



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Dissertação de Mestrado

**Aplicações de Combinatória Analítica para a Contagem de  
Tipos Especiais de Árvores**

Autor

**Paulo César Linhares da Silva**

Orientador

Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade

Fortaleza - Ceará

Junho - 2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Paulo César Linhares da Silva**

## **Aplicações de Combinatória Analítica para a Contagem de Tipos Especiais de Árvores**

Dissertação submetida à coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação, área de concentração algoritmos e otimização combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade.

Co-orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

*Grupo de Paralelismo, Grafos e Otimização Combinatória - ParGO*

FORTALEZA, JUNHO 2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO  
PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Paulo César Linhares da Silva**

## **Aplicações de Combinatória Analítica para a Contagem de Tipos Especiais de Árvores**

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade (Orientador)

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Co-orientador)

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio (Avaliador interno)

Prof. Dr. Carlile Campos Lavor (Avaliador externo)

FORTALEZA, JUNHO 2009

# Resumo

Apresentamos neste trabalho a contagem de alguns tipos especiais de árvores, como as árvores  $r$ -modulares que são árvores planas enraizadas onde cada nó pode ter um número  $tr$  de filhos, para um valor  $r \in \mathcal{N}_+$  fixo e  $t \in \{0, 1, \dots\}$ . Com o uso de ferramentas de combinatória analítica, como o teorema da inversão Lagrangeana e o método simbólico, mostramos como nossos resultados generalizam a contagem de tipos conhecidos de árvores da literatura (árvores binárias, unárias-binárias,  $k$ -árias, gerias, etc.). Propomos novas construções simbólicas que tornam possível contar as árvores  $r$ -modulares com um número limitado e ilimitado de filhos. Obtemos também a contagem de árvores  $k$ -Cayley finitas que são árvores planas enraizadas nas quais cada vértice não folha tem grau  $k$ . Mostramos que uma árvore  $k$ -Cayley finitas tem bijetividade com um par ordenado de árvores  $r$ -modulares (mais precisamente, um par de árvores  $k$ -árias).

Palavras-Chave: árvores  $r$ -modulares, árvores  $k$ -Cayley finitas, inversão Lagrangeana, combinatória analítica.

# Abstract

We present in this work the counting of some special types of trees, as the  $r$ -modular ones that are rooted plane trees where each node can have any number  $tr$  of children, for a fixed value  $r \in \mathcal{N}_+$  and  $t \in \{0, 1, \dots\}$ . With the use of tools from analytic combinatorics, as the Lagrange inversion theorem and the symbolic method, we show as our results generalize the counting of known types of trees from the literature (e.g. binary, unary-binary,  $k$ -ary, general trees, etc.). We consider new symbolic constructions that allow to count  $r$ -modular trees with a limited and unlimited number of children. We also propose the counting of finite  $k$ -Cayley trees that are rooted plane trees where each non leaf node have degree  $k$ . We show that there is a bijection between a finite  $k$ -Cayley tree and a pair of  $r$ -modular trees (i.e. a pair of  $k$ -ary trees).

Keywords:  $r$ -modular trees, finite  $k$ -Cayley trees, Lagrange inversion theorem, analytic combinatorics.

# Agradecimentos

Consagro este trabalho a Deus, por ter me dado o dom da vida e fé para sempre encarar os problemas com muita perseverança e que nunca me abandona mesmo quando as tribulações parecem ser impossíveis de serem vencidas, pois todos os que confiam no Senhor vencem todas as dificuldades.

Aos meus pais, que apesar das dificuldades fizeram um grande esforço para ajudar a construir minha educação.

Ao professor Rafael Castro de Andrade, por sua disposição e paciência na orientação deste trabalho.

Ao professor Manoel Campêlo, que logo no início me ajudou a ingressar no curso.

Ao professor Antonio Caminha, que aceitou trabalhar conosco e muito contribui para a realização deste trabalho com suas sábias idéias de matemática.

Ao Guilherme, que me ajudou a construir os resultados contidos neste trabalho.

Ao Klinger, que apesar de não participar diretamente na realização deste trabalho, tornou-se um grande amigo, pois em diversos momentos quando precisava conversar com alguém, então, nos reuníamos.

Ao meu grande amigo de infância Francisco Fábio, que me ajudou a entender diversos pontos referentes ao Latex e por muitas vezes me ajudou em alguns problemas.

A Márcia que é uma benção de Deus na minha vida, pois sempre procurou me ajudar e ficou ao meu lado ajudando bastante nas correções do texto.

A CAPES-Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior por ter financiado esta pesquisa.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Justificativa . . . . .	2
1.3 Objetivos . . . . .	2
1.4 Metodologia . . . . .	2
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1 Enumeração de árvores na literatura . . . . .	4
<b>3 Combinatória Analítica</b>	<b>6</b>
3.1 Introdução à combinatória analítica . . . . .	6
3.2 Funções Geradoras . . . . .	7
3.2.1 Funções geradoras ordinárias (FGO). . . . .	8
3.2.2 Funções geradoras exponenciais (FGE). . . . .	8
3.3 Método Simbólico . . . . .	9
3.3.1 Simbolismo para estruturas sem rótulos . . . . .	9
3.3.2 Construções SEQM e SEQML . . . . .	11
3.3.3 Simbolismo para estruturas com rótulos . . . . .	12
3.4 Inversão Lagrangeana . . . . .	14
3.5 Construções Rotuladas . . . . .	16
3.5.1 Construção $k$ -sequência: . . . . .	17
3.5.2 Construção sequência . . . . .	17
3.5.3 Construção $k$ -SET . . . . .	17
3.5.4 Construção SET . . . . .	18
3.5.5 Construção Pointing . . . . .	20

---

<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>22</b>
4.1	Contagem de Caminhos . . . . .	22
4.2	Contagem de árvores $r$ -modulares . . . . .	24
4.2.1	Árvores $r$ -modulares limitadas . . . . .	24
4.2.2	Árvores $r$ -modulares gerais . . . . .	27
4.3	Árvores $k$ -Cayley Finitas . . . . .	28
4.3.1	Contagem de árvores $k$ -Cayley finitas . . . . .	28
4.4	Árvores com partição de grau $d_0, d_1, \dots, d_n$ . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>38</b>
<b>A</b>	<b>Convolução generalizada de Vandermonde</b>	<b>40</b>
<b>B</b>	<b>Inversão Lagrangeana</b>	<b>42</b>

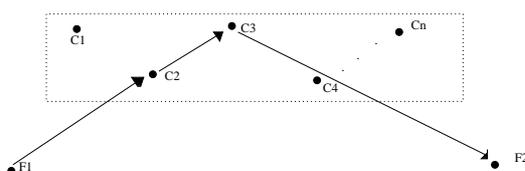
# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Nosso estudo é baseado na contagem de tipos especiais de árvores. Neste trabalho enumeramos<sup>1</sup> algumas árvores, como por exemplo, as árvores  $r$ -modulares, árvores  $k$ -Cayley finitas, árvores  $k$ -árias, árvores com partição de grau  $d_0, d_1, \dots, d_n$ , dentre outras. A contagem dessas árvores tem aplicação, por exemplo, em química orgânica no estudo de cadeias de carbono (hidrocarbonetos) e no problema dos isômeros<sup>2</sup>. Podemos também aplicar resultados de contagem de árvores em problemas clássicos de combinatória, como o exposto a seguir.

