x_{uv}$ . Para  $uv \in E$  e  $z_{uv} \in \text{VP}$ , temos que  $G(F(y))_{uv}^x = F(y)_{uv}^z = z_{uv}$ . Como  $x_{uv} = z_{uv}$  pela restrição de orientação de arestas, temos  $G(F(y))_{uv}^x = x_{uv}$ . Para  $uv \in E$  e  $z_{uv} \notin \text{VP}$ , temos que  $G(F(y))_{uv}^x = 1 - F(y)_{vu}^z = 1 - z_{vu}$ . Como  $x_{uv} = z_{uv}$  e  $z_{uv} + z_{vu} = 1$ , temos  $G(F(y))_{uv}^x = x_{uv}$ .

Portanto,  $(G \circ F)(y) = y$ .

Seja  $s \in \mathcal{P}$ , vamos analisar o valor das componentes do vetor  $(F \circ G)(s)$ .

Para  $\omega$ , temos  $F(G(s))^\omega = G(s)^\omega = \omega$ . Para  $z_{uv} \in \text{VP}$ , temos  $F(G(s))_{uv}^z = G(s)_{uv}^z = z_{uv}$ . Para  $uv \in \bar{E}$ , temos  $F(G(s))_{uv}^x = G(s)_{uv}^x = x_{uv}$ .

Portanto,  $(F \circ G)(s) = s$ .

□

Observe que para escolhas distintas do conjunto VP, obtemos poliedros distintos e afim-isomórficos entre si.

Algumas consequências do afim-isomorfismo entre poliedros são exibidas na Seção 2.2.

## 4.2 Introdução ao estudo poliédrico

Nas seções a seguir, nós iremos investigar o poliedro  $\mathcal{P}$  e, através da relação de afim-isomorfismo, iremos determinar a dimensão, desigualdades válidas e facetas do poliedro  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$ .

Justificamos nossa preferência em trabalhar com poliedro  $\mathcal{P}$  pelo menor número de variáveis e a relativa flexibilidade que teremos na escolha de quais variáveis preservar em VP.

No decorrer de nossas demonstrações, iremos adotar o conjunto VP que nos permita maior naturalidade na interpretação das relações matemáticas em estudo. Por exemplo, nas demonstrações de facetas, iremos adotar VP de modo a conter as variáveis existentes na desigualdade em interesse.

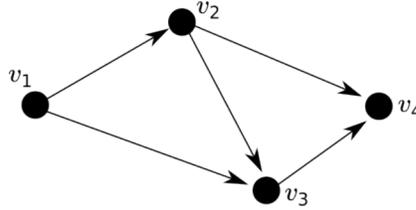
Ainda buscando facilitar a exposição dos nossos estudos, em algumas desigualdades para o poliedro  $\mathcal{P}$  que exibiremos, é possível que apareçam variáveis que foram eliminadas, ou seja, não pertencem ao conjunto VP utilizado. Formalmente, deveríamos substituir essas variáveis por expressões em função das variáveis em VP, utilizando as restrições adequadas.

Por exemplo, seja  $\{u, v, w\} \subseteq V(G)$ , um conjunto VP tal que  $z_{uv}, z_{uw} \notin \text{VP}$  e  $z_{vw} \in \text{VP}$ . Como  $z_{uv}, z_{uw} \notin \text{VP}$ , temos que  $z_{vu}, z_{wu} \in \text{VP}$ . Assim, a desigualdade  $z_{uv} + z_{vw} \leq z_{uw} + 1$  é formalmente expressada por  $(1 - z_{vw}) + z_{vw} \leq (1 - z_{wu}) + 1$ .

Vamos particionar as soluções em  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  na forma  $s = (\omega, x, z)^\top$ , onde  $x$  corresponde as variáveis do tipo  $x_{uv}$  e  $z$  as variáveis do tipo  $z_{uv}$ .

Uma forma eficiente de exibir uma solução inteira viável  $s = (\omega, x, z)^\top$  em  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$  é exibir a ordem modelada nas variáveis do tipo  $z$  e definir as variáveis em  $x$ , como constantes ou em função das variáveis em  $z$ . Diremos que uma ordem total  $\rho$  sobre  $V$  define  $z$  quando, para todo  $u, v \in V$ , se  $u \prec v$  então  $z_{uv} = 1$ . Além disso, diremos que uma ordem parcial  $\rho$  define  $z$ , caso exista alguma ordem total  $\rho^t$  tal que  $\rho^t$  define  $z$  e  $\rho \subseteq \rho^t$ .

Por exemplo, seja  $G = C_4$  com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $s = (\omega, x, z)^\top$  uma solução inteira viável com  $\rho = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$  definindo  $z$ ,  $x_{uv} := z_{uv}$  para todo  $uv \neq v_1v_4$  e  $x_{v_1v_4} := 0$ . Podemos ver na Figura 5 a cordalização orientada representada por  $s$ , ou seja,  $\text{Cord}(s)$ .

Figura 5 –  $\text{Cord}(s)$ 

O teorema a seguir afirma que a triangulação mínima para gerar uma cordalização de  $G$  que admita uma ordem  $\rho$  como esquema perfeito é fornecida pelo Algoritmo 2, que discutimos na Seção 3.5 página 23.

**Teorema 4.2.1** (Rose, Tarjan e Lueker [27]). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $\rho$  uma ordem sobre  $V$  e  $G_\rho = (V, E_\rho)$  a cordalização de  $G$  por  $\rho$ , obtida pelo Algoritmo 2 na página 23. Se  $H = (V, F)$  é uma cordalização de  $G$  onde  $\rho$  é esquema perfeito, temos que  $E_\rho \subseteq F$ .*

Uma caracterização das arestas em  $G_\rho$  pode ser vista no Teorema 4.2.2.

**Teorema 4.2.2** (Rose, Tarjan e Lueker [27]). *Um par  $v_1v_i$  é aresta em  $G_\rho$  se, somente se, existe um caminho  $P = [v_1, \dots, v_i]$  cujos vértices internos precedem ambos  $v_1$  e  $v_i$ , ou seja, para todo  $u \in V(P)$ , temos  $u \prec_\rho v_1$  e  $u \prec_\rho v_i$ .*

Assim, se  $uv$  é aresta em  $G_\rho$ , então qualquer cordalização que admita  $\rho$  como esquema perfeito possui a aresta  $uv$ . Logo, em qualquer solução inteira viável  $s = (\omega, x, z)$  com  $\rho$  definindo  $z$ , temos que  $uv$  deve estar presente em  $\text{Cord}(s)$  na forma dos arcos  $uv$  ou  $vu$ , dependendo da precedência entre  $u$  e  $v$ , ou seja,  $x_{uv} = z_{uv}$ .

Em várias situações futuras, irá nos interessar apenas identificar variações específicas nos valores de incógnitas presentes em uma face, ou seja, vetores viáveis que se diferenciam apenas por um conjunto apropriado de variáveis. Isso será feito para demonstrar que os coeficientes dessas variáveis, na desigualdade que induz a face, são nulos ou se relacionam por uma determinada equação.

Nas faces consideradas, não tratamos o coeficiente associado a variável  $\omega$ . Isto decorre do fato de que, supondo  $F = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}$  a face em questão e  $s = (\omega, x, z)^\top \in F$ , podemos obter uma nova solução  $s' = (\omega + 1, x, z)^\top$ . Assim, temos  $\pi^\top (s' - s) = \pi^\omega = 0$ .

Observe que podemos utilizar quaisquer majorantes para  $\omega$  a fim de obter as variações desejadas em  $\omega$ , visto que  $\omega$  possui apenas restrições de limite inferior.

### 4.3 Dimensão

Investiguemos a dimensão do poliedro  $\mathcal{P}$ , ou equivalentemente, do poliedro  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$ .

Note que  $|\text{VP}| = 2\bar{m} + \binom{n}{2} + 1$ . Nós mostraremos que  $\mathcal{P}$  possui dimensão plena e, portanto, a  $\dim \mathcal{P} = 2\bar{m} + \binom{n}{2} + 1$ .

**Lema 4.3.1.**  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{|\text{VP}|}$  possui dimensão plena.

*Demonstração.* Seja  $\prec$  uma ordem qualquer. Iremos tomar VP contendo as variáveis  $z_{uv}$  tal que  $u \prec v$ . Vamos demonstrar que se

$$\mathcal{P} \subseteq H := \{s \in \mathbb{R}^{|\text{VP}|} : \pi^\top s = \pi_0\}, \quad (4.1)$$

então  $\pi = \vec{0}$  e  $\pi_0 = 0$ , ou seja,  $\mathcal{P}$  não está contido em nenhum hiperplano e, portanto,  $\mathcal{P}$  possui dimensão plena.

a)  $\forall uv \in \bar{E}, \pi_{uv}^x = 0$ .

Seja  $z$  dada pela ordem total  $p = \langle u, v, v_3, \dots, v_n \rangle$ ,  $x_{rs} = z_{rs}$  para toda não aresta diferente de  $uv$ . Obtemos duas soluções viáveis para  $\mathcal{P}$  distintas apenas pela variável  $x_{uv}$ , onde  $x_{uv} = 0$  em uma e  $x_{uv} = 1$  em outra. Logo, temos que  $\pi_{uv}^x = 0$ .

b)  $\forall uv (u \prec v), \pi_{uv}^z = 0$ .

Seja  $p_1 = \langle u, v, v_3, \dots, v_n \rangle$ , e  $p_2 = \langle v, u, v_3, \dots, v_n \rangle$ ,  $x_{rs} = z_{rs}$  para  $rs \neq uv$ , com  $s_1^z$  e  $s_2^z$ , dados respectivamente pelas ordens  $p_1$  e  $p_2$

– Se  $uv \in \bar{E}$ , defina  $s_{1uv}^x = s_{2uv}^x = 0$ , assim  $s_1$  e  $s_2 \in \mathcal{P}$  e diferem em apenas uma componente, pois  $s_{2uv}^z = 0$ . Logo,  $\pi^\top (s_1 - s_2) = \pi_{uv}^z = 0$ .

– Se  $uv \in E$ , observe que  $s_1$  e  $s_2 \in \mathcal{P}$  e diferem nas componentes  $x_{uv}$  e  $z_{uv}$ , contudo  $uv \in E$ , assim  $x_{uv}$  não está presente em  $\mathcal{P}$ . Logo,  $\pi_{uv}^z = 0$ .

□

**Lema 4.3.2.**  $\dim \mathcal{P}_{\text{EOF}} = 2\bar{m} + \binom{n}{2} + 1$ .

*Demonstração.* Pelo Corolário 2.2, temos que  $\dim \mathcal{P}_{\text{EOF}} = \dim \mathcal{P}$ . Já que  $\mathcal{P}$  possui dimensão plena, concluímos que

$$\dim \mathcal{P}_{\text{EOF}} = |\text{VP}| = 2\bar{m} + \binom{n}{2} + 1 \quad (4.2)$$

□

#### 4.4 Facetas básicas

Nesta seção apresentaremos uma coletânea de desigualdades que induzem facetas em  $\mathcal{P}$ .

Devido a simplicidade dessas desigualdades, nós iremos apresentá-las como um único resultado no Teorema 4.4.1. Mostraremos que estas desigualdades são válidas para  $\mathcal{P}$ . As demonstrações de que elas induzem facetas podem ser obtidas no apêndice.

**Teorema 4.4.1** (Facetas Básicas). *As seguintes desigualdades são válidas e induzem faceta em  $\mathcal{P}$ .*

- (a)  $x_{uv} \geq 0$  induz faceta, para todo  $uv \in \bar{E}$ .
- (b)  $z_{uv} \geq 0$  induz faceta se, e somente se,  $uv \in E$  e  $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$ .
- (c)  $z_{uv} \leq 1$  induz faceta se  $uv \in E$  e  $N(u) \setminus \{v\} \subseteq N(v)$ .
- (d)  $z_{uv} + z_{vw} \leq z_{uw} + 1$  induz faceta para todo  $\{u, v, w\} \subseteq V$ .
- (e)  $x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{vw}$  induz faceta para todo  $uv, uw, vw \in \bar{E}$ .
- (f)  $z_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{vw}$  induz faceta para todo  $uv \in E$  e  $uw, vw \in \bar{E}$ .
- (g)  $z_{uw} + x_{wu} \geq x_{vw}$  induz faceta para todo  $uv \in E$  e  $uw, vw \in \bar{E}$ .
- (h)  $z_{vu} + x_{vw} \geq z_{vw}$  induz faceta para todo  $uv, uw \in E$  e  $vw \in \bar{E}$ .

Vamos argumentar a validade das desigualdades do Teorema 4.4.1.

As desigualdades nos itens (a) à (e) são viáveis, pois são restrições da relaxação linear da formulação  $\text{LP}_{\text{EOF}}$ .

Como  $x_{uv} = z_{uv}$  para  $uv \in E$ , a desigualdade no item (f) é equivalente a  $x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{vw}$ , a qual é uma restrição da formulação  $\text{LP}_{\text{EOF}}$ . Portanto, a desigualdade no item (f) é válida.