Um problema bastante conhecido de combinatória é o de determinar de quantas maneiras distintas podemos viajar de uma cidade  $F_1$  para uma cidade  $F_2$ , visitando ou não, em ordem, no máximo outras  $n$  cidades distintas  $\{C_1, \dots, C_n\}$  uma única vez. A figura 1.1 ilustra uma solução para um exemplo desse problema. A resposta só daremos mais adiante, no capítulo 4.



**Figura 1.1:** Ilustração de uma solução para o problema: saindo de  $F_1$  para  $F_2$ , passando por  $C_2$  e  $C_3$ , nessa ordem.

Em uma modelagem utilizando grafos, as cidades corresponderiam aos vértices, enquanto que uma conexão que liga diretamente as cidades  $i$  e  $j$  representaria uma aresta desse grafo ligando os vértices correspondentes. Por exemplo, as maneiras de sair de  $F_1$  para  $F_2$  passando por até duas cidades  $C_1$  e  $C_2$  seriam  $F_1C_1C_2F_2$ ,  $F_1C_2C_1F_2$ ,  $F_1C_1F_2$ ,  $F_1C_2F_2$ , ou  $F_1F_2$  que seria, nesse último caso, a opção de não passar por

<sup>1</sup>Empregamos o termo 'enumerar' com o sentido de contar.

<sup>2</sup>O problema dos isômeros é encontrar compostos de mesma fórmula molecular, mas com estruturas diferentes.

nenhuma delas. Cada uma das quatro primeiras opções pode ser vista como uma sub-árvore do grafo formado por essas quatro cidades, em que o grau<sup>3</sup> dos vértices  $F_1$  e  $F_2$  é sempre igual a um e dos vértices  $C_3$  ou  $C_2$  é igual a dois.

## 1.2 Justificativa

Some-se ao interesse prático<sup>4</sup> em enumerar estruturas de árvores o fato de que as novas ferramentas de combinatória analítica [8] tornam a contagem dessas estruturas discretas uma tarefa menos árdua. Daí surge a necessidade de se trabalhar ferramentas como o método simbólico e o teorema da inversão Lagrangeana, mostrando exemplos de aplicações dos mesmos para a contagem de alguns tipos de árvores já conhecidas da literatura. Em especial, enumeramos árvores binárias, gerais, k-árias, dentre outras, usando árvores r-modulares [14] que são originalmente introduzidos por nós neste trabalho. Utilizamos árvores r-modulares para definir, igualmente de forma original, árvores k-Cayley finitas [1]. As publicações originadas deste trabalho [1, 14] mostram sua contribuição teórica para a área, bem como o manuscrito aqui apresentado pode servir de referência para futuros trabalhos nesse assunto.

## 1.3 Objetivos

Nosso objetivo principal é abordar de forma mais simples o problema de contagem de alguns tipos de árvores com e sem rótulos utilizando técnicas de combinatória analítica que introduzimos no capítulo 3. A essência é explorar o uso de funções geradoras [24], ordinárias ou exponenciais, que consistem em um dos instrumentos clássicos da combinatória analítica, para obter os resultados de contagem. A saber, introduzimos e enumeramos tipos especiais de árvores, as árvores r-modulares e as árvores k-Cayley finitas. Maiores detalhes sobre essas árvores são apresentados posteriormente neste trabalho.

## 1.4 Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizamos resultados clássicos de combinatória [9], análise assintótica [8], teoria dos conjuntos e teoria analítica dos números [16]. A combinatória analítica é a ferramenta fundamental deste trabalho, pois através do método simbólico, que se utiliza de operações entre conjuntos e funções, podemos representar conjuntos com uma grande quantidade de elementos através de suas propriedades combinatórias. Os conjuntos com propriedades recursivas são

---

<sup>3</sup>O grau de um vértice é o número de arestas incidentes a ele.

<sup>4</sup>Por exemplo, [3] analisa compostos de átomos de carbono e hidrogênio em uma cadeia na qual podemos representar cada nó da árvore por átomos de carbono e a esses átomos estão ligados átomos de hidrogênio na fórmula  $C_nH_{2n+2}$ .

---

particularmente interessantes, pois podemos realizar a contagem de seus elementos aplicando, por exemplo, o teorema da inversão Lagrangeana. A representação desses conjuntos é feita de modo especial através de funções geradoras que neste trabalho são de dois tipos: funções geradoras exponenciais e funções geradoras ordinárias. Tais funções são basicamente utilizadas em estruturas com rótulos e estruturas sem rótulos, respectivamente. Através da expansão em série de Taylor dessas funções geradoras, obtemos a quantidade de elementos de um dado tamanho de uma classe combinatória. Em algumas situações, para aproximar os coeficientes da expansão em série de potências (Taylor), faremos uso de análise assintótica.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

### 2.1 Enumeração de árvores na literatura

A contagem de árvores é um tópico clássico na história da matemática, ganhando importância com os trabalhos de Cayley [2–5]. Em tais trabalhos, o autor utiliza o conceito de árvore no estudo de estruturas de hidrocarbonetos [3] e de árvores geradoras em um grafo [5].

Alguns trabalhos como os descritos em [19] exploram as estruturas encontradas por Cayley. Esses autores fazem uso de funções geradoras para contar o número de alcanos usando o conceito de árvores centrais<sup>1</sup> e bicentrais<sup>2</sup>.

Pólya [18] desenvolve métodos importantes sobre a simetria de algumas configurações de compostos químicos utilizando a teoria de permutações de grupos. Esse estudo utiliza a teoria das funções geradoras, onde em sua estrutura apareciam equações de recorrência implícitas. Em [18] podemos encontrar um rico trabalho de combinatória enumerativa de compostos químicos utilizando estruturas em grafos e teoria dos grupos.

O autor de [17] relaciona métodos combinatórios e funções geradoras, para a contagem de árvores, empregando métodos analíticos para fazer a análise assintótica dos coeficientes das funções geradoras encontradas.

Em [7] os autores desenvolvem resultados para o estudo das árvores em grafos planares (sem cruzamento de arestas). O resultado da contagem dessas árvores com partição fixa de grau  $d_0, \dots, d_n$  foi explorado neste trabalho e está descrito em detalhes no capítulo 4.

Autores como [25] desenvolvem funções geradoras para enumerar árvores com pesos associados às suas arestas, o que abre uma possibilidade de lidar com problemas mais sofisticados como os de otimização combinatória.

Podemos encontrar na enciclopédia de seqüências inteiras

---

<sup>1</sup>Árvores de diâmetro  $2m$  que possuem um nó, chamado de nó central, que está no ponto médio de qualquer caminho de comprimento  $2m$ , sendo esse o único nó com tal característica.

<sup>2</sup>Árvores de diâmetro  $2m + 1$  que possuem um par de nós, chamados bicentrais, que estão no ponto médio de qualquer caminho de comprimento  $2m + 1$ .

(<http://www.research.att.com/~njas/sequences/>) outros trabalhos sobre árvores, bem como outras técnicas para enumerá-las.