Analisando as possíveis atribuições 0-1 para as variáveis na desigualdade (g), percebemos que a única atribuição que tornaria a desigualdade inválida é  $(z_{uw}, x_{wu}, x_{vw}) = (0, 0, 1)$ . Contudo, essa atribuição não é possível em  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$ , pois teríamos  $w$  precedendo ambos  $u$  e  $v$  com  $x_{vu} = x_{vw} = 1$  e, portanto, pela restrição 3.13, deveríamos ter  $x_{wu} = 1$ ; o que é uma contradição.

Analisando as possíveis atribuições 0-1 para as variáveis na desigualdade (h), percebemos que a única atribuição que tornaria a desigualdade inválida é  $(z_{vu}, x_{vw}, z_{vw}) = (0, 0, 1)$ . Contudo, essa atribuição não é possível em  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$ , pois teríamos  $u$  precedendo ambos  $v$  e  $w$  com  $x_{uv} = x_{uw} = 1$  e, portanto, pela restrição 3.13, deveríamos ter  $x_{vw} = 1$ ; o que é uma contradição.

As demonstrações de que essas desigualdades válidas induzem faceta em  $\mathcal{P}$  estão disponíveis no apêndice (A).

### 4.5 Facetas geradas por Caminhos Induzidos

Nesta seção e nas seguintes, apresentaremos desigualdades que foram desenvolvidas a partir de observações sobre subgrafos específicos em  $G$ . Iremos demonstrar que elas são válidas para  $\mathcal{P}$  e verificaremos o fato de induzirem faceta.

Em cada uma dessas seções, apresentaremos essas observações e as desigualdades consequentes. Além disso, iremos demonstrar que são válidas e que induzem faceta.

Seja  $P = [v_1, v_2, \dots, v_q]$  um caminho em  $G$  e  $\rho$  uma ordem tal que  $v_2 \prec_\rho v_1 \prec_\rho v_q$ . Seja  $v_i$  com  $i \in \{3, \dots, q\}$  o primeiro vértice posterior a  $v_1$  pela ordem  $\rho$  no caminho. Pelo Teorema 4.2.2 temos que a aresta  $v_1v_i \in G_\rho$ . Podemos descrever esta observação pela desigualdade em 4.3.

**Lema 4.5.1.** *Seja  $P = [v_1, v_2, \dots, v_q]$  um caminho em  $G$ , a desigualdade*

$$\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1v_i} \geq z_{v_1v_q} + z_{v_2v_1} - 1 \quad (4.3)$$

*é válida para  $\mathcal{P}$ .*

*Demonstração.* Suponha que existe uma solução inteira  $s \in \mathcal{P}$  para qual a desigualdade é inválida. Analisando as atribuições 0-1 possíveis para variáveis na desigualdade, observamos que a única atribuição que torna a desigualdade inválida é  $\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1v_i} = 0$  e  $z_{v_1v_q} = z_{v_2v_1} = 1$ . Assim, temos que  $v_2 \prec_\rho v_1 \prec_\rho v_q$  e não existe qualquer arco na forma  $v_1v_i$  com  $i \in \{3, \dots, q\}$  em  $\text{Cord}(s)$ . Portanto, temos uma contradição, já que pelo Teorema 4.2.2 alguma aresta  $v_1v_i$  para algum  $i \in \{3, \dots, q\}$  está em  $G_\rho$ . □

Vamos denotar por  $\mathcal{F}$  a face induzida pela desigualdade 4.3.

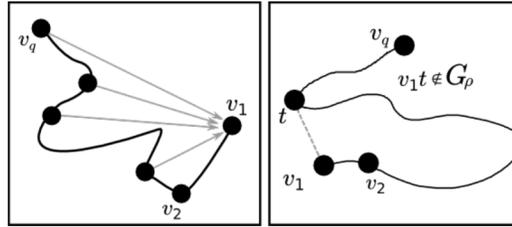
$$\mathcal{F} := \left\{ s \in \mathcal{P} : \sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1v_i} = z_{v_1v_q} + z_{v_2v_1} - 1 \right\} \quad (4.4)$$

Seja  $P = [v_1, v_2, \dots, v_q]$  com  $q \geq 3$  um caminho induzido em  $G$ . Vamos definir  $\rho(k)$  para  $k \in \{2, \dots, q\}$  como a ordem sobre  $V$  tal que os vértices em  $V(P)$  precedem todos os demais vértices de  $G$  e estão em ordem crescente dos seus índices, exceto pelo vértice  $v_1$  que é imediatamente posterior aos vértices  $v_k$ . Por exemplo, para  $q = 4$  temos  $\rho(4) = \langle v_2, v_3, v_4, v_1 \rangle$ ,  $\rho(3) = \langle v_2, v_3, v_1, v_4 \rangle$  e  $\rho(2) = \langle v_2, v_1, v_3, v_4 \rangle$ .

Observe que se o vértice  $v_1$  for posterior a todos os demais vértices do caminho, não existe nenhum arco partindo de  $v_1$  para qualquer outro  $v_i$ , com  $i \in \{3 \leq i \leq q\}$ .

Observe também que se existe no máximo um vértice  $t \in V(P) \setminus \{v_2\}$  que preceda  $v_1$ , não existe nenhum caminho de  $v_1$  a qualquer outro vértice  $v_i$ , com  $i \in \{3 \leq i \leq q\}$ , cujos vértices internos precedam ambos  $v_1$  e  $v_i$ , portanto, pelo Lema 4.2.2,  $v_1v_i \notin G_\rho$ . A Figura 6 ilustra essas observações.

Figura 6 – Observações sobre  $v_1$



No Lema 4.5.2, exibimos alguns vetores baseados nas observações anteriores e nas ordens  $\rho(k)$ . Demonstramos que estão contidos na face  $\mathcal{F}$ , quando  $P$  é um caminho induzido em  $G$ . Os vetores são construídos de forma que cada solução  $s = (\omega, x, z)^\top$  tenha  $z$  definido por uma ordem  $\rho$ , dentre as que exibiremos, e que as variáveis em  $x$  sejam definidas conforme cada ordem.

**Lema 4.5.2.** *Seja  $P = [v_1, v_2, \dots, v_q]$  com  $q \geq 3$  um caminho induzido em  $G$ . Os vetores descritos pelas seguintes ordenações estão em  $\mathcal{F}$ , caso  $P$  seja um caminho induzido em  $G$ :*

1. Para  $\rho = \langle S_1, S_2 \cup V(P) \setminus \{v_1\}, S_3, v_1 \rangle$  com  $S_1, S_2, S_3 \subseteq V(G) \setminus V(P)$  subconjuntos disjuntos de vértices, definimos

$$x_{uv} := z_{uv}, \quad \{u, v\} \subseteq V(G) \quad (4.5)$$

2. Para  $\rho = \langle \{v_1, t\}, V(P) \setminus \{v_1, t\} \rangle$  com  $t \in V(P) \setminus \{v_2, v_q\}$ , definimos

$$x_{uv} := \begin{cases} z_{uv}, & \{u, v\} \not\subseteq V(P) \\ z_{uv}, & \{u, v\} \subseteq V(P) \text{ e } uv \in G_\rho \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.6)$$

3. Para  $\rho(k)$  com  $k \in \{2, \dots, q\}$ , definimos

$$x_{uv} := \begin{cases} z_{uv}, & \{u, v\} \not\subseteq V(P) \\ z_{uv}, & \{u, v\} \subseteq V(P) \text{ e } uv \in G_\rho \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.7)$$

*Demonstração.* Primeiro, vamos demonstrar que os vetores descritos pelos itens acima são válidos para  $\mathcal{P}$ .

Observe que os vetores descritos nos itens 1, 2 e 3 têm suas partes  $z$  definidas por ordens. Assim, temos que eles respeitam as restrições 3.9 e 3.10.

Para os vetores descritos no item 1, temos um arco entre qualquer par de vértices orientado do vértice de menor precedência para o de maior. Portanto, as restrições 3.11, 3.12 e 3.13 são respeitadas.

Para os vetores descritos nos itens 2 e 3, todas as variáveis  $x_{uv}$  com um dos vértices  $u$  ou  $v$  fora do caminho são definidas iguais a  $z_{uv}$ . As variáveis  $x_{uv}$  com ambos  $u$  e  $v$  no caminho são definidas iguais a  $z_{uv}$ , se forem arestas de  $G_\rho$ , e 0, caso contrário. Portanto, as restrições 3.11 e 3.12 são respeitadas.

Para os vetores descritos nos itens 2 e 3, vamos analisar a restrição 3.13 e mostrar que ela é respeitada. Observe que, na ordem exibida no item 2, todos os vértices no caminho precedem os vértices que estão fora do caminho.

Para os casos seguintes mostraremos que o segundo membro da restrição 3.13 é pelo menos 1. Como o máximo valor do primeiro membro também é 1, a restrição está satisfeita.

Sejam  $u, v, w \in V$  com  $u \prec v \prec w$ . Se  $|\{u, v, w\} \cap V(P)| \leq 2$ , temos  $w \notin V(P)$ , portanto  $x_{vw} = 1$ . Se  $|\{u, v, w\} \cap V(P)| = 3$  e  $x_{uv} = x_{uw} = 1$ , então pelo Teorema 4.2.2 temos que  $vw \in G_\rho$ . Logo,  $x_{vw} = z_{vw} = 1$ . Logo, a restrição 3.13 é respeitada.

Finalmente, vamos provar que os vetores descritos pertencem a face  $\mathcal{F}$ , quando  $P$  é caminho induzido.

Nos vetores descritos pela ordem no item 1, o vértice  $v_1$  é posterior aos demais vértices no caminho. Assim,  $x_{v_1 v_i} = 0$  para todo  $i \in \{3 \leq i \leq q\}$ ,  $z_{v_2 v_1} = 1$  e  $z_{v_1 v_q} = 0$ , logo  $\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} = z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 = 0$ .

Nos vetores descritos pelas ordens no item 2, a única aresta em  $G_\rho$  na forma  $v_1 v_i$  com  $v_1 \prec v_i$  e  $i \in \{3, \dots, q\}$  é a aresta  $v_1 v_2$ . Como  $v_1 \prec v_2$  e  $v_1 \prec v_q$ , temos  $z_{v_2 v_1} = 0$  e  $z_{v_1 v_q} = 1$  e portanto  $\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} = z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 = 0$ .

Nos vetores descritos pelas ordens no item 3, para  $k < q$ , a única aresta em  $G_\rho$  na forma  $v_1 v_i$  com  $v_1 \prec v_i$  e  $i \in \{3, \dots, q\}$  é a aresta  $v_1 v_k$ . Como  $v_2 \prec v_1$  e  $v_1 \prec v_q$ , temos  $z_{v_2 v_1} = 1$  e  $z_{v_1 v_q} = 1$  e portanto  $\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} = z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 = 1$ . Para  $k = q$  não existe aresta em  $G_\rho$  na forma  $v_1 v_i$  com  $v_1 \prec v_i$  e  $i \in \{3, \dots, q\}$ , temos  $z_{v_2 v_1} = 1$  e  $z_{v_1 v_q} = 0$  e portanto  $\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} = z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 = 0$ .

□

**Teorema 4.5.3** (Caminhos Induzidos). *Seja  $P = [v_1, v_2, \dots, v_q]$  com  $q \geq 3$  um caminho em  $G$ , a face*

$$\mathcal{F} = \left\{ s \in \mathcal{P} : \sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} = z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 \right\} \quad (4.8)$$

*é faceta se, e somente se,  $P$  é um caminho induzido em  $G$ .*

*Demonstração.* Vamos demonstrar que se  $P$  é um caminho induzido em  $G$ , então  $\mathcal{F}$  é faceta. Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P} : \sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} - z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} = -1\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que para todo  $rs \in \bar{E} \setminus \{v_1v_i : i \in \{3, \dots, q\}\}$  temos  $\pi_{rs}^x = 0$ . Vamos exibir dois vetores viáveis  $s^1 = (\omega^1, x^1, z^1)$  e  $s^2 = (\omega^2, x^2, z^2)$  pertencentes a face que se diferenciam apenas pelo valor da variável  $x_{rs}$ .

a) Vamos demonstrar para  $r = v_1$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle v_1, V(P) - v_1 \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.6). Observe que  $rs \notin G_\rho$ , portanto podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $x_{rs}^1 = 0$  e  $x_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $r \neq v_1$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle r, V(P) - v_1, v_1 \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.5). Observe que  $rs \notin G_\rho$ , portanto podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $x_{rs}^1 = 0$  e  $x_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que para todo  $\{r, s\} \subseteq V$  e  $rs \notin \{v_1v_q, v_2v_1\}$ , temos que  $\pi_{rs}^z = 0$ .

Vamos exibir dois vetores viáveis  $s^1 = (\omega^1, x^1, z^1)$  e  $s^2 = (\omega^2, x^2, z^2)$  pertencentes à face que se diferenciam pelo valor da variável  $z_{rs}$ .

a) Vamos demonstrar para  $v_1 \notin \{r, s\}$ .

Suponha que  $rs \in E$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle r, s, V(P) - v_1, v_1 \rangle$  e  $\rho_2 = \langle s, r, V(P) - v_1, v_1 \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.6). Assim, obtemos dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{rs}$ , com  $z_{rs}^1 = 0$  e  $z_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $v_1 \in \{r, s\}$ .