# Capítulo 3

## Combinatória Analítica

### 3.1 Introdução à combinatória analítica

A combinatória analítica é uma área de estudo da matemática que nasceu da junção da combinatória clássica com a análise matemática ou, mais precisamente, com a teoria analítica dos números [16]. A combinatória analítica tem aplicações em vários domínios de pesquisa, como por exemplo, em ciência da computação [8] e [11], teoria da probabilidade [6] e [12], teoria probabilística dos números [22], biologia computacional [23], entre outras. Seus princípios são fundados em propriedades de grandes estruturas combinatórias, propriedades essas que nos permitem enumerar (ou contar) estruturas discretas. Com os métodos analíticos fazemos uma ligação direta entre métodos de análise matemática e técnicas de contagem de estruturas combinatórias. Toda essa teoria pode ser vista com maiores detalhes em [8].

As funções geradoras são o objeto central dessa técnica, pois a partir dessas funções determinamos relações para a contagem de estruturas inseridas em um contexto combinatório. De outro modo, utilizando a expansão em série de potências dessas funções, podemos determinar a solução de muitos problemas de contagem. Tal técnica aplica-se a um grande número de problemas de matemática discreta, como por exemplo: os de contagem de palavras, de árvores em grafos, composição e partição de inteiros, etc. A combinatória analítica esta dividida em três partes:

**Parte I- Método Simbólico:** Cria uma simbologia própria através do estudo de operações com funções e conjuntos, permitindo assim criar métodos para representar grandes conjuntos de objetos combinatórios, com a finalidade de obter uma função geradora do problema a partir dessa simbologia.

**Parte II- Análise Assintótica:** Tenta encontrar estimativas (ou aproximações) de coeficientes de uma expansão em série de potências de funções geradoras. Por exemplo, podemos estimar o valor do coeficiente  $n!$  de  $z^n$  na série  $\sum_{n \geq 0} n!z^n$  usando a

aproximação de Stirling para o fatorial. Podemos ver essa teoria com maiores detalhes em [8].

**Parte III- Estruturas Aleatórias:** Procura estimar o número de objetos, com um tamanho fixo em uma determinada classe combinatória utilizando para tanto funções geradoras multivariadas e distribuições de probabilidade discretas e contínuas.

Seguem algumas definições necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

**Definição 3.1.** Uma **classe combinatória**  $\mathcal{C}$  é um conjunto finito ou enumerável sobre o qual está definida uma função tamanho  $t : x \in \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_+$  para seus objetos (elementos), sendo que o número de elementos de um dado tamanho é finito.

Uma classe  $\varepsilon$  é chamada de **classe neutra** se consiste de um único elemento de tamanho 0. Um objeto neutro é denotado pelos símbolos  $\epsilon$  ou  $\mathbf{1}$ . Chamamos de classe atômica  $\mathcal{Z}$  a classe composta de um único elemento de tamanho 1.

**Definição 3.2.** A **seqüência de contagem** de uma classe combinatória  $\mathcal{A}$  é uma seqüência de inteiros  $(A_n)_{n \geq 0}$ , onde  $A_n = \text{card}(\mathcal{A}_n)$  indica o número de objetos na classe  $\mathcal{A}$  de tamanho  $n$ , com  $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ .

Como exemplo, defina  $\mathcal{W}$  como a classe das palavras binárias formadas pelo alfabeto  $A = \{0,1\}$ . Então, alguns elementos do conjunto  $\mathcal{W}$  são:

$$\mathcal{W} = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \dots, 1001101, \dots\}$$

onde  $\epsilon$  representa a palavra vazia. Defina o tamanho de uma palavra como o número de letras contidas na palavra. Para esse exemplo,  $\mathcal{W}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$  e  $W_2 = 4 = \text{card}(\mathcal{W}_2)$ . O número de palavras de tamanho  $n$  é dado pela expressão  $W_n = 2^n$ .

## 3.2 Funções Geradoras

Introduzimos aqui uma das principais ferramentas para a solução de problemas de contagem: as funções geradoras. Essa técnica teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667 – 1754), tendo sido aplicada extensivamente por L. Euler (1707 – 1783) em problemas de teoria aditiva de números, especificamente na teoria das partições. Esse método foi muito usado por Laplace (1749 – 1827) no estudo de probabilidades. N. Bernoulli (1687 – 1759) utilizou esse método no estudo de permutações caóticas.

Em nosso trabalho são utilizados dois tipos de funções geradoras. Utilizamos as funções geradoras ordinárias para enumerar (contar) estruturas combinatórias sem rótulos (não importa a ordem dos objetos sendo contados), e as funções geradoras exponenciais para enumerar estruturas combinatórias com rótulos (a ordem dos objetos sendo contados é importante).

### 3.2.1 Funções geradoras ordinárias (FGO).

Se  $a_r$ , para  $r = 0, 1, 2, \dots$ , representa o número de soluções de um problema de combinatória, de parâmetro  $r$ , a função geradora  $f(x)$  para esse problema é a série de potências em  $x$ :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (3.1)$$

Dada uma seqüência  $(a_r)$  em  $\mathbb{Z}^+$ , a função geradora ordinária para essa seqüência é definida como sendo a série de potências (3.1). Vale ressaltar que neste trabalho estamos tratando de séries formais. Logo, não nos preocupamos com questões de convergência dessas séries.

**Exemplo 3.1.** *Sejam as palavras binárias descritas na seção 3.1. Considere as palavras de tamanho zero, um, dois e assim sucessivamente, então obtemos:*

$$f(z) = 2^0 z^0 + 2^1 z^1 + 2^2 z^2 + \dots + 2^n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$$

Considerando  $|z| < \frac{1}{2}$ , obtemos:

$$f(z) = \frac{1}{1 - 2z}$$

A expansão em **série de Taylor** de  $f(z)$  enumera (gera) todos os elementos dessa classe. Observe que o coeficiente de  $z^n$  na expansão em série de potências da função  $f$  é  $2^n$ . Desse modo, temos  $2^n$  palavras com  $n$  letras, como já dito anteriormente.

Adotamos aqui a notação  $[z^n]f(z)$  para representar o coeficiente de  $z^n$  na expansão em série de potências de  $f(z)$ .

Claramente, as funções geradoras de uma classe neutra  $\varepsilon$  e de uma classe atômica  $\mathcal{Z}$  são  $E(z) = 1z^0$  e  $Z(z) = 1z^1$ , respectivamente.

### 3.2.2 Funções geradoras exponenciais (FGE).

Dada uma seqüência  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$ , a função  $A(x) = \sum_{r \geq 0} a_r \frac{x^r}{r!}$  é chamada de função geradora exponencial da seqüência  $(a_n)$ . Usamos a notação  $[\frac{x^k}{k!}]A(x)$  para representar o coeficiente  $a_k$  da série  $A(x)$ .