– Vamos demonstrar para  $r = v_1, s \in V(P) \setminus \{v_2, v_q\}$ .

Observe que  $rs \notin E$ , pois  $P$  é caminho induzido. Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v_1, s, V(P) \setminus \{v_1, s\} \rangle$  e  $\rho_2 = \langle s, v_1, V(P) \setminus \{v_1, s\} \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.6). Observe que  $rs \notin G_{\rho_1}$  e  $rs \notin G_{\rho_2}$ , portanto podemos fixar  $x_{rs}^1 = x_{rs}^2 = 0$ . Obtemos dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{rs}$ , com  $z_{rs}^1 = 0$  e  $z_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^z = 0$ .

– Se  $r = v_1, s \notin V(P)$ .

Suponha que  $rs \in E$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle V(P) - v_1, v_1, s \rangle$  e  $\rho_2 = \langle V(P) - v_1, s, v_1 \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.6). Obtemos dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{rs}$ , com  $z_{rs}^1 = 0$  e  $z_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^z = 0$ .

Suponha que  $rs \notin E$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v_1, s, V(P) - v_1 \rangle$  e  $\rho_2 = \langle s, v_1, V(P) - v_1 \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em

função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.6). Observe que  $rs \notin G_{\rho_1}$  e  $rs \notin G_{\rho_2}$ , portanto podemos fixar  $x_{rs}^1 = x_{rs}^2 = 0$ . Obtemos dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{rs}$ , com  $z_{rs}^1 = 0$  e  $z_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^z = 0$ .

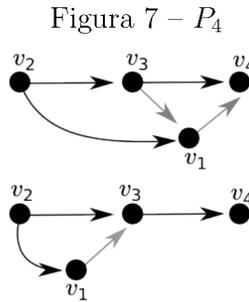
Assim, podemos expressar  $\mathcal{H}$  como

$$\mathcal{H} = \left\{ s \in \mathcal{P} : \sum_{3 \leq i \leq q} \pi_{v_1 v_i}^x x_{v_1 v_i} - \pi_{v_1 v_q}^z z_{v_1 v_q} - \pi_{v_2 v_1}^z z_{v_2 v_1} = -\pi_0 \right\}.$$

Agora, vamos demonstrar que para todo  $v_1 v_i$  com  $i \in \{3, \dots, q\}$  temos  $\pi_{v_1 v_i}^x = -\pi_{v_1 v_q}^z$ .

- a) Se  $i = q$ , então  $v_1$  é posterior a todos os demais vértices do caminho. Assim, temos  $\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} = 0$  e  $z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 = 0$ . Portanto,  $s \in \mathcal{F}$ .
- b) Se  $i \in \{3, \dots, q-1\}$  temos  $v_1$  é posterior a todos os demais vértices do caminho. Assim, temos  $\sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} = 0$  e  $z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 = 0$ . Portanto,  $s \in \mathcal{F}$ .

Sejam as ordens  $\rho(k)$  e  $\rho(k+1)$  como descrito pelo Lema 4.5.2 no item 3. Sejam  $z^1$  e  $z^2$  definidos pelas ordens  $\rho(k)$  e  $\rho(k+1)$ , respectivamente, e  $x^1$  e  $x^2$  definidos respectivamente em função de  $z^1$  e  $z^2$  pela Equação 4.7. Podemos ver um exemplo para  $G = P_4$  na Figura 7.



Avaliando a  $\pi^\top(s^2 - s^1)$  para  $k \in \{2, \dots, q-2\}$  temos  $\pi_{v_1 v_{k+1}}^z + \pi_{v_1 v_{k+1}}^x - \pi_{v_{k+1} v_1}^x - \pi_{v_1 v_{k+2}}^x = 0$ . Observe que para todo  $i \in \{3, \dots, q\}$ , temos  $\pi_{v_i v_1}^x = 0$ , para todo  $i \in \{3, \dots, q-1\}$  temos  $\pi_{v_1 v_i}^z = 0$ . Nós podemos simplificar as equações e obter as seguintes identidades:

$$\begin{cases} \pi_{v_1 v_i}^x = \pi_{v_1 v_{i+1}}^x, & \text{para todo } i \in \{3, \dots, q-1\} \\ \pi_{v_1 v_q}^x = -\pi_{v_1 v_q}^z \end{cases} \quad (4.9)$$

Portanto, para todo  $v_1 v_i$  com  $i \in \{3, \dots, q\}$  temos  $\pi_{v_1 v_i}^x = -\pi_{v_1 v_q}^z$ .

Agora, vamos provar a seguinte identidade  $\pi_{v_2 v_1}^z = \pi_{v_1 v_q}^z$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \rho(q-1) = \langle v_2, \dots, v_{q-1}, v_1, v_q \rangle$  e  $\rho_2 = \langle v_1, \dots, v_{q-1}, v_2, v_q \rangle$  com  $\rho_2$  difere de  $\rho_1$  apenas pela permuta dos vértices  $v_1$  e  $v_2$ . Observe que  $\rho_2$  é uma das ordens descritas pelo Lema 4.5.2 no item 2. Sejam  $z^1$  e  $z^2$  definidos pelas ordens  $\rho_1$  e  $\rho_2$ ,

respectivamente, e  $x^1$  e  $x^2$  definidos respectivamente em função de  $z^1$  e  $z^2$  pela Equação 4.7.

Avaliando a diferença  $\pi^\top s^2 - \pi^\top s^1$ , temos que

$$\pi_{v_2 v_1}^z + \sum_{i \in \{1, \dots, q-1\}} \pi_{v_2 v_i}^z + \pi_{v_{q-1} v_1}^x + \pi_{v_1 v_q}^x - \pi_{v_{q-1} v_2}^x - \pi_{v_2 v_q}^x = 0. \quad (4.10)$$

Eliminando os coeficientes nulos, temos que  $\pi_{v_2 v_1}^z = -\pi_{v_1 v_q}^x$ . Como  $\pi_{v_1 v_q}^x = -\pi_{v_1 v_q}^z$ , concluímos que  $\pi_{v_2 v_1}^z = \pi_{v_1 v_q}^z$ .

Assim, temos o seguinte sistema linear entre os coeficientes não-nulos de  $\pi$ .

$$\begin{cases} \pi_{v_1 v_i}^x = \pi_{v_1 v_{i+1}}^x, & \text{para todo } i \in \{3, \dots, q-1\} \\ \pi_{v_1 v_q}^x = -\pi_{v_1 v_q}^z \\ \pi_{v_2 v_1}^z = \pi_{v_1 v_q}^z \end{cases} \quad (4.11)$$

Podemos definir  $\alpha = -\pi_{v_2 v_1}^z$  e resolver o sistema em 4.11, através de substituições obtendo  $\alpha = \pi_{v_1 v_i}^x$  para todo  $i \in \{3, \dots, q\}$  e  $\alpha = -\pi_{v_2 v_1}^z = -\pi_{v_1 v_q}^z$ .

Finalmente, temos que

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} = \left\{ s \in \mathcal{P} : \alpha \left( \sum_{3 \leq i \leq q} x_{v_1 v_i} - z_{v_1 v_q} - z_{v_2 v_1} \right) = -\pi_0 \right\}.$$

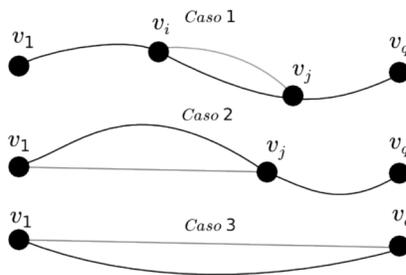
Assim, temos a desigualdade  $\pi^\top \leq \pi_0$  é um múltiplo não-nulo da Desigualdade 4.3, portanto  $\mathcal{F}$  é faceta se  $P$  é caminho induzido em  $G$ .

Agora, vamos demonstrar que se  $P$  não é caminho induzido em  $G$ , então  $\mathcal{F}$  não é faceta.

Seja  $P = [v_1, \dots, v_q]$  um caminho em  $G$ . Suponha que  $P$  não é caminho induzido em  $G$ , logo existe uma corda  $v_i v_j \in E \setminus E(P)$  com  $v_i v_j \in V(P)$ .

Podemos ver os possíveis casos na Figura 8.

Figura 8 – Casos 1, 2 e 3



a) Se  $v_i \neq v_1$ . Seja  $P' = [v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_q]$ . Podemos descrever a desigualdade indutora da face  $\mathcal{F}$  como combinação linear de desigualdades válidas:

$$\frac{\sum_{k \in \{3, \dots, v_i\} \cup \{v_j, \dots, v_q\}} x_{v_1 v_k} \geq z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1}{x_{v_1 v_k} \geq 0, \quad \forall k \in \{i+1, \dots, j-1\}} \quad \frac{\sum_{i \in \{3, \dots, q\}} x_{v_1 v_i} \geq z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1}{}$$

- b) Se  $v_i = v_1, v_j \neq v_q$ . Sejam os caminhos  $P_1 = [v_1, v_j, \dots, v_q]$ ,  $P_2 = [v_1, \dots, v_j]$ . Podemos descrever a desigualdade indutora da face  $\mathcal{F}$  como combinação linear de desigualdades válidas:

$$\begin{array}{r} \sum_{k \in \{j+1, \dots, q\}} x_{v_1 v_k} \geq z_{v_1 v_q} + z_{v_j v_1} - 1 \\ \sum_{k \in \{3, \dots, j\}} x_{v_1 v_k} \geq z_{v_1 v_j} + z_{v_2 v_1} - 1 \\ \hline \sum_{k \in \{3, \dots, q\}} x_{v_1 v_k} \geq z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 \end{array}$$

- c)  $v_i = v_1, v_j = v_q$  Observe que  $x_{v_1 v_q} = z_{v_1 v_q}$ , pois  $v_1 v_q \in E$ , assim

$$\sum_{k \in \{3, \dots, q\}} x_{v_1 v_k} \geq z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 \iff z_{v_1 v_q} + \sum_{k \in \{3, \dots, (q-1)\}} x_{v_1 v_k} \geq z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1$$

que pode ser expresso como combinação das seguintes desigualdades válidas:

$$\begin{array}{r} z_{v_1 v_q} \geq z_{v_1 v_q} \\ x_{v_1 v_k} \geq 0 \\ 0 \geq z_{v_2 v_1} - 1 \\ \hline z_{v_1 v_q} + \sum_{k \in \{3, \dots, (q-1)\}} x_{v_1 v_k} \geq z_{v_1 v_q} + z_{v_2 v_1} - 1 \end{array} \quad \forall k \in \{3, \dots, q-1\}$$

Logo, se  $P$  não é caminho induzido em  $G$ , então  $\mathcal{F}$  não é faceta. □

#### 4.6 Facetas geradas por Buracos

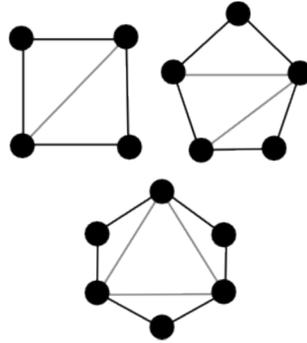
Nesta seção iremos introduzir uma família de desigualdades baseadas em buracos de  $G$ . Demonstramos que as desigualdades nessa família são válidas para  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}(\mathcal{P})$  e determinamos as condições sob quais elas induzem facetas.

Podemos ver na Figura 9 algumas cordalizações para buracos de tamanho 4, 5 e 6, respectivamente. Note que nessas cordalizações cada buraco de tamanho  $k$  foi subdividido em ciclos de tamanho 3, através do acréscimo de  $k - 3$  cordas. O Lema 4.6.1 demonstra que as triangulações associadas a essas cordalizações são minimais.

**Lema 4.6.1.** *Seja  $C = (V(C), E)$  um ciclo induzido em  $G$  e  $H$  uma cordalização de  $G$  que admite  $\rho$  como esquema perfeito. Seja  $H[V(C)] = (V(C), E')$  o subgrafo induzido pelos vértices de  $C$  na cordalização e  $F = E' \setminus E$  a triangulação do ciclo na cordalização. Temos que  $|F| \geq |C| - 3$ .*

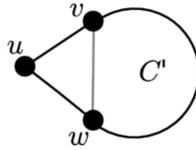
*Demonstração.* Vamos demonstrar que para todo ciclo induzido  $C$  em  $G$ , temos  $|F| \geq |C| - 3$ .

Figura 9 – Cordalizações para buracos



Para  $|C| = 3$ , temos  $|F| \geq 0$ . Suponha que para todo  $C$  com  $|C| \leq k$  tenhamos  $|F| \geq |C| - 3$ . Se  $|C| = k + 1$ , seja  $u$  o vértice de  $C$  com menor precedência em  $\rho$  e  $v, w$  seus vizinhos em  $C$  como na Figura 10. Como  $\rho$  é esquema perfeito em  $H$ ,  $u$  é simplicial no subgrafo induzido pelos vértices posteriores a ele em  $\rho$ , portanto  $vw \in F$ . Assim, temos um novo ciclo,  $C' = (C - u) + vw$ , com  $|C'| = k$ , portanto pela hipótese de indução temos que  $|F| \geq (k - 3) + 1 = |C| - 3$ .

Figura 10 –  $H[V(C)]$



□

Baseado no Lema 4.6.1, desenvolvemos a desigualdade 4.12.

$$\sum_{uv \in \bar{E}(C)} x_{uv} \geq |C| - 3. \tag{4.12}$$

Sabemos que toda solução inteira em  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}(\mathcal{P})$  corresponde a uma cordalização orientada  $\text{Cord}(s)$  [26]. Portanto, a validade da desigualdade 4.12 para  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}(\mathcal{P})$  é consequência direta do Lema 4.6.1. Denotaremos por  $\mathcal{F}$  a face induzida pela desigualdade 4.12 em  $\mathcal{P}$ .

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P} : \sum_{uv \in \bar{E}(C)} x_{uv} = |C| - 3\} \tag{4.13}$$

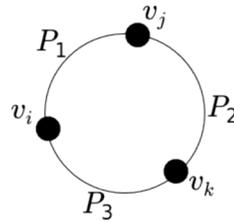
Além disso, perceba que em qualquer cordalização de um buraco, os últimos 3 vértices, segundo qualquer esquema perfeito, induzem uma clique. Provamos essa observação no Lema 4.6.2.

**Lema 4.6.2.** *Sejam  $C$  um ciclo em  $G$ ,  $\{v_i, v_j, v_k\} \subseteq V(C)$  e  $H$  uma cordalização de  $G$  que admite a ordem  $\rho = \langle V(C) \setminus \{v_i, v_j, v_k\}, v_i, v_j, v_k \rangle$  como esquema perfeito. Temos que  $H[\{v_i, v_j, v_k\}]$  é uma clique.*

*Demonstração.* Vamos demonstrar que  $v_i v_j, v_i v_k$  e  $v_j v_k$  são arestas em  $G_\rho$ . Assim, pelo Lema 4.2.1 teremos que elas são arestas em  $H$ .

Sejam  $P_1 = [v_i, \dots, v_j]$ ,  $P_2 = [v_j, \dots, v_k]$  e  $P_3 = [v_j, \dots, v_k]$  caminhos em  $C$  disjuntos em vértices internos como na Figura 11. Observe que os vértices internos ao caminho  $P_1$  precedem os vértices  $v_i$  e  $v_j$ , portanto  $v_i v_j \in G_\rho$  pelo Lema 4.2.2. De forma analoga, podemos demonstrar que  $v_j v_k$  e  $v_i v_k$  são arestas em  $G_\rho$  utilizando respectivamente os caminhos  $P_2$  e  $P_3$ .

Figura 11 – Caminhos entre  $v_i, v_j$  e  $v_k$



□

Utilizando os Lemas 4.6.1 e 4.6.2, podemos deduzir a estrutura de alguns vetores em  $\mathcal{F}$ . Exibiremos no Lema 4.6.3 os vetores em  $\mathcal{F}$  que utilizaremos em nossas demonstrações.

**Lema 4.6.3.** *Seja  $C$  um buraco em  $G$ . Suponha que para todo  $\{a, b\} \subseteq V \setminus V(C)$  temos  $|N_C(a) \cap N_C(b)| \leq 3$  e que  $G[N_C(a)]$  e  $G[N_C(b)]$  são caminhos induzidos em  $G$ . Vamos construir algumas soluções viáveis de forma que cada solução  $s = (\omega, x, z)$  tenha  $z$  definido por uma ordem  $\rho$  dentre as que exibiremos e que as variáveis em  $x$  sejam definidas como descrito a seguir.*

Seja  $k, l \in V$ , vamos definir

$$x_{uv} := \begin{cases} z_{uv}, & \{u, v\} \subseteq (V(C) \cup \{k, l\}) \text{ e } uv \in G_\rho \\ z_{uv}, & \{u, v\} \not\subseteq V(C) \cup \{k, l\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Os vetores descritos pelas seguintes ordens estão em  $\mathcal{F}$ , quando para todo  $a, b \in V \setminus V(C)$  temos  $|N_C(a) \cap N_C(b)| \leq 3$  e não existe aresta  $uv$  com  $u \in N_C(a) \setminus N_C(b)$  e  $v \in N_C(b) \setminus N_C(a)$ . Além disso, se  $kl \notin E$  temos que  $kl \notin G_\rho$ .

(a) Para  $k, l \in V(C)$  seja

$$\rho = \langle k, l, V(C) \setminus \{k, l\} \rangle. \quad (4.15)$$

(b) Para  $k, l \notin V(C)$  seja

$$\rho = \langle V(C) \setminus (N_C(k) \cup N_C(l)), N_C(k) \setminus N_C(l), k, N_C(l) \setminus N_C(k), l, N_C(k) \cap N_C(l) \rangle. \quad (4.16)$$

(c) Para  $k \notin V(C)$  e  $l \in V(C)$  seja

$$\rho = \langle V(C) \setminus (N_C(k) \cup N_C(l) \cup \{l\}), N_C(k) \setminus N_C(l), k, l, N_C(l) \rangle. \quad (4.17)$$

*Demonstração.* Primeiro, vamos demonstrar que os vetores descritos acima estão em  $\mathcal{P}$ .

Observe que os vetores descritos têm suas variáveis  $z$  definidas por ordens. Assim, eles respeitam as restrições 3.9 e 3.10.

Nos vetores descritos todas as variáveis  $x_{uv}$  com um dos vértices  $u$  ou  $v$  não pertencentes ao buraco são definidas iguais a  $z_{uv}$ . As variáveis  $x_{uv}$  com ambos  $u$  e  $v$  pertencentes ao buraco são definidas iguais a  $z_{uv}$ , se forem arestas de  $G_\rho$ , e 0, caso contrário. Portanto, as restrições 3.11 e 3.12 são respeitadas.

Vamos analisar a restrição 3.13 para os vetores descritos e mostrar que ela é respeitada.

Seja  $\{u, v, w\} \subseteq V$ . Para os casos seguintes mostraremos que se  $x_{uv} = x_{uw} = 1$  temos que  $x_{vw}$  ou  $x_{wv}$  são iguais a um. Assim, a desigualdade 3.13 é respeitada.

Lembramos que nas ordens exibidas os vértices em  $V(C) \cup \{k, l\}$  precedem todos os demais vértices de  $G$ .

Se  $w \notin V(C) \cup \{k, l\}$  ou  $w \in V(C) \cup \{k, l\}$  e  $v \notin V(C) \cup \{k, l\}$ , temos que  $x_{vw}$  ou  $x_{wv}$  são iguais a um pela Equação 4.14. Se  $w \in V(C) \cup \{k, l\}$  e  $v \in V(C) \cup \{k, l\}$ , temos que  $u \in V(C)$ , pois  $u \prec v$ . Além disso, como  $x_{uv} = x_{uw} = 1$  pela equação 4.14 temos  $uv, uw \in G_\rho$ , portanto  $vw \in G_\rho$ . Assim,  $x_{vw}$  ou  $x_{wv}$  são iguais a um. Logo, a restrição 3.13 é respeitada.

Vamos demonstrar que nos vetores descritos se  $kl \notin E$  temos que  $kl \notin G_\rho$ .

Nas ordens exibidas não existe um caminho de  $k$  a  $l$  em  $G$  com vértices internos precedendo ambos  $k$  e  $l$ , pois a vizinhança de  $l$  em  $C$  é posterior a  $k$ . Logo, se  $kl \notin E$  temos que  $kl \notin G_\rho$ .

Finalmente, vamos provar que os vetores descritos pertencem a face  $\mathcal{F}$ , quando para todo  $a, b \in V \setminus V(C)$  temos  $|N_C(a) \cup N_C(b)| \leq 3$ ,  $G[N_C(a)]$  e  $G[N_C(b)]$  são caminhos induzidos em  $G$ .

Seja  $\rho$  uma ordem descrita no item (a). Nos vetores descritos pelo item (a), as variáveis  $x_{uv} = 1$  correspondem a arestas em  $G_\rho$ . Vamos demonstrar que o número de cordas adicionadas a  $C$  em  $G_\rho$  é exatamente  $|C| - 3$ .

Note que os vértices em  $C$  precedem os demais vértices do grafo. Assim, quando o Algoritmo 2 tiver visitado cada vértice de  $C$  na ordem, nenhuma nova corda será adicionada ao grafo até o fim da execução.

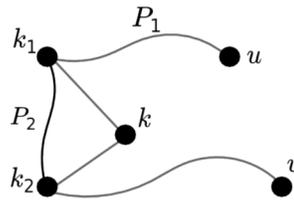
Vamos analisar a construção de  $G_\rho$  pelo o Algoritmo 2, enquanto ele percorre os vértices de  $C$  na ordem  $\rho$ . Sejam  $u$  o vértice de  $C$  com menor precedência ainda não visitado e  $v, w$  seus únicos vizinhos em  $C$ . Se  $vw \notin G_\rho$  o Algoritmo 2 adiciona a corda  $vw$  em  $G_\rho$  e passa ao próximo vértice. Observe que somente para os últimos três vértices não existe corda a ser adicionada. Logo, adicionamos exatamente  $|C| - 3$  cordas.

Para os vetores descritos nos itens (b) e (c), vamos demonstrar que, para qualquer par de vértices  $uv$ , se  $uv \notin G_\rho$ , então não existe um caminho de  $u$  a  $v$  com o vértice interno  $k$  ( $l$ ) e cujos vértices internos precedem  $u$  e  $v$ . Assim, a adição dos vértices  $k$  e  $l$  ao grafo não altera o número de cordas em  $G_\rho$ . Logo, o número de cordas em  $G_\rho$  é  $|C| - 3$ .

Iremos realizar a demonstração por contraposição, ou seja, se existe um caminho de  $u$  a  $v$  com o vértice interno  $k$  ( $l$ ) e cujos vértices internos precedem  $u$  e  $v$ , então existe um caminho com as mesmas propriedades, exceto por não conter o vértice  $k$  ( $l$ ).

Seja  $\{u, v\} \subseteq N_C(l)$ . Se  $u, v \in N_C(k) \cap N_C(l)$ , então pelo Lema 4.6.2 temos que  $uv \in G_\rho$ , independente da existência de caminhos de  $u$  a  $v$ , onde  $k$  é vértice interno e cujos vértices internos precedem  $u$  e  $v$ . Suponha  $u \in N_C(l) \setminus N_C(k)$ . Seja  $P_1$  um caminho de  $u$  a  $v$  com o vértice interno  $k$  e cujos vértices internos precedem  $u$  e  $v$ . Sabemos que  $u$  precede os vértices em  $N_C(k) \cap N_C(l)$ . Como  $k$  é vértice interno no caminho, existem ao menos dois vértices  $k_1$  e  $k_2$  tais que  $k_1, k_2 \in N_C(k) \setminus N_C(l)$ . Observe na Figura 12 esses vértices.

Figura 12 – Caminho de  $u$  a  $v$



Por hipótese, os vértices em  $N_C(k) \setminus N_C(l)$  formam um caminho, portanto podemos tomar  $P_2$  um caminho de  $k_1$  a  $k_2$  com  $V(P_2) \subseteq N_C(k) \setminus N_C(l)$ . Assim, existe um caminho  $P_3$  de  $u$  a  $v$  cujos vértices internos precedem  $u$  e  $v$  que não passa pelo vértice  $k$ .

□

Utilizando as soluções viáveis em  $\mathcal{F}$  que exibimos, vamos demonstrar no Teorema 4.6.4 que  $\mathcal{F}$  é faceta.

**Teorema 4.6.4** (Faceta de Buraco). *Seja  $C$  um ciclo em  $G$ . A face  $\mathcal{F}$  é faceta se  $C$  não contém corda, para todo  $\{a, b\} \subseteq V \setminus V(C)$ , temos  $|N_C(a) \cap N_C(b)| \leq 3$ , e ambos  $G[N_C(a)]$ ,  $G[N_C(b)]$  são caminhos induzidos em  $G$ .*

*Demonstração (Se).* Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P} : \sum_{uv \in E(C)} x_{uv} = |C| - 3\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que para todo  $wt \in \bar{E}(G) \setminus \bar{E}(C)$  temos  $\pi_{rs}^x = 0$ .

Nós iremos exibir dois vetores viáveis  $s^1 = (\omega^1, x^1, z^1)$  e  $s^2 = (\omega^2, x^2, z^2)$  pertencentes à face que se diferenciam apenas pelo valor da variável  $x_{rs}$ .

a) Vamos mostrar para  $r \in V(C), s \notin V(C)$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle r, V(C) - r, s \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Observe que  $\rho$  pertence às ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (a). Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Observe que  $rs \notin G_\rho$ , portanto podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $x_{rs}$ , com  $x_{rs}^1 = 0$  e  $x_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^x = 0$ .

b) Vamos mostrar para  $r \notin V(C), s \in V(C)$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle V(C) \setminus (N_C(s) \cup \{s\}), r, s, N_C(s) \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Observe que  $\rho$  pertence às ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (c). Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Observe que  $rs \notin G_\rho$ , portanto podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $x_{rs}$ , com  $x_{rs}^1 = 0$  e  $x_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^x = 0$ .

c) Vamos mostrar para  $r, s \notin V(C)$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle V(C) \setminus (N_C(r) \cup N_C(s)), N_C(r) \setminus N_C(s), r, N_C(s) \setminus N_C(r), s, N_C(r) \cap N_C(s) \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Observe que  $\rho$  pertence às ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (b). Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Observe que  $rs \notin G_\rho$ , portanto podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $x_{rs}$ , com  $x_{rs}^1 = 0$  e  $x_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que para todo  $\{r, s\} \subseteq V$  temos que  $\pi_{rs}^z = 0$ .