**Exemplo 3.2.** *Encontrar a função geradora exponencial para a seqüência  $(1, 1, 1, \dots)$ . Sabemos que o desenvolvimento da função exponencial é dado por:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} + \dots$$

Nesta expansão, o coeficiente de  $\frac{x^r}{r!}$  é igual a 1, para todo  $r$ . Então esta é a função geradora exponencial da seqüência  $a_r = 1$ , para  $r = 0, 1, 2, \dots$

**Exemplo 3.3.** *Considere o seguinte problema de combinatória retirado de [20]. Achar a função geradora exponencial para determinar o número de seqüências de  $k$  dígitos ( $k \leq 4$ ) formadas pelos dígitos 0 e 1, onde o dígito 0 ocorre no máximo uma vez e o dígito 1 ocorre no máximo três vezes.*

**Solução:** *Utilizamos a função geradora exponencial pois a ordem dos elementos na seqüência de dígitos é considerada relevante. Considere a função (3.2) como sendo o produto de duas funções que controlam a presença dos dígitos 0 aparecendo na seqüência no máximo uma vez e o dígito 1 aparecendo no máximo três vezes.*

$$\begin{aligned} P(x) &= (1+x) \left( 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} \right) \\ &= 1+2\frac{x^1}{1!}+3\frac{x^2}{2!}+4\frac{x^3}{3!}+4\frac{x^4}{4!} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Na expressão acima, temos, por exemplo, que as possíveis seqüências de três dígitos são 101, 011, 110, 111; ou seja, quatro ao todo que é o coeficiente de  $\frac{x^3}{3!}$  na função geradora exponencial (3.2).

**Exemplo 3.4.** *Considere  $\mathcal{P}$  a classe das permutações de  $n$  elementos dada por  $\mathcal{P} = \{1, \{1, 2\}\{2, 1\}, \{1, 2, 3\}, \dots\}$ . A FGE para tal classe é dada por:*

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} n! \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

## 3.3 Método Simbólico

O método simbólico consiste em descrever (simbolizar) uma classe combinatória, em função de propriedades de seus elementos, usando operações de conjuntos. E, a partir dessa simbologia, determinar operações algébricas que traduzem o simbolismo em funções geradoras que enumeram (ou contam) os elementos dessa classe.

### 3.3.1 Simbolismo para estruturas sem rótulos

Definimos aqui as construções básicas que constituem o instrumento principal para a linguagem de estruturas combinatórias. Essas construções são baseadas em uniões disjuntas (conhecidas também como somas combinatórias) e em produtos cartesianos de elementos dessas classes. Uma classe é construtível se pode ser obtida através de uniões ou produtos cartesianos de outras classes combinatórias.

**Definição 3.3.** *Seja  $\Phi$  uma construção (operação de conjuntos) que está associada a quaisquer coleções de classes combinatorias (ver definição 3.1)  $\mathcal{B}^{(1)}; \dots; \mathcal{B}^{(m)}$ , Uma nova classe:*

$$\mathcal{A} = \Phi[\mathcal{B}^{(1)}; \dots; \mathcal{B}^{(m)}]$$

é dita **admissível** se e somente se a seqüência de contagem ( $A_n$ ) de  $\mathcal{A}$  depende somente das seqüências de contagens ( $B_n^{(1)}; \dots; B_n^{(m)}$ ) das classes  $\mathcal{B}^{(1)}; \dots; \mathcal{B}^{(m)}$  respectivamente, devendo ainda existir um operador  $\Psi$  associado às respectivas funções geradoras dessas classes, tal que:

$$A(z) = \Psi[B^{(1)}(z), \dots, B^{(m)}(z)],$$

Mostramos a seguir algumas construções admissíveis usadas neste trabalho.

**Definição 3.4.** *A **construção produto cartesiano** de duas classes  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  é definida como:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C} \iff \mathcal{A} \equiv \{\alpha = (\beta, \gamma) \mid \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}\}$$

onde o tamanho  $|\alpha|$  de um elemento  $\alpha \in \mathcal{A}$  é definido como a soma dos tamanhos dos elementos  $\beta \in \mathcal{B}$  e  $\gamma \in \mathcal{C}$ . A seqüência de contagem da classe  $\mathcal{A}$  é dada por:

$$A_n = \sum_{k=0}^n B_k C_{n-k}. \quad (3.3)$$

De acordo com a equação (3.3), concluímos que a função geradora ordinária para a classe  $\mathcal{A}$  é dada por  $A(z) = B(z) \cdot C(z)$ .

**Definição 3.5.** *Dadas duas classes disjuntas  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ , definimos a **construção união disjunta** dessas classes como:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B} \text{ ou } \alpha \in \mathcal{C}\}.$$

onde  $|\alpha|_{\mathcal{A}} = |\alpha|_{\mathcal{B}}$  se  $\alpha \in \mathcal{B}$  e  $|\alpha|_{\mathcal{A}} = |\alpha|_{\mathcal{C}}$  se  $\alpha \in \mathcal{C}$ .

As seqüências de contagens das classes  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  estão relacionadas da seguinte forma:  $A_n = B_n + C_n$ . Desse modo, a função geradora da classe  $\mathcal{A}$  é dada por:  $A(z) = B(z) + C(z)$ .

Podemos, a partir das construções união disjunta e produto cartesiano, construir novas operações, como por exemplo a operação seqüência  $SEQ(\mathcal{A})$ .

**Definição 3.6.** *Se  $\mathcal{A}$  é uma classe combinatoria que não contém elemento de tamanho zero, então a **construção seqüência**  $SEQ(\mathcal{A})$  é definida como a união disjunta infinita a seguir:*

$$SEQ(\mathcal{A}) = \{\epsilon\} + \mathcal{A} + (\mathcal{A} \times \mathcal{A}) + (\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}) + \dots$$

onde  $\{\epsilon\}$  é a classe neutra constituída de um elemento  $\epsilon$  de tamanho 0. Então a função geradora  $B(z)$  para a classe  $SEQ(\mathcal{A})$  é dada por:

$$B(z) = 1 + A^1(z) + A^2(z) + A^3(z) + \dots = \frac{1}{1 - A(z)}.$$

**Exemplo 3.5.** *Seja  $\mathcal{Z} = \{\bullet\}$  a classe combinatória composta de um elemento de tamanho 1. A classe  $\mathcal{I} = SEQ(\mathcal{Z}) - \{\epsilon\}$  é uma maneira de representar os números inteiros positivos em notação unária,  $\mathcal{I} = \{\bullet, \bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet, \dots\}$ . A função geradora ordinária para a classe  $\mathcal{I}$  é:*

$$I(z) = \frac{z}{1 - z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

### 3.3.2 Construções SEQM e SEQML

Baseado na construção SEQ propomos duas novas construções com restrição no tamanho dos elementos da classe combinatória. Exemplos de aplicação das mesmas são apresentados posteriormente no capítulo 4.

**Definição 3.7.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma classe combinatória que não contém elementos de tamanho zero. Definimos a construção **seqüência de múltiplos**  $\mathcal{C} = SEQM^{[r]}(\mathcal{A})$  de parâmetro  $r \in \mathbb{N}$  como a união infinita:*

$$SEQM^{[r]}(\mathcal{A}) = \{\epsilon\} \cup \underbrace{(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A})}_{r \text{ vezes}} \cup \underbrace{(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A})}_{2r \text{ vezes}} \cup \underbrace{(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A})}_{3r \text{ vezes}} \cup \dots$$

É imediato que a FGO de  $SEQM^{[r]}(\mathcal{A})$  é dada por  $C(z) = \frac{1}{1 - A(z)^r}$ .

Agora, assumindo que existe limite no tamanho dos elementos na classe, temos a seguinte construção:

**Definição 3.8.** *Seja  $\mathcal{A}$  uma classe combinatória que não contém elementos de tamanho zero. Definimos a construção **seqüência limitada de múltiplos**  $\mathcal{C} = SEQML^{[r,m]}(\mathcal{A})$  de parâmetros  $r, m \in \mathbb{N}$  como a união:*

$$SEQML^{[r,m]}(\mathcal{A}) = \{\epsilon\} \cup \underbrace{(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A})}_{r \text{ vezes}} \cup \underbrace{(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A})}_{2r \text{ vezes}} \cup \dots \cup \underbrace{(\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A})}_{mr \text{ vezes}}$$

**Proposição 3.3.1.** *A FGO de  $SEQML^{[r,m]}(\mathcal{A})$  é dada por  $C(z) = \frac{1 - A(z)^{r(m+1)}}{1 - A(z)^r}$ .*

**Prova:** Seja  $f(z)$  a FGO de  $SEQML^{[r,m]}(\mathcal{A})$ . Então, pela definição da construção  $SEQML^{[r,m]}(\mathcal{A})$  e as funções geradoras da união e produto cartesiano aplicados à classe  $\mathcal{A}$ , temos:

$$f(z) = 1 + A(z)^r + A(z)^{2r} \dots + A(z)^{mr} = \frac{1 - A(z)^{r(m+1)}}{1 - A(z)^r} \quad (3.4)$$

Abaixo temos uma tabela mostrando as operações vistas nesta seção.

**Tabela 3.1: Simbolismo entre operações com conjuntos e funções geradoras**

Operação	Função Geradora
$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$	$A(z) = B(z) + C(z)$
$\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$A(z) = B(z) \cdot C(z)$
$\mathcal{B} = SEQ(\mathcal{A})$	$B(z) = \frac{1}{1-A(z)}$
$\mathcal{C} = SEQM^{[r]}(\mathcal{A})$	$C(z) = \frac{1}{1-A(z)^r}$
$\mathcal{C} = SEQML^{[r,m]}(\mathcal{A})$	$C(z) = \frac{1-A(z)^{r(m+1)}}{1-A(z)^r}$

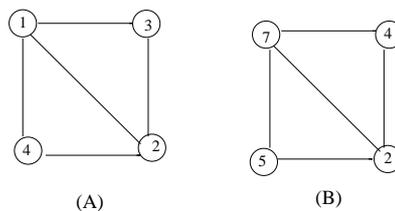
### 3.3.3 Simbolismo para estruturas com rótulos

Operações que envolvem estruturas rotuladas são baseadas em um produto especial chamado de produto rotulado, que distribui rótulos entre os componentes de uma classe combinatória.

As construções rotuladas são traduzidas algebricamente através das funções geradoras exponenciais. O modo como faremos estas traduções é semelhante ao que fizemos com estruturas não rotuladas, ou seja, de posse do simbolismo para uma dada classe combinatória criamos sua função geradora exponencial.

**Definição 3.9.** *Um objeto de tamanho  $n$  é dito **fracamente rotulado** se é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto dos números inteiros. Nesse caso, os vértices são rotulados com inteiros distintos. Um objeto de tamanho  $n$  é dito ser **bem rotulado** ou simplesmente rotulado, se é fracamente rotulado e sua coleção de rótulos é o conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Uma classe rotulada é uma classe combinatória composta de objetos bem rotulados.*

**Exemplo 3.6.** *Vejam na figura abaixo um exemplo de um objeto de tamanho 4 bem rotulado (A) e de um objeto fracamente rotulado (B).*



**Figura 3.1: (A) objeto bem rotulado; (B) objeto fracamente rotulado**

Na figura 3.1 (A) temos um objeto bem rotulado, pois os rótulos de seus quatro vértices estão associados ao conjunto de números inteiros  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Na figura 3.1 (B)

temos um exemplo de um objeto fracamente rotulado, pois os rótulos estão associados ao conjunto  $\{2, 4, 5, 7\}$ .

**Definição 3.10.** A FGE  $f(z) = \sum_i \frac{f_i z^i}{i!}$  é uma convolução binomial das FGE  $g(z) = \sum_i \frac{g_i z^i}{i!}$  e  $h(z) = \sum_i \frac{h_i z^i}{i!}$ , a saber  $f(z) = g(z)h(z)$ , se:

$$f_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_k h_{n-k}. \quad (3.5)$$

**Definição 3.11.** Objetos rotulados podem ser re-rotulados. As re-rotulações são consideradas consistentes se preservam a relação de ordem entre seus rótulos. Usamos duas re-rotulações:

**Redução:** Para uma estrutura fracamente rotulada de tamanho  $n$ , essa operação reduz seus rótulos a um intervalo padrão  $[1, \dots, n]$  preservando a ordem relativa entre os rótulos. Por exemplo, a seqüência  $\{8, 3, 5\}$  é reduzida a  $\{3, 1, 2\}$ .

**Expansão:** Esta operação é definida por uma função  $e : [1, \dots, n] \mapsto S \subset \mathbb{Z}$  que é estritamente crescente. A um objeto bem rotulado  $\alpha$  de tamanho  $n$  é associado um objeto fracamente rotulado  $\tilde{\alpha}$ , no qual o rótulo  $j$  de  $\alpha$  corresponde ao rótulo  $e(j)$  em  $\tilde{\alpha}$ . Por exemplo,  $\{3, 2, 1\}$  pode ser expandido como  $\{7, 5, 1\}, \{5, 4, 3\}$  e assim por diante, sempre preservando a ordem dos elementos.

**Definição 3.12.** Dados dois objetos rotulados  $\alpha \in \mathcal{A}$  e  $\beta \in \mathcal{B}$ , definimos o produto rotulado (ou simplesmente produto) de  $\alpha$  por  $\beta$ , denotado por  $\alpha \star \beta$ , como sendo a coleção de pares  $(\alpha', \beta')$  bem rotulados que se reduzem a  $(\alpha, \beta)$ :

$$\alpha \star \beta = \{(\alpha', \beta') \mid (\alpha', \beta') \text{ é bem rotulado, } \text{redução}(\alpha') = \alpha, \text{redução}(\beta') = \beta\}$$

**Observação 3.1.** O produto de rótulos de dois objetos  $\beta$  e  $\gamma$ , de tamanhos  $n_1$  e  $n_2$ , respectivamente, é tal que sua cardinalidade é dada por:

$$|\beta \star \gamma| = \binom{n_1 + n_2}{n_1, n_2} = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!}$$

**Exemplo 3.7.** Abaixo temos o produto rotulado de um objeto 'a' de tamanho um por um objeto 'ab' de tamanho dois:

$$a \star ab = \{a|bc, b|ac, c|ab\},$$

sendo que a barra vertical separando os dois elementos do par ordenado é empregada apenas para facilitar a compreensão da operação.