Nós iremos exibir dois vetores viáveis  $s^1 = (\omega^1, x^1, z^1)$  e  $s^2 = (\omega^2, x^2, z^2)$  pertencentes à face que se diferenciam pelo valor da variável  $z_{rs}$ .

a) Vamos mostrar para  $r, s \in V(C)$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle r, s, V(C) \setminus \{r, s\} \rangle$  e  $\rho_2 = \langle s, r, V(C) \setminus \{r, s\} \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Observe que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  pertencem as ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (a) e que  $rs \in G_\rho$  se, e somente se,  $rs \in E$ . Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Se  $rs \notin E$  podemos fixar  $x_{rs}^1 = x_{rs}^2 = 0$ . Assim, podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{rs}$ , com  $z_{rs}^1 = 0$  e  $z_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^z = 0$ .

b) Vamos mostrar para  $r \notin V(C), s \in V(C)$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle V(C) \setminus (N_C(r) \cup N_C(s) \cup \{s\}), N_C(r) \setminus N_C(s), r, s, N_C(s) \rangle$  e  $\rho_2 = \langle V(C) \setminus (N_C(r) \cup N_C(s) \cup \{s\}), N_C(r) \setminus N_C(s), s, r, N_C(s) \rangle$  definindo  $z^1$  e

$z^2$ , respectivamente. Observe que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  pertencem às ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (c) e que  $rs \in G_\rho$  se, e somente se,  $rs \in E$ . Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Se  $rs \notin E$  podemos fixar  $x_{rs}^1 = x_{rs}^2 = 0$ . Assim, podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{rs}$ , com  $z_{rs}^1 = 0$  e  $z_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^z = 0$ .

c) Vamos mostrar para  $r, s \notin V(C)$ .

Suponha  $rs \in E$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle V(C), r, s \rangle$  e  $\rho_2 = \langle V(C), s, r \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Observe que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  pertencem às ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (a). Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Assim, podemos obter dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{rs}$ , com  $z_{rs}^1 = 0$  e  $z_{rs}^2 = 1$ . Logo,  $\pi_{rs}^z = 0$ .

Para demonstrar que  $\pi_{rs}^z = 0$ , quando  $r, s \notin V(C)$  e  $rs \notin E$ , nós iremos utilizar o Lema 4.6.5 que será provado após o término dessa demonstração.

**Lema 4.6.5.** *Para todo  $uv, wy \in \bar{E}(C)$ , temos  $\pi_{uv}^x = \pi_{wy}^x$ .*

Vamos ao caso em que  $rs \notin E$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle V(C) \setminus (N_C(r) \cup N_C(s)), N_C(r) \setminus N_C(s), r, N_C(s) \setminus N_C(r), s, N_C(r) \cap N_C(s) \rangle$  e  $\rho_2 = \langle V(C) \setminus (N_C(r) \cup N_C(s)), N_C(s) \setminus N_C(r), s, N_C(r) \setminus N_C(s), r, N_C(r) \cap N_C(s) \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Observe que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  pertencem às ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (b) e que  $rs \in G_\rho$  se, e somente se,  $rs \in E$ . Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Podemos fixar  $x_{rs}^1 = x_{rs}^2 = 0$ . Assim, obtemos a equação

$$\pi^\top(s_1 - s_2) = \sum_{t \in N_C(s) \setminus N_C(r) \cup \{s\}} \sum_{w \in N_C(r) \setminus N_C(s)} \pi_{wt}^z + \sum_{t \in N_C(s) \setminus N_C(r)} \pi_{rt}^z + \pi_{rs}^z + \sum_{ij \in \bar{E}(C)} \pi_{ij}^x - \sum_{pq \in \bar{E}(C)} \pi_{pq}^x = 0. \quad (4.18)$$

Podemos simplificar essa equação eliminando os coeficientes de  $\pi$  já demonstrados nulos e o Lema 4.6.5. Assim, ficamos com

$$(|C| - 3)\pi_{uv}^x - (|C| - 3)\pi_{uv}^x + \pi_{rs}^z = \pi_{rs}^z = 0, \text{ para algum } uv \in \bar{E}(C). \quad (4.19)$$

Assim, para todo  $r, s \notin V(C)$  temos  $\pi_{rs}^z = 0$ .

Seja  $\alpha = \pi_{uv}^x$  para algum  $uv \in \bar{E}(C)$ . Eliminando os coeficientes nulos em  $\pi$  e utilizando o Lema 4.6.5 podemos expressar  $\mathcal{H}$  como

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} = \left\{ s \in \mathcal{P} : \alpha \left( \sum_{uv \in \bar{E}(C)} x_{uv} \right) = \pi_0 \right\}$$

Assim, temos que desigualdade  $\pi^\top \leq \pi_0$  é um múltiplo não-nulo da desigualdade 4.3, portanto  $\mathcal{F}$  é faceta se  $C$  não contém corda, para todo  $\{a, b\} \subseteq V \setminus V(C)$  temos  $|N_C(a) \cap N_C(b)| \leq 3$ ,  $G[N_C(a)]$  e  $G[N_C(b)]$  são caminhos induzidos em  $G$ .

□

Vamos exibir a demonstração do Lema 4.6.5.

*Demonstração.* Primeiro, vamos demonstrar que  $\pi_{rs}^x = \pi_{sr}^x$  para todo  $uv \in \bar{E}(C)$ .

Seja  $\{r, s, t\} \subseteq V(C)$  e as ordens  $\rho_1 = \langle V(C) \setminus \{r, s, t\}, r, s, t \rangle$  e  $\rho_2 = \langle V(C) \setminus \{r, s, t\}, s, r, t \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Observe que  $\rho_1$  e  $\rho_2$  pertencem as ordens descritas pelo Lema 4.6.3 no item (a). Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{rs}^z + \pi_{rs}^x - \pi_{sr}^x = 0$  e simplificando a equação temos  $\pi_{rs}^x = \pi_{sr}^x$ .

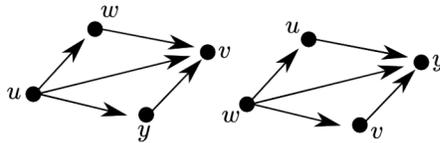
Vamos demonstrar que para quaisquer  $uv, wy \in \bar{E}(C)$ , temos  $\pi_{uv}^x = \pi_{wy}^x$ .

Suponha  $\{u, v\} \cap \{w, y\} = \emptyset$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle V(C) \setminus \{u, v, w, y\}, u, w, y, v \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle V(C) \setminus \{u, v, w, y\}, w, u, v, y \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x^1$  e  $x^2$  em função de  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, pela equação (4.14). Observe na Figura 13 o esquema dessas soluções. Temos que

$$\pi^\top(s_1 - s_2) = \pi_{wy}^x - \pi_{uv}^x + \pi_{uw}^z + \pi_{yv}^z + \pi_{uw}^x - \pi_{wu}^x + \pi_{yv}^x - \pi_{vy}^x = 0 \quad (4.20)$$

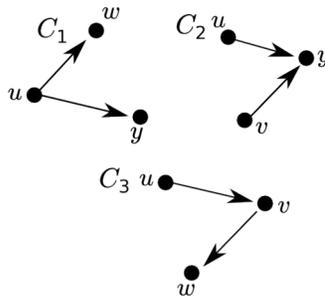
e simplificando a equação obtemos  $\pi_{wy}^x = \pi_{uv}^x$ .

Figura 13 – Representação das  $s^1$  e  $s^2$



Suponha que  $\{u, v\} \cap \{w, y\} \neq \emptyset$ . Nós podemos dividir esse tópico em 3 casos como na Figura 14.

Figura 14 – Casos



No caso 1, temos  $v = w$ ,  $u \prec w$  e  $u \prec y$ . As ordens  $\rho_1 = \langle V(C) \setminus \{u, w, y, k\}, u, w, k, y \rangle$  e  $\rho_2 = \langle V(C) \setminus \{u, w, y, k\}, u, y, k, w \rangle$  para um  $k$  qualquer, de forma semelhante ao item anterior, nos levam a relação  $\pi_{wy}^x = \pi_{uv}^x$ .

No caso 2, temos  $v = y$ ,  $u \prec w$ ,  $v \prec w$ . Usamos as ordens  $\rho_1 \langle V(C) \setminus \{u, v, k, w\}, u, v, k, w \rangle$  e  $\rho_2 \langle V(C) \setminus \{u, v, k, w\}, v, u, k, w \rangle$  para obter a relação  $\pi_{uv}^x = \pi_{wv}^x$ .

No caso 3, temos  $v = y$ ,  $u \prec w \prec v$ . Sabemos que  $\pi_{uv}^x = \pi_{vu}^x$  para todo  $uv \in \bar{E}(C)$ . Assim, pelo caso 2, temos  $\pi_{uv}^x = \pi_{wv}^x = \pi_{vw}^x$ .

□

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, analisamos o problema de determinar bons limites inferiores para a largura em árvore de um grafo e, particularmente, analisamos a formulação linear inteira denominada formulação por Ordem de Eliminação e o poliedro descrito pelo fecho convexo dos seus pontos inteiros. Com o objetivo de obter a melhor descrição possível desse poliedro através de desigualdades indutoras de faceta.

Conseguimos obter resultados parciais que contribuem com a determinação de decomposições em árvore utilizando a formulação por Ordem de Eliminação. Mostramos uma simplificação para a formulação por Ordem de Eliminação com um número reduzido de variáveis e de restrições.

Mostramos que o poliedro associado à simplificação que apresentamos é afim-isofórmico ao poliedro da formulação por Ordem de Eliminação e demonstramos para um número significativo de desigualdades que induzem facetas.

### **Trabalhos Futuros**

Vamos apresentar algumas direções para dar continuidade ao trabalho desenvolvido e obter novos resultados.

No tocante à determinação de facetas, percebemos que as desigualdades denominadas *fence* [28] são válidas para o poliedro em estudo, contudo nem sempre induzem faceta. Todavia, uma direção a ser examinada é a utilização da técnica de *lifting* [16] para a partir delas determinar novas desigualdades que induzam faceta independentemente de condições.

Outra direção a ser examinada é o desenvolvimento e implementação de algoritmos de corte baseado nas desigualdades que apresentamos.

## REFERÊNCIAS

- 1 ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. Graph Minors. I. Excluding a forest. *J. Combin. Theory, Ser. B* 35, p. 39–61, 1983.
- 2 ROBERTSON, N.; SEYMOUR, P. Graph Minors. II Algorithmic aspects of tree-width. *J. Algorithm* 7, p. 309–322, 1986.
- 3 ARNBORG, S. Efficient algorithms for combinatorial problems on graph with bound decomposability - a survey. *BIT* 25, p. 2–23, 1985.
- 4 ARNBORG, S.; PROSKUROWSKI, A. Linear time algorithms for NP-hard problems on graph embedded in k-trees. *Discrete Appl. Math.* 23, p. 11–24, 1989.
- 5 BODLAENDER, H. L. A tourist guide through treewidth. *Acta Cybernet* 11, p. 1–21, 1993.
- 6 CARVALHO, L. E. X. Decomposição em Árvore de Grafos com Largura Limitada - Uma Pesquisa Algorítmica. *Departamento de Ciências da Computação - DC/UFC, CE, Brasil*, p. 34, 2002.
- 7 KOSTER, A. M. C. A.; WOLLE, T.; BODLAENDER, H. L. Degree-based treewidth lower bounds. *Proceedings of the 4th International Workshop on Experimental and Efficient Algorithms*, 2005.
- 8 RAMACHANDRAMURTHI, S. A lower bound for treewidth and its consequences. *Proceedings of the 20th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, 1995.
- 9 LUCENA, B. A new bound for tree-width using maximum cardinality search. *SIAM Journal on Discrete Mathematics. Vol. 16, No. 3*, p. 345–353, 2003.
- 10 BODLAENDER, H.; KOSTER, A. M. C. A.; WOLLE, T. Contraction and treewidth lower bounds. *Procesdings 12th Annual European Symposium on Algorithms*, 2004.
- 11 BODLAENDER, H.; KOSTER, A. M. C. A.; WOLLE, T. Contraction and treewidth lower bounds. *Technical Report UU-CS-2004-34.*, 2004.
- 12 DIESTEL, R. *Graph Theory*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005.
- 13 BODLAENDER, H. L.; KOSTER, A. M. Treewidth Computation II. Lower Bounds. *Technical Report UU-CS-2010-022*, p. 3, 2010.
- 14 WAKABAYASHI, Y.; FERREIRA, C. E. *Combinatória Poliédrica e Planos-de-Corte Faciais*. 2010. Apostila eletrônica. Acessado em: 29 Jun. 2014. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~yw/2010/progint/livro-update2010.pdf>.
- 15 MARTÍ, R.; REINELT, G. The Linear Ordering Problem: Exact and Heuristic Methods in Combinatorial Optimization. *Applied Mathematical Sciences*, v. 175, p. 188, 2010.
- 16 XAVIER, Á. S. *Geração de Facetas para Politopos de Conjuntos Independentes*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará (UFC), 2011.