Neste exemplo, a primeira parte do par ordenado, de tamanho 1, pode ser expandida em 'a', 'b', 'c', enquanto os rótulos da segunda parte do par ordenado, de tamanho 2, podem assumir os valores  $\{b, c\}$ ,  $\{a, c\}$  e  $\{a, b\}$ , respectivamente. Isso, para que o par ordenado resultante seja bem ordenado. Perceba que em 'a|ac', 'b|ac', em 'c|ab' a segunda

parte do par ordenado preserva a ordem lexicográfica ( $a < b < c$ ) dos rótulos do objeto 'ab'.

**Exemplo 3.8.** O produto rotulado de um objeto de tamanho dois 'ab' por ele mesmo é dado por:

$$ab \star ab = \{ab|cd, bc|ad, cd|ab, ac|bd, ad|bc, bd|ad\}$$

**Definição 3.13.** O produto de rótulos  $\mathcal{B} \star \mathcal{C}$  de duas classes  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  é obtido a partir de todas as re-rotulações ordenadas e consistentes dos elementos do produto cartesiano  $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ .

$$\mathcal{B} \star \mathcal{C} = \bigcup_{\{(\beta, \gamma) \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \beta \in \mathcal{B}, \gamma \in \mathcal{C}\}} (\beta \star \gamma)$$

A classe resultante  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{C}$  tem a seguinte seqüência de contagem:

$$A_n = \sum_{|\beta|+|\gamma|=n} \binom{|\beta|+|\gamma|}{|\beta|, |\gamma|} B_{|\beta|} C_{|\gamma|} = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n}{n_1, n_2} B_{n_1} C_{n_2}$$

Veja que  $B_{n_1} C_{n_2}$  é o número de elementos de  $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$  cujo tamanho é  $n = n_1 + n_2$ , formados por um elemento de tamanho  $n_1$  de  $\mathcal{B}$  e outro de tamanho  $n_2$  de  $\mathcal{C}$  enquanto  $\binom{n}{n_1, n_2}$  é o número de maneiras de re-rotularmos cada um desses elementos. Usando a identidade (3.5) da convolução binomial, podemos mostrar que o produto rotulado  $\mathcal{B} \star \mathcal{C}$  é admissível; i.e. dado que  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{C}$ , temos  $A(z) = B(z)C(z)$ , com  $A$ ,  $B$  e  $C$  representando as FGE correspondentes às classes  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  respectivamente.

**Exemplo 3.9.** Dada uma classe rotulada  $\mathcal{A} = \{1, \{2, 3\}\}$  com um elemento de tamanho 1 e um elemento de tamanho 2, e outra classe  $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}\}$  também rotulada, com um único elemento de tamanho 2, a quantidade de elementos do produto rotulado dessas classes é  $9 = \binom{1+2}{1,2} 1.1 + \binom{2+2}{2,2} 1.1$  e tal produto é dado por:

$$\mathcal{A} \star \mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 2, 4\}, \{1, 4, 2, 3\}, \\ \{2, 3, 1, 4\}, \{2, 4, 1, 3\}, \{3, 4, 1, 2\}\}$$

### 3.4 Inversão Lagrangeana

Mostramos agora uma ferramenta bastante útil para contar elementos de uma classe combinatória. Essa técnica permite encontrar coeficientes de uma função geradora de uma classe combinatória para situações mais complexas.

Seja  $\phi(u) = \sum_{k \geq 0} \phi_k u^k$  uma série de potências sobre  $\mathbb{C}$  com  $\phi_0 \neq 0$ . Então para  $z \in \mathbb{C}$ , a equação  $y = z\phi(y)$  admite uma única solução em  $\mathbb{C}$  (ver [8]) e seus coeficientes são dados por:

$$y(z) = \sum_{k \geq 1} y_k z^k \quad \text{onde} \quad y_k = \frac{1}{k} [u^{k-1}] \phi(u)^k \quad (3.6)$$

Na equação (3.6),  $y(z)$  é uma função na variável  $z$ , obtida da equação  $y = z\phi(y)$  e com coeficiente  $y_k = \frac{1}{k} [u^{k-1}] \phi(u)^k$ . Esse resultado [8] pode ser estendido para potências de  $y(z)^k$  da seguinte maneira:

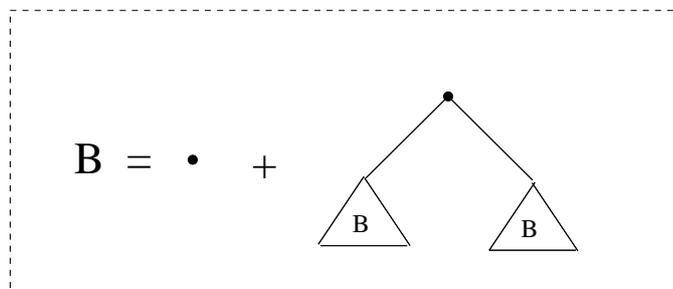
$$y(z)^k = \sum_{n \geq 1} y_n^{(k)} z^n \quad \text{onde} \quad y_n^{(k)} = \frac{k}{n} [u^{n-k}] \phi(u)^n \quad (3.7)$$

Se tivermos uma função  $H$  arbitrária e a compusermos com a função  $y(z)$ , obtemos a fórmula:

$$[z^n] H(y(z)) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] (H'(u) \phi(u)^n) \quad (3.8)$$

A equação (3.6) é conhecida como fórmula de Lagrange e (3.7) é conhecida como fórmula de Bürmann. Uma demonstração para esses resultados encontra-se em [8]. Apresentamos uma demonstração para a inversão Lagrangeana no apêndice B.

**Exemplo 3.10.** *Vejam uma aplicação para a contagem da classe  $\mathcal{B}$  das árvores binárias, enraizadas planas<sup>1</sup> e sem rótulos que são árvores em que cada vértice não folha possui dois filhos. Considere o tamanho de uma árvore binária enraizada como sendo o número de nós internos da árvore. O simbolismo para a classe  $\mathcal{B}$  é o seguinte:*



**Figura 3.2:** Simbolismo para a classe das árvores binárias enraizadas.

*Ou, em notação de operações de conjuntos,*

$$\mathcal{B} = \{\square\} \cup (\mathcal{B} \times \{\bullet\} \times \mathcal{B})$$

onde  $\square$  representa uma árvore constituída de um único nó externo(folha). Esse simbolismo indica que a classe de todas as árvores binárias planas enraizadas é obtida

<sup>1</sup>Árvore plana é uma árvore fincada no plano euclidiano em que distinguimos um nó raiz (todos os demais nós são descendentes dessa raiz) e onde existe uma ordem entre as sub-árvores ligadas a raiz.

recursivamente da união de uma árvore constituída só de uma raiz e de todas as árvores binárias enraizadas (sub-árvore esquerda, raiz, sub-árvore direita) obtidas pelo produto cartesiano de dois elementos de  $\mathcal{B}$ . De acordo com a simbologia vista anteriormente, a função geradora para a classe  $\mathcal{B}$  é dada por:

$$B(z) = 1z^0 + z^1B^2(z) \quad (3.9)$$

A equação (3.9) pode ser vista como:  $zB^2 - B + 1 = 0$ . Para que possamos aplicar o teorema da inversão Lagrangeana temos que fazer uma substituição de variáveis do tipo  $B = y + 1$  (para obtermos a equação funcional na forma  $y = z \cdot \phi(y)$ , ver [8]). Substituindo  $B = y + 1$  em (3.9), temos:

$$y = z(y + 1)^2 \quad (3.10)$$

Assim, tomamos  $\phi(u) = (u + 1)^2$ . Aplicando agora o teorema da inversão Lagrangeana em (3.10), ficamos com:

$$[z^n]B(z) = [z^n]y = \frac{1}{n}[u^{n-1}](u + 1)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Na figura 3.3 (retirada de [21], pg. 113) temos a quantidade de árvores binárias com  $n = 1, 2, 3, 4$  e 5 nós internos.