- 17 CARVALHO, L. E. X. *Decomposição em Árvore de Grafos com Largura Limitada - Uma Pesquisa Algorítmica*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Ciência da Computação - DC/UFC, 2002.
- 18 BODLAENDER, H. L. Necessary edges in k-chordalizations of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2003.
- 19 CLAUTIAUX, F. et al. New lower and upper bounds for graph treewidth. *Proceedings of the 2th International Workshop on Experimental and Efficient Algorithms*, 2003.
- 20 TARJAN, R. E.; YANNAKAKIS, M. Simple linear time algorithms to test chordiality of graph, test acyclicity of graphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs. *SIAM Journal on Computing*, 1984.
- 21 LUCENA, B. *Dynamic Programming, Tree-Width, and Computation on Graphical Models*. Tese (Doutorado) — Brown University, Providence, RI, USA, 2002.
- 22 BODLAENDER, H. L. Discovering Treewidth. *Proc. of 31st Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science*, 2005.
- 23 DIRAC, G. A. On rigid circuit graphs. *Anh. Math. Sem. Univ. Hamburg Vol. 25*, p. 71–76, 1961.
- 24 BLAIR, J. R.; PEYTON, B. W. An Introduction to Chordal Graph and Clique Trees. *Mathematical Sciences Section Oak Ridge National Laboratory*, 1992.
- 25 CAMPOS, V. A.; SILVA, A. S. F. A 0-1 integer formulation for the tree decomposition problem. In: *19th International Symposium on Mathematical Programming*. [S.l.: s.n.], 2006.
- 26 KOSTER, A. M. C. A.; BODLAENDER, H. Private Communication.
- 27 ROSE, D. J.; TARJAN, R. E.; LUEKER., G. S. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs. *SIAM J. COMPUT*, v. 5, n. 2, p. 267–271, Junho 1976.
- 28 MARTÍ, R.; REINELT, G. The Linear Ordering Problem: Exact and Heuristic Methods in Combinatorial Optimization. *Applied Mathematical Sciences*, v. 175, p. 122, 2010.

APÊNDICE

## APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÕES DE FACETAS BÁSICAS

Neste apêndice, vamos exibir as demonstrações relativas ao Lema 4.4.1.

**Lema A.0.6.**  $x_{uv} \geq 0$  induz faceta, para todo  $uv \in \bar{E}$ .

*Demonstração.* Seja  $uv \in \bar{E}$ . Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : x_{uv} = 0\}$ .

Vamos demonstrar que  $\mathcal{F}$  é faceta.

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : x_{uv} = 0\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E}(G) \setminus \{uv\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ .

Frequentemente, iremos exibir dois vetores viáveis  $s^1 = (\omega^1, x^1, z^1)$  e  $s^2 = (\omega^2, x^2, z^2)$ , pertencentes a face, que se diferenciam de forma proposital.

a) Vamos demonstrar para  $a = v, b = u$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle v, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \neq vu$ , e  $x_{vu}^1 = 1, x_{vu}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vu}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = u, b \neq v$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, b, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \notin \{vu, ub\}$ ,  $x_{vu}^1 = x_{vu}^2 = 0$  e  $x_{ub}^1 = 1, x_{ub}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a \neq v, b = u$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle v, a, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vu, au\}$ ,  $x_{vu}^1 = x_{vu}^2 = 0$  e  $x_{au}^1 = 0, x_{au}^2 = 1$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{au}^x = 0$ .

d) Vamos demonstrar para  $a = v, b \neq u$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle v, b, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb\}$  e  $x_{vb}^1 = 0, x_{vb}^2 = 1$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vb}^x = 0$ .

e) Vamos demonstrar para  $a \neq u, b = v$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, a, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uv, av\}$ ,  $x_{uv}^1 = 0, x_{uv}^2 = 0$  e  $x_{av}^1 = 1, x_{av}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{av}^x = 0$ .

f) Vamos demonstrar para  $\{a, b\} \cap \{u, v\} = \emptyset$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, b, v, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que, para todo  $\{a, b\} \subseteq V$ , temos que  $\pi_{ab}^z = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $\{a, b\} \cap \{u, v\} = \emptyset$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, v, u \rangle, \rho_2 = \langle b, a, v, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$ , para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ab}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ba}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = v, b = u$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v \rangle, \rho_2 = \langle v, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uv, vu\}$ . Definimos  $x_{uv}^1 = x_{vu}^2 = 0$  e  $x_{vu}^1 = x_{uv}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vu}^z = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a = v, b \neq u$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, b, u \rangle, \rho_2 = \langle b, v, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb, bv\}$ . Se  $vb \in \bar{E}$ , definimos  $x_{vb}^1 = x_{bv}^2 = 0$  e  $x_{bv}^1 = x_{vb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

d) Vamos demonstrar para  $a = u, b \neq v$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, u, b \rangle, \rho_2 = \langle v, b, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{vu}^1 = x_{vu}^2 = 0, x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vu, ub, bu\}$ . Se  $ub \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ub}^1 = x_{bu}^2 = 0$  e  $x_{bu}^1 = x_{ub}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^z = 0$ .

Resta provar que  $\pi_0 = 0$ .

Como  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P} : x_{uv} = 0\} \subseteq H = \{s \in \mathcal{P} : \pi_{uv}^x x_{uv} = \pi_0\}$ , temos que  $\pi_0 = 0$ .

Portanto, demonstramos que a desigualdade  $\pi^\top \leq \pi_0$  é um múltiplo não-nulo da desigualdade  $x_{uv} \geq 0$  para  $uv \in \bar{E}$ , portanto  $\mathcal{F}$  é faceta. □

**Lema A.0.7.**  $z_{uv} \geq 0$  induz faceta se, e somente se,  $uv \in E$  e  $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar que a desigualdade  $z_{uv} \geq 0$  induz faceta se, e somente se,  $uv \in E$  e  $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$ .

Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} = 0\}$ .

Vamos demonstrar que se  $uv \in E$  e  $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$ , então  $\mathcal{F}$  é faceta.

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} = 0\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $a \notin \{u, v\}$  e  $bneqa$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, v, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = u, b \neq v$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle v, u, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Como  $b \notin N(u)$ , temos que  $b \notin N(v)$ , logo  $vb \in \bar{E}$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb, ub\}$ ,  $x_{vb}^1 = x_{vb}^2 = 0$  e  $x_{ub}^1 = 1, x_{ub}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a = v, b \neq u$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle v, u, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb\}$  e  $x_{vb}^1 = 1, x_{vb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vb}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que, para todo  $\{a, b\} \subseteq V$  com  $ab \neq uv$ , temos que  $\pi_{ab}^z = 0$ .

Nós iremos exibir dois vetores viáveis  $s^1 = (\omega^1, x^1, z^1)$  e  $s^2 = (\omega^2, x^2, z^2)$  pertencentes a face que se diferenciam pela variável  $z_{ab}$ .

a) Vamos demonstrar para  $a = u, b \neq v$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, u, b \rangle, \rho_2 = \langle v, b, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb, tv, ub, bu\}$ . Se  $ub \in \bar{E}$ , temos que  $vb \in \bar{E}$  e definimos  $x_{vb}^1 = x_{bv}^1 = 0, x_{vtb}^2 = x_{bv}^2 = 0, x_{ub}^1 = x_{bu}^1 = 0$  e  $x_{ub}^2 = x_{vb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = v, b \neq u$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, b, u \rangle, \rho_2 = \langle b, v, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb, bv\}$ . Se  $vb \in \bar{E}$ , definimos  $x_{vb}^1 = x_{bv}^2 = 0$  e  $x_{bv}^1 = x_{vb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vb}^z = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $\{a, b\} \cap \{u, v\} = \emptyset$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, v, u \rangle, \rho_2 = \langle b, a, v, u \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

Como  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} = 0\} \subseteq H = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi_{uv}^z z_{uv} = \pi_0\}$ , temos que  $\pi_0 = 0$ .

Portanto, provamos que a desigualdade  $\pi^\top \leq \pi_0$  é um múltiplo não-nulo da desigualdade  $z_{uv} \geq 0$  se  $uv \in E$  e  $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$ , portanto  $\mathcal{F}$  é faceta se  $uv \in E$  e  $N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$ .

Resta provar que, se  $uv \in \bar{E}$  ou  $N(v) \setminus (N(u) \cup \{u\}) \neq \emptyset$ , então  $\mathcal{F}$  não é faceta.

a) Mostraremos que se  $uv \notin E$ , temos que  $\mathcal{F}$  não é faceta.

Observe que as seguintes restrições são válidas para  $\mathcal{P}$ .

$$\begin{array}{l} x_{uv} \leq z_{uv}, \quad \text{pois } uv \notin E \\ 0 \leq x_{uv}, \quad \text{trivial} \\ \hline 0 \leq z_{uv} \end{array}$$

Portanto  $z_{uv} \geq 0$  é dominada. Assim, ela não induz faceta.

b) Caso  $uv \in E$  e  $\exists w \in N(v) \setminus (N(u) \cup \{u\})$ , veremos que  $\mathcal{F}$  não é faceta.

Primeiramente, p que a desigualdade  $z_{uv} + x_{uw} \geq z_{uw}$  é válida para o poliedro  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$ .

Suponha, por contradição, que exista uma solução inteira  $s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}}$  tal que  $z_{uv} + x_{uw} < z_{uw}$ . A única atribuição 0-1 para as variáveis dessa desigualdade que a satisfaz é  $(z_{uv}, x_{uw}, z_{uw}) = (0, 0, 1)$ , portanto  $v \prec w \prec v$ . Observe que  $uv, vw \in E$ , portanto  $x_{vu} = x_{vw} = 1$ . Assim, pela restrição 3.13 temos que  $x_{uw} = 1$ ; uma contradição. Logo, a restrição  $z_{uv} + x_{uw} \geq z_{uw}$  é válida  $\mathcal{P}_{\text{EOF}}$ .

Observe que a desigualdade  $-x_{uw} \geq -z_{uw}$  também é válida, pois  $uw \notin E$ , portanto podemos expressar  $z_{uv} \geq 0$  como

$$\frac{z_{uv} + x_{uw} \geq z_{uw}}{-x_{uw} \geq -z_{uw}} \quad . \quad (\text{A.1})$$

$$z_{uv} \geq 0$$

Logo, se  $z_{uv} \geq 0$  induz faceta, então  $uv \in E, N(v) \setminus \{u\} \subseteq N(u)$ .

□

**Lema A.0.8.**  $z_{uv} \leq 1$  induz faceta se, e somente se,  $uv \in E$  e  $N(u) \setminus \{v\} \subseteq N(v)$ .

*Demonstração.* Provaremos que a desigualdade  $z_{uv} \leq 1$  induz faceta se  $uv \in E, N(u) \setminus \{v\} \subseteq N(v)$ .

Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} = 1\}$ .

Vamos demonstrar que se  $uv \in E$  e  $N(u) \setminus \{v\} \subseteq N(v)$ , então  $\mathcal{F}$  é faceta.

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} = 1\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ .

Vamos exibir dois vetores viáveis  $s^1 = (\omega^1, x^1, z^1)$  e  $s^2 = (\omega^2, x^2, z^2)$  pertencentes a face que se diferenciam apenas pela variável  $x_{ab}$ .

a) Vamos demonstrar para  $a \notin \{u, v\}$  e  $b \neq a$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top (s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = v, b \neq u$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Como  $b \notin N(v)$ , temos que  $b \notin N(u)$ , logo  $ub \in \bar{E}$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ub, vb\}$ ,  $x_{ub}^1 = x_{ub}^2 = 0$  e  $x_{vb}^1 = 1, x_{vb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top (s^1 - s^2) = \pi_{vb}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a = u, b \neq v$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ub\}$  e  $x_{ub}^1 = 1, x_{ub}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que para todo  $\{a, b\} \subseteq V$ , com  $ab \neq uv$ , temos  $\pi_{ab}^z = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $\{a, b\} \cap \{u, v\} = \emptyset$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, u, v \rangle, \rho_2 = \langle b, a, u, v \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = u, b \neq v$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, b, v \rangle, \rho_2 = \langle b, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ub, bu\}$ . Se  $ub \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ub}^1 = x_{bu}^2 = 0$  e  $x_{ub}^2 = x_{bu}^1 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^z = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a = v, b \neq u$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, b \rangle, \rho_2 = \langle u, b, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb, bv, ub, bu\}$ . Se  $vb \in \bar{E}$ , temos que  $ub \in \bar{E}$  e definimos  $x_{vb}^1 = x_{bv}^2 = 0, x_{vb}^2 = x_{bv}^1 = 0, x_{ub}^1 = x_{bu}^2 = 0$  e  $x_{ub}^2 = x_{bu}^1 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vb}^z = 0$ .

Como  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P} : z_{uv} = 1\} \subseteq H = \{s \in \mathcal{P} : \pi_{uv}^z z_{uv} = \pi_0\}$ , temos que  $\pi_0 = \pi_{uv}^z$ .

Logo a desigualdade  $\pi^\top \leq \pi_0$  é um múltiplo não nulo da desigualdade  $z_{uv} \leq 1$ , se  $uv \in E$  e  $N(u) \setminus \{v\} \subseteq N(v)$ . Portanto,  $\mathcal{F}$  é faceta se  $uv \in E, N(u) \setminus \{v\} \subseteq N(v)$ . □

**Lema A.0.9.**  $x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}$  induz faceta para todo  $uv, uw, vw \in \bar{E}$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar que a desigualdade  $x_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}$  induz faceta, para todo  $uv, uw, vw \in \bar{E}$ .

Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : x_{uv} + x_{uw} - x_{vw} - x_{wv} = 1\}$ .

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : x_{uv} + x_{uw} - 1 = x_{vw} + x_{wv}\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{uv, uw, vw\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 0$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, b, u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \neq ab$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ .

- Suponha que  $a = u$ . Seja a ordem  $\rho = \langle u, b, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \neq ab$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .
- Suponha que  $a = v$ . Seja a ordem  $\rho = \langle v, u, w, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, vw\}$ ,  $x_{vw}^1 = 0, x_{vw}^2 = 0$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .
- Suponha que  $a = w$ . Seja a ordem  $\rho = \langle w, u, v, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \notin \{ab, wu, wv\}$ ,  $x_{wv}^1 = x_{wv}^2 = 0, x_{wu}^1 = x_{wu}^2 = 0, x_{ab}^1 = 1$  e  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .
- Suponha que  $b \in \{u, v, w\}$ . Seja a ordem  $\rho = \langle a, u, v, w, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \neq ab$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 2$ .

- Suponha que  $ab = vu$ . Seja a ordem  $\rho = \langle v, u, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \notin \{vu, vw\}$ ,  $x_{vw}^1 = x_{vw}^2 = 0$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .
- Suponha que  $ab = wu$ . Seja a ordem  $\rho = \langle w, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \notin \{wv, ab\}$ ,  $x_{wv}^1 = x_{wv}^2 = 0$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que, para todo  $\{a, b\} \subseteq V$ , temos que  $\pi_{ab}^z = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 0$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, u, v, w \rangle, \rho_2 = \langle b, a, u, v, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \notin \{ab, ba\}$ . Se  $vt \in E$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 1$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ .

- Suponha que  $a = u$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle w, u, b, v \rangle, \rho_2 = \langle w, b, u, v \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{wv, wu, ab\}$ ,  $x_{wv}^1 = x_{wv}^2 = 0, x_{wu}^1 = x_{wu}^2 = 0$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 1$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .
- Suponha que  $a = v$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, b, w \rangle, \rho_2 = \langle u, b, v, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $\{p, q\} \subseteq V$ .  
Se  $vb \in E$ , temos  $\pi_{vb}^z = 0$ .

Se  $vb \in \bar{E}$ , obtemos dois vetores viáveis distintos por  $z_{vb} \in \{0, 1\}$  e  $x_{vb} \in \{0, 1\}$ . Assim,  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vb}^z + \pi_{vb}^x - \pi_{bv}^x = 0$ . Como já demonstramos que, para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{uv, uv, vw\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ . Podemos simplificar  $\pi^\top(s^1 - s^2) = 0$ , obtendo  $\pi_{vb}^z = 0$ .

- Suponha que  $a = w$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w, b \rangle, \rho_2 = \langle u, v, b, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $\{c, d\} \subseteq V$ .

Se  $wb \in E$ , temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{wb}^z = 0$ .

Se  $wb \in \bar{E}$ , obtemos dois vetores viáveis distintos por  $z_{wb} \in \{0, 1\}$  e  $x_{wb} \in \{0, 1\}$ . Assim,  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{wb}^z + \pi_{wb}^x - \pi_{bw}^x = 0$ . Como já demonstramos que para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{uv, uv, vw\}$  temos  $\pi_{ab}^x = 0$ . Podemos simplificar  $\pi^\top(s^1 - s^2) = 0$  obtendo  $\pi_{wb}^z = 0$ . Portanto, se  $wb \in \bar{E}$  temos  $\pi_{wb}^z = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 2$ .

- Suponha que  $ab = wv$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, w, v \rangle, \rho_2 = \langle u, v, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uv, vu, vw, wv\}$ . Definimos  $x_{uv}^1 = x_{vu}^2 = 0, x_{vu}^1 = x_{uv}^2 = 0, x_{wv}^1 = x_{vw}^2 = 0, x_{vw}^1 = x_{wv}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .
- Suponha que  $ab = uv$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w \rangle, \rho_2 = \langle v, u, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uv, vu, vw, wv\}$ . Definimos  $x_{uv}^1 = x_{vu}^2 = 0, x_{vu}^1 = x_{uv}^2 = 0, x_{wv}^1 = x_{vw}^2 = 0$  e  $x_{vw}^1 = x_{wv}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .
- Suponha que  $ab = uw$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, w, v \rangle, \rho_2 = \langle w, u, v \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uv, vu, vw, wv\}$ . Definimos  $x_{uw}^1 = x_{wu}^2 = 0, x_{uv}^1 = x_{vu}^2 = 0, x_{wv}^1 = x_{vw}^2 = 0, x_{vw}^1 = x_{wv}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

Agora, vamos demonstrar algumas relações entre os coeficientes não nulos em  $\pi$ .

a) Vamos demonstrar que  $\pi_{uv}^x = \pi_{uw}^x$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \notin \{uv, uv, vw\}$ ,  $(x_{uv}^1, x_{uw}^1, x_{vw}^1) = (1, 0, 0)$  e  $(x_{uv}^2, x_{uw}^2, x_{vw}^2) = (0, 1, 0)$ .

Assim,  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{uv}^x - \pi_{uw}^x = 0$ . Logo,  $\pi_{uv}^x = \pi_{uw}^x$ .

b) Vamos demonstrar que  $\pi_{wv}^x = -\pi_{uv}^x$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, w, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uv, uv, wv\}$ ,  $(x_{uv}^1, x_{uw}^1, x_{wv}^1) = (0, 1, 0)$  e  $(x_{uv}^2, x_{uw}^2, x_{wv}^2) = (1, 1, 1)$ .

Assim, temos que  $\pi^\top(s^1 - s^2) = -\pi_{uv}^x - \pi_{wv}^x = 0$ . Logo,  $\pi_{wv}^x = -\pi_{uv}^x$ .

c) Vamos demonstrar que  $\pi_{uw}^x = -\pi_{vw}^x$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uv, uw, vw\}$ ,  $(x_{uv}^1, x_{uw}^1, x_{vw}^1) = (1, 0, 0)$  e  $(x_{uv}^2, x_{uw}^2, x_{vw}^2) = (1, 1, 1)$ .

Assim temos que  $\pi^\top(s^2 - s^1) = \pi_{uw}^x + \pi_{vw}^x$ . Logo,  $\pi_{uw}^x = -\pi_{vw}^x$ .

Utilizando as igualdades entre as componentes não nulas em  $\pi$  obtemos,

$$-\pi_{vw}^x = \pi_{uv}^x = \pi_{uw}^x = -\pi_{vw}^x$$

o qual nos permiti expressar  $\mathcal{H}$  como,

Finalmente, temos

$$\mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi_{uv}^x \cdot (x_{uv} + x_{uw} - x_{vw} - x_{vw}) = \pi_0\} \quad (\text{A.2})$$

Assim, temos  $\pi_0 = \pi_{uv}^z$  e a inequação de  $H$  é múltiplo da inequação  $F$ . Logo,  $\mathcal{F}$  é faceta. □

**Lema A.0.10.**  $z_{uv} + z_{vw} \leq z_{uw} + 1$  induz faceta, para todo  $\{u, v, w\} \subseteq V$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar que a desigualdade  $z_{uv} + z_{vw} \leq z_{uw} + 1$  induz faceta, para todo  $\{u, v, w\} \subseteq V$ .

Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} + z_{vw} - z_{uw} = 1\}$ .

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} + z_{vw} - z_{uw} = 1\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 0$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, b, u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ .

Suponha que  $a = u$ . Seja a ordem  $\rho = \langle u, b, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ub\}$  e  $x_{ub}^1 = 1, x_{ub}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^x = 0$ .

Suponha que  $a = v$ . Seja a ordem  $\rho = \langle v, b, w, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vb\}$  e  $x_{vb}^1 = 1, x_{vb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vb}^x = 0$ .

Suponha que  $a = w$ . Seja a ordem  $\rho = \langle w, b, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{wb\}$  e  $x_{wb}^1 = 1, x_{wb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{wb}^x = 0$ .

Suponha que  $b \in \{u, v, w\}$ . Seja a ordem  $\rho = \langle a, u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1$ ,  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ .

Suponha  $a = u$ . Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1$ ,  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Suponha  $a = v$ . Seja a ordem  $\rho = \langle v, w, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1$ ,  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Suponha  $a = w$ . Seja a ordem  $\rho = \langle w, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1$ ,  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que, para todo  $\{a, b\} \subseteq V$  com  $ab \notin \{uv, vw, uw\}$ , temos que  $\pi_{ab}^z = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 0$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, u, v, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle b, a, u, v, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ .

Suponha que  $a = u$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, b, v, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle b, u, v, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

Suponha que  $a = v$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, b, w, u \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle v, b, w, u \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

Suponha que  $a = w$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle w, b, u, v \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle b, w, u, v \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

Exibiremos algumas relações entre as componentes não nulas de  $\pi$ .

a) Vamos demonstrar que  $\pi_{uv}^z = -\pi_{uw}^z$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle v, w, u \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Observe que as únicas variáveis distintas são  $(z_{uv}^1, z_{uv}^2) = (1, 1)$  e  $(z_{uv}^2, z_{uv}^1) = (0, 0)$ .

Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{uv}^z + \pi_{uw}^z = 0$ . Logo,  $\pi_{uv}^z = -\pi_{uw}^z$ .

b) Vamos demonstrar que  $\pi_{uw}^z = -\pi_{vw}^z$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w \rangle, \rho_2 = \langle w, u, v \rangle$ , definindo  $z^1, z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Observe que as únicas variáveis distintas são  $(z_{uw}^1, z_{vw}^1) = (1, 1)$  e  $(z_{uw}^2, z_{vw}^2) = (0, 0)$ .

Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{uw}^z + \pi_{vw}^z = 0$ . Logo,  $\pi_{uw}^z = -\pi_{vw}^z$ .

c) Observe que  $\pi_{uv}^z = -\pi_{uw}^z = \pi_{vw}^z$ . Assim,  $\pi_{uv}^z = \pi_{vw}^z$ .

Finalmente, temos

$$\mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi_{uv}^z \cdot (z_{uv} + z_{vw} - z_{uw}) = \pi_0\} \quad (\text{A.3})$$

Assim, temos  $\pi_0 = \pi_{uv}^z$ . Além disso, temos que inequação indutora de  $\mathcal{H}$  é múltiplo não nulo da inequação indutora de  $\mathcal{F}$ . Logo,  $\mathcal{F}$  é faceta.

□

**Lema A.0.11.**  $z_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}$  induz faceta, para todo  $uv \in E$  e  $uw, vw \in \bar{E}$ .

*Demonstração.*  $z_{uv} + x_{uw} - 1 \leq x_{vw} + x_{wv}$  induz faceta, para todo  $uv \in E$  e  $uw, vw \in \bar{E}$ .

Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} + x_{uw} - x_{vw} - x_{wv} = 1\}$ .

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} + x_{uw} - x_{vw} - x_{wv} = 1\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{uw, vw, wv\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 0$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, b, u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ .

Suponha que  $a \in \{u, v, w\}$ . Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, w, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uw, vw, ab\}$ ,  $x_{uw}^1 = 0, x_{vw}^1 = 0, x_{uw}^2 = 0, x_{vw}^2 = 0, x_{ab}^1 = 1$  e  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Suponha que  $b \in \{u, v, w\}$ . Seja a ordem  $\rho = \langle a, u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$ ,  $x_{ab}^1 = 1$  e  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 2$ .

Suponha que  $ab = wu$ . Seja a ordem  $\rho = \langle w, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, wv\}$ ,  $x_{wv}^1 = 0, x_{wv}^2 = 0, x_{ab}^1 = 1$  e  $x_{ab}^2 = 0$ . Obtemos dois vetores viáveis distintos apenas por  $x_{ab} \in \{0, 1\}$ . Logo,  $\pi_{ab}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que, para todo  $\{a, b\} \subseteq V$  com  $ab \notin \{uv\}$ , temos que  $\pi_{ab}^z = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 0$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, u, v, w \rangle, \rho_2 = \langle b, a, u, v, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ .

Suponha que  $a = u$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w, b \rangle, \rho_2 = \langle u, v, b, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

Suponha que  $a \in \{v, w\}$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, \{u, v\}, b \rangle, \rho_2 = \langle u, v, b, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Caso  $ab \in E$ , obtemos dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{wb} \in \{0, 1\}$ . Caso  $ab \in \bar{E}$ , obtemos dois vetores viáveis distintos por  $z_{ab} \in \{0, 1\}$  e  $x_{wb} \in \{0, 1\}$ . Assim,  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z + \pi_{ab}^x - \pi_{ba}^x = 0$ .