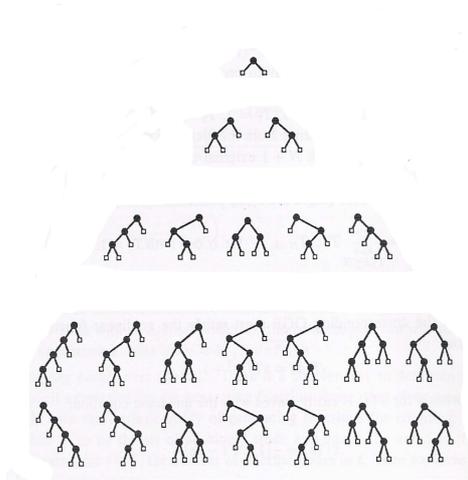


Figura 3.3: Todas as árvores binárias com 1, 2, 3 e 4 nós internos.

## 3.5 Construções Rotuladas

Agora apresentamos algumas construções para estruturas rotuladas.

### 3.5.1 Construção $k$ -sequência:

Dada uma classe rotulada  $\mathcal{B}$ , definimos a  $k$ -ésima potência rotulada de  $\mathcal{B}$  pelo produto  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \star \mathcal{B} \star \dots \star \mathcal{B}$ , com  $k$  fatores iguais a  $\mathcal{B}$ . Denotamos este produto por  $SEQ_k(\mathcal{B})$ , de modo que:

$$\mathcal{A} = SEQ_k(\mathcal{B}) \implies A(z) = B(z)^k$$

### 3.5.2 Construção sequência

A construção sequência rotulada de  $\mathcal{B}$  é denotada por  $SEQ(\mathcal{B})$  e definida por:

$$SEQ(\mathcal{B}) = \varepsilon + \mathcal{B} + \mathcal{B} \star \mathcal{B} + \mathcal{B} \star \mathcal{B} \star \mathcal{B} + \dots = \bigcup_{k \geq 0} SEQ_k(\mathcal{B})$$

de forma que:

$$\mathcal{A} = SEQ(\mathcal{B}) \implies A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B(z)^k = \frac{1}{1 - B(z)}$$

Vejam os abaixo um exemplo da construção  $SEQ$  rotulada de uma classe  $\mathcal{A}$ .

**Exemplo 3.11.** Dada uma classe  $\mathcal{A} = \{\{1\}\}$  composta de um elemento de tamanho 1, a classe  $\mathcal{B} = SEQ(\mathcal{A})$  é dada por:

$$SEQ(\mathcal{A}) = \{\varepsilon, \{\{1\}\}, \{\{1, 2\}, \{2, 1\}\}, \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}\}, \dots\}$$

Veja que  $B(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{i \geq 0} z^i = \sum_{i \geq 0} i! \frac{z^i}{i!}$ . Logo, percebe-se que  $\left[ \frac{z^n}{n!} \right] B(z) = n!$ , que corresponde ao número de permutações (ou re-rotulações) de  $n$  objetos.

### 3.5.3 Construção $k$ -SET

Esta construção é definida formalmente como a classe quociente  $SET_k = SEQ_k(\mathcal{B})/R$  onde  $R$  é uma relação de equivalência que identifica elementos da sequência que são obtidos por permutações uns dos outros. Um  $k$ -SET rotulado é associado a exatamente  $k!$  sequências distintas. Denotamos por  $SET_k(\mathcal{B})$  essa operação, cuja  $FGE$  é dada por:

$$\mathcal{A} = SET_k(\mathcal{B}) \implies A(z) = \frac{1}{k!} B(z)^k$$

### 3.5.4 Construção SET

Um *SET* é uma sequência em que a ordem entre os elementos é irrelevante. A construção *SET* rotulada aplicada a  $\mathcal{B}$  é definida por:

$$SET(\mathcal{B}) = \{\epsilon\} + SET_1(\mathcal{B}) + SET_2(\mathcal{B}) + \dots = \bigcup_{k \geq 0} SET_k(\mathcal{B})$$

A função geradora exponencial para essa construção é dada por:

$$\mathcal{A} = SET(\mathcal{B}) \implies A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B(z)^k = e^{B(z)}$$

**Exemplo 3.12.** Considere a classe das urnas onde cada urna de tamanho  $n$  contém exatamente  $n$  bolas distintas. Então  $\mathcal{U}$  pode ser dada por:

$$\mathcal{U} = \{\epsilon, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \dots\}$$

A ordem entre os elementos rotulados é irrelevante. Então, para cada urna de tamanho  $n$ , existe somente uma possibilidade de termos  $n$  bolas distintas, ou seja,  $U_n = 1$ . Desse modo, a FGE para a classe  $\mathcal{U}$  é dada por:

$$U(z) = \sum_{n \geq 0} 1 \frac{z^n}{n!} = e^z = SET(\mathcal{Z}).$$

onde  $\mathcal{Z} = \{\bullet\}$ , com  $Z(z) = 1$ .

Considere agora outros exemplos para árvores enraizadas rotuladas planas e árvores enraizadas rotuladas não planas. Abaixo mostramos o simbolismo para esses dois tipos de árvores. No desenvolvimento que segue,  $\mathcal{Z}$  é a classe atômica, constituída de um único nó rotulado.

**Árvores enraizadas rotuladas planas gerais:** A classe  $\mathcal{A}$  das árvores rotuladas planas gerais pode ser vista da seguinte maneira. Ou é uma raiz solitária, ou é uma raiz com uma única sub-árvore, que é uma árvore rotulada plana geral, ou é uma raiz com duas sub-árvores rotuladas planas gerais, ou com três sub-árvores rotuladas planas gerais, e assim sucessivamente. Logo, em simbolismo de construção rotulada, temos:

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \star SEQ(\mathcal{A})$$

de onde concluímos que  $A(z) = z(1 + A(z) + A^2(z) + \dots) = z \left( \frac{1}{1-A(z)} \right)$ .