Como já demonstramos que, para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{uw, vw, wv\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ . Podemos simplificar  $\pi^\top(s^1 - s^2) = 0$  obtendo  $\pi_{wb}^z = 0$ . Portanto, se  $wb \in \bar{E}$  temos  $\pi_{wb}^z = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 2$ .

Suponha que  $ab = uw$ . Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle w, u, v \rangle, \rho_2 = \langle u, w, v \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{wu, wv, uw, vw\}$ ,  $x_{wu}^1 = x_{wu}^2 = 0, x_{uw}^1 = x_{uw}^2 = 0, x_{wv}^1 = x_{wv}^2 = 0, x_{vw}^1 = x_{vw}^2 = 0$ . Obtemos dois vetores viáveis distintos apenas por  $z_{ab} \in \{0, 1\}$ . Logo,  $\pi_{ab}^z = 0$ .

Exibiremos algumas relações entre os componentes não nulos de  $\pi$ .

a) Vamos demonstrar que  $\pi_{uv}^z = -\pi_{uv}^x$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w \rangle, \rho_2 = \langle v, u, w \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vw, wv, uv, vu\}$ ,  $x_{uv}^1 = x_{uv}^2 = 1, x_{vu}^1 = x_{vu}^2 = 1, x_{uw}^1 = 1, x_{uw}^2 = 1, x_{wu}^1 = 0$  e  $x_{wu}^2 = 0$ . Observe que as únicas variáveis distintas são  $(z_{uv}^1, x_{uv}^1) = (1, 0)$  e  $(z_{uv}^2, x_{uv}^2) = (0, 1)$ .

Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{uv}^z - \pi_{uv}^x = 0$ . Logo,  $\pi_{uv}^z = \pi_{uv}^x$ .

b) Vamos demonstrar que  $\pi_{uv}^z = -\pi_{uv}^x$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{uw, vw\}$ ,  $x_{uw}^1 = 0$ ,  $x_{vw}^1 = 0$ ,  $x_{uw}^2 = 1$ ,  $x_{vw}^2 = 1$ . Observe que as únicas variáveis distintas são  $(x_{uv}^1, x_{vw}^1) = (0, 0)$  e  $(x_{uv}^2, x_{vw}^2) = (1, 1)$ .

Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = -\pi_{uw}^x - \pi_{vw}^x = 0$ . Logo,  $\pi_{uw}^x = -\pi_{vw}^x$ .

c) Vamos demonstrar que  $\pi_{vw}^x = \pi_{uv}^x$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle u, w, v \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Observe que as únicas variáveis distintas são  $(z_{vw}^1, x_{vw}^1, x_{uv}^1) = (1, 1, 0)$  e  $(z_{vw}^2, x_{vw}^2, x_{uv}^2) = (0, 0, 1)$ .

Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vw}^z + \pi_{vw}^x - \pi_{uv}^x = 0$ . Como já demonstramos que  $\pi_{vw}^z = 0$ , podemos simplificar a equação obtendo  $\pi_{vw}^x = \pi_{uv}^x$ .

Finalmente, temos

$$\mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi_{uv}^z \cdot (z_{uv} + x_{uw} - x_{vw} - x_{uv}) = \pi_0\} \quad (\text{A.4})$$

Assim, temos  $\pi_0 = \pi_{uv}^z$  e a inequação indutora de  $\mathcal{H}$  é múltiplo da inequação indutora de  $\mathcal{F}$ . Logo,  $\mathcal{F}$  é faceta. □

**Lema A.0.12.**  $z_{uv} + x_{wu} \geq x_{vw}$  induz faceta, para todo  $uv \in E$  e  $uw, vw \in \bar{E}$ .

*Demonstração.*  $z_{uv} + x_{wu} \geq x_{vw}$  induz faceta, para todo  $uv \in E$  e  $uw, vw \in \bar{E}$ .

Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} + x_{wu} - x_{vw} = 0\}$ .

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} + x_{wu} - x_{vw} = 0\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{wu, vw\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $a = u, b \neq v$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1$ ,  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = w, b \neq u$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle w, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, wu\}$ ,  $x_{wu}^1 = x_{wu}^2 = 0$  e  $x_{ab}^1 = 1$ ,  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a = v, b \notin \{u, w, v\}$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle v, w, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1$ ,  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

d) Vamos demonstrar para  $a \notin \{u, v, w\}$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, v, w, u \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$  e  $x_{ab}^1 = 1, x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que, para todo  $\{a, b\} \subseteq V$  com  $ab \notin \{uv\}$ , temos que  $\pi_{ab}^z = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 0$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, v, w, u \rangle, \rho_2 = \langle a, b, v, w, u \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0$  e  $x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 1$ . Suponha  $a \in \{u, v, w\}$  e  $b \notin \{u, v, w\}$ . Sejam as ordens  $\rho_1$  e  $\rho_2$  tais que  $v \prec w \prec u$  idênticas exceto pela permutação das posições de  $a$  e  $b$ . Em  $\rho_1$ , temos  $b$  sendo imediatamente posterior a  $a$ . Em  $\rho_2$ , temos  $b$  sendo imediatamente anterior a  $a$ .

Seja as ordens  $\rho_1$  e  $\rho_2$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Assim,  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z + \pi_{ab}^x - \pi_{ba}^x = 0$ . Como já demonstramos que, para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{wu, vw\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ . Podemos simplificar  $\pi^\top(s^1 - s^2)$  obtendo  $\pi_{ab}^z = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $|\{a, b\} \cap \{u, v, w\}| = 2$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, w, u \rangle, \rho_2 = \langle w, v, u \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab, ba, wu\}$ . Se  $ab \in \bar{E}$ , definimos  $x_{ab}^1 = x_{ba}^2 = 0, x_{ba}^1 = x_{ab}^2 = 0$  e  $x_{wu}^1 = x_{wu}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

Provaremos que  $\pi_{vw}^x = -\pi_{wu}^x$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, w, u \rangle, \rho_2 = \langle w, v, u \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{wu, wv\}$ . Definimos  $x_{wu}^1 = 1, x_{wu}^2 = 0, x_{wv}^1 = 0, x_{wv}^2 = 0$  e  $x_{vu}^1 = 1, x_{vu}^2 = 0$ . Observe que as únicas variáveis distintas são  $(z_{wv}^1, x_{wv}^1, x_{wu}^1) = (0, 1, 1)$  e  $(z_{wv}^2, x_{wv}^2, x_{wu}^2) = (1, 0, 0)$ .

Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vw}^z + \pi_{vw}^x + \pi_{wu}^x = 0$ . Como já demonstramos que  $\pi_{vw}^z = 0$ , podemos simplificar a equação obtendo  $\pi_{vw}^x = -\pi_{wu}^x$ .

Provaremos que  $\pi_{uw}^x = -\pi_{vw}^x$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle v, u, w \rangle, \rho_2 = \langle v, w, u \rangle$ , definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vw, wu, uw\}$ . Definimos  $x_{vw}^1 = 1, x_{vw}^2 = 0, x_{uw}^2 = x_{uw}^1 = 0$  e  $x_{wu}^1 = 1, x_{wu}^2 = 0$ . Observe que as únicas variáveis distintas são  $(z_{vw}^1, x_{vw}^1) = (0, 1)$  e  $(z_{uw}^2, x_{vw}^2) = (1, 0)$ .

Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{uw}^z - \pi_{vw}^x = 0$ . Como já demonstramos que  $\pi_{vw}^z = 0$ , podemos simplificar a equação obtendo  $\pi_{uw}^z = \pi_{vw}^x$ .

Assim, temos  $\pi_0 = \pi_{uv}^z$  e que a inequação indutora de  $\mathcal{H}$  é múltiplo da inequação  $\mathcal{F}$ . Logo,  $\mathcal{F}$  é faceta. □

**Lema A.0.13.**  $z_{uv} + x_{vw} \leq z_{vw}$  induz faceta para todo  $uv, uw \in E$  e  $vw \in \bar{E}$ .

*Demonstração.* Vamos demonstrar que a desigualdade  $z_{uv} + x_{vw} \leq z_{vw}$  induz faceta para todo  $uv, uw \in E$  e  $vw \in \bar{E}$ .

Definimos  $\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : z_{uv} + x_{vw} = z_{vw}\}$ .

Suponha que

$$\mathcal{F} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : x_{uv} = 0\} \subseteq \mathcal{H} = \{s \in \mathcal{P}_{\text{EOF}} : \pi^\top s = \pi_0\}.$$

Primeiro, vamos demonstrar que, para todo  $ab \in \bar{E} \setminus \{vw\}$ , temos  $\pi_{ab}^x = 0$ . Iremos dividir em casos.

a) Vamos demonstrar para  $a = u$  e  $b \in V(G) \setminus \{u, v, w\}$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle u, w, v, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ub\}$ ,  $x_{ub}^1 = 1$  e  $x_{ub}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^x = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = w$  e  $b = v$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle w, u, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{wv\}$ ,  $x_{wv}^1 = 1$  e  $x_{wv}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{wv}^x = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a = w$  e  $b \in V(G) \setminus \{u, v, w\}$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle w, u, v, b \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{wb\}$ ,  $x_{wb}^1 = 1$  e  $x_{wb}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{wb}^x = 0$ .

d) Vamos demonstrar para  $a \in V(G) \setminus \{u, v, w\}$  e  $b \in \{u, v, w\}$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, u, w, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$ ,  $x_{ab}^1 = 1$  e  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

e) Vamos demonstrar para  $a \in V(G) \setminus \{u, v, w\}$  e  $b \in V(G) \setminus \{u, v, w, a\}$ .

Seja a ordem  $\rho = \langle a, b, u, w, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ . Definimos  $x_{pq}^1 = x_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{ab\}$ ,  $x_{ab}^1 = 1$  e  $x_{ab}^2 = 0$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^x = 0$ .

Agora, vamos demonstrar que, para todo  $a, b \subseteq V(G)$  com  $\{a, b\} \neq \{v, u\}$  e  $\{a, b\} \neq \{v, w\}$ , temos  $\pi_{ab}^z = 0$ .

a) Vamos demonstrar para  $a = u$  e  $b \in V(G) \setminus \{u, v, w\}$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, b, v, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle b, u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = z_{pq}^1$  e  $x_{pq}^2 = z_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^z = 0$ .

b) Vamos demonstrar para  $a = v$  e  $b \in V \setminus \{u, v, w\}$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle w, u, v, b \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle w, u, b, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = z_{pq}^1$  e  $x_{pq}^2 = z_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ub}^z = 0$ .

c) Vamos demonstrar para  $a = w$  e  $b \in V(G) \setminus \{u, v, w\}$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w, b \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle u, v, b, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = z_{pq}^1$  e  $x_{pq}^2 = z_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{wb}^z = 0$ .

d) Vamos demonstrar para  $a \in V(G) \setminus \{u, v, w\}$  e  $b \in V(G) \setminus \{a, u, v, w\}$ .

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle a, b, u, v, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle b, a, u, v, w \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = z_{pq}^1$  e  $x_{pq}^2 = z_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{ab}^z = 0$ .

e) Vamos demonstrar para  $a = u$  e  $b = w$ .

Tomemos as ordens  $\rho_1 = \langle v, u, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle u, w, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente, e definindo  $x_{pq}^2 = z_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E}$ ,  $x_{pq}^1 = z_{pq}^1$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{vw\}$  e  $x_{vw}^1 = 0$ . Observe que  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vu}^z + \pi_{vw}^z - \pi_{vw}^x = 0$ . Como  $\pi_{vw}^x = 0$ , temos  $\pi_{vu}^z = -\pi_{vw}^z$ .

Seja um vetor viável  $s^3 = (\omega^2, x^3, z^3)$  de forma que a ordem  $\rho_3 = \langle w, u, v \rangle$  defina  $z^3$ . Definimos  $x_{pq}^3 = z_{pq}^3$  para todo  $pq \in \bar{E} \setminus \{wv\}$  e  $x_{wv}^3 = 0$ . Observe que  $\pi^\top(s^1 - s^3) = \pi_{vu}^z + \pi_{uw}^z + \pi_{vw}^z = 0$ . Como  $\pi_{vu}^z = -\pi_{vw}^z$ , temos que  $\pi_{uw}^z = 0$ .

Resta mostrar as relações entre os coeficientes  $\pi_{vu}^z$ ,  $\pi_{vw}^x$  e  $\pi_{vw}^z$ . No item anterior, vimos que  $\pi_{vu}^z = -\pi_{vw}^z$ . Iremos provar que  $\pi_{vw}^z = -\pi_{vw}^x$  e, portanto, a faceta  $\mathcal{H}$  é um múltiplo de  $\mathcal{F}$ . Logo,  $\mathcal{F}$  é faceta.

Sejam as ordens  $\rho_1 = \langle u, v, w \rangle$ ,  $\rho_2 = \langle u, w, v \rangle$  definindo  $z^1$  e  $z^2$ , respectivamente. Definimos  $x_{pq}^1 = z_{pq}^1$  e  $x_{pq}^2 = z_{pq}^2$  para todo  $pq \in \bar{E}$ . Assim, temos  $\pi^\top(s^1 - s^2) = \pi_{vw}^z + \pi_{vw}^x - \pi_{vw}^x = 0$ . Como  $\pi_{vw}^x = 0$ , concluímos que  $\pi_{vw}^z = -\pi_{vw}^x$ .

□