A construção acima reflete a ordem entre as sub-árvores cuja raiz é representada pelo nó em  $\mathcal{Z}$ . Então, a FGE para a classe  $\mathcal{A}$  satisfaz a relação

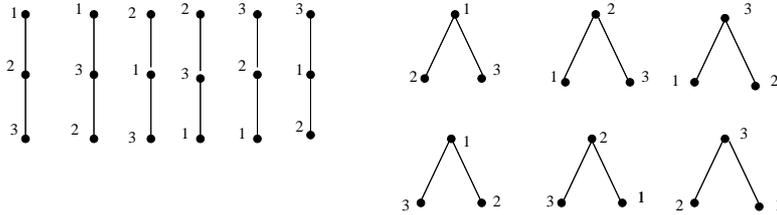
$$A(z) = z\phi(A(z)). \tag{3.11}$$

A solução da equação (3.11) pode ser feita usando o teorema da inversão Lagrangeana é dada por:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{z^n}{n!}\right] A(z) &= \frac{1}{n} \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right] [(1-u)^{-1}]^n = \frac{1}{n} \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right] (1-u)^{-n} \\
&= \frac{1}{n} \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right] \left(\sum_{i \geq 0} \binom{-n}{i} (-u)^i \frac{i!}{i!}\right) \\
&= \frac{1}{n} \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right] \left(\sum_{i \geq 0} i! \binom{-n}{i} (-1)^i \frac{u^i}{i!}\right) \\
&= \frac{1}{n} \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right] \left(\sum_{i \geq 0} i! \binom{n+i-1}{i} \frac{u^i}{i!}\right) \\
&= \frac{1}{n} \left[\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right] = \frac{1}{n} (n-1)! \binom{2n-2}{n-1}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

A quantidade de árvores encontrada em (3.12) são árvores com uma raiz fixa, nó 1 por exemplo. Como em  $n$  nós, todos podem ser raiz, então a quantidade de árvores planas gerais é dada por  $(n-1)! \binom{2n-2}{n-1}$

A figura abaixo 3.4 ilustra a quantidade de árvores enraizadas rotuladas planas com  $n = 3$  vértices.



**Figura 3.4:** Árvores rotuladas gerais planas enraizadas com 3 vértices.

Já a classe  $\mathcal{T}$  das **árvores enraizadas rotuladas não planas gerais** pode ser descrita como:

$$\mathcal{T} = \mathcal{Z} \star SET(\mathcal{A}),$$

pois a ordem das sub-árvores não é relevante.

Sua *FGE* é dada por:

$$T(z) = ze^{T(z)} \tag{3.13}$$

Portanto, usando inversão Lagrangeana, em (3.13) temos:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{z^n}{n!} \right] T &= \frac{1}{n} \left[ \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \right] [(e^u)^n] \\
&= \frac{1}{n} \left[ \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \right] [e^{nu}] \\
&= \frac{1}{n} \left[ \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \right] \left( \sum_{i \geq 0} n^i \frac{u^i}{i!} \right) \\
&= \frac{1}{n} n^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Em (3.14) temos que a quantidade de árvores<sup>2</sup> enraizadas rotuladas não planas gerais é igual a  $\frac{1}{n}n^{n-1}$ , mas isto para o caso de uma raiz fixa, nó 1 por exemplo. Mas, como em  $n$  nós, todos podem ser raiz, então a quantidade de árvores enraizadas rotuladas não-planas gerais é dada por  $n^{n-1}$ .

A figura 3.5 ilustra a quantidade de árvores enraizadas rotuladas não planas gerais com  $n = 3$  vértices.

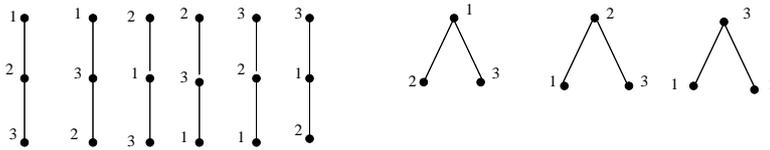


Figura 3.5: Árvores enraizadas rotuladas gerais não planas com 3 vértices.

### 3.5.5 Construção Pointing

A construção pointing de uma classe combinatória  $\mathcal{B}$ , é definida como:

$$\mathcal{A} = \Theta(\mathcal{B}) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \times \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$$

em que  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  é um conjunto que tem  $n$  elementos de tamanho zero.

Pela definição de pointing, podemos mostrar que  $A_n = nB_n$  e que a função geradora para a classe  $\mathcal{A}$  é dada por:

$$A(z) = z \partial_z B(z) \quad \text{onde} \quad \partial_z = \frac{d}{dz}$$

**Exemplo 3.13.** Considere uma classe  $\mathcal{B} = \{ab, ac, abd\}$  com dois elementos de tamanho dois e um elemento de tamanho três e cuja FGO é dada por  $B(z) = 2z^2 + 1z^3$ .

Então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \Theta(\mathcal{B}) &= B_2 \times \{\epsilon_1, \epsilon_2\} + B_3 \times \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \\
&= \{ab, ac\} \times \{\epsilon_1, \epsilon_2\} + \{abd\} \times \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} \\
&= ab\epsilon_1, ab\epsilon_2, ac\epsilon_1, ac\epsilon_2, abd\epsilon_1, abd\epsilon_2, abd\epsilon_3
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Esse resultado equivale ao número de árvores geradoras de um grafo completo não direcionado, obtido por Cayley [5].

---

onde existem quatro elementos de tamanho dois e três elementos de tamanho três. A função geradora para a classe  $\mathcal{A}$  é  $A(z) = 4z^2 + 3z^3 = zB(z)'$ .

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Contagem de Caminhos

Considere o problema dos caminhos entre dois pontos  $F_1$  e  $F_2$ , o qual visita até  $n$  cidades do conjunto  $A = \{C_1, \dots, C_n\}$ , definido na seção 1.1. Para a solução desse problema utilizamos números binomiais e o desenvolvimento da expansão em série de Taylor da função exponencial.

Defina  $S_n$  como a quantidade de caminhos distintos entre os pontos  $F_1$  e  $F_2$ . Então, caso não visitemos nenhum ponto em  $A$ , o número de maneiras procurado é  $\binom{n}{0}.0!$ ; ou se visitarmos um único ponto em  $A$  teremos  $\binom{n}{1}.1!$  maneiras; ou  $\binom{n}{2}.2!$  maneiras para visitar dois pontos (a ordem em que visitamos os pontos importa) ou  $\binom{n}{3}.3!$  maneiras para visitar 3 pontos e assim sucessivamente até  $\binom{n}{n}.n!$ . Com isso temos  $S_n$  escrito como:

$$S_n = \binom{n}{0}0! + \binom{n}{1}1! + \binom{n}{2}2! + \dots + \binom{n}{n}n!. \quad (4.1)$$

A soma (4.1) é equivalente à soma abaixo:

$$S_n = 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \dots + n(n-1)(n-2)\dots 1. \quad (4.2)$$

Representando a soma (4.2) em termos de um somatório, ficamos com:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}.$$

O valor desse somatório é dado por:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = [n!e]$$

Onde a notação  $[x]$  representa o inteiro mais próximo de  $x$ , i.e  $[x] = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ .

Para verificar este resultado, basta mostrar que a diferença entre o somatório  $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$  e o valor  $n!e$  é menor que 0.5. Então, expandindo-se o somatório e conhecendo-se o desenvolvimento da expansão em série de Taylor da função exponencial,  $e = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ , obtemos:

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} - n!e \right| = \left| n! \left( \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) - \left( \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots \right) \right) \right|$$

Podemos mostrar, com as devidas manipulações matemáticas, que a igualdade acima pode ser majorada por uma progressão geométrica, para  $n \geq 2$ .

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} - n!e \right| = \left| n! \left( \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \right) \right| < \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right| < \frac{1}{2}$$

Este resultado pode ser encontrado independentemente em [10].

A partir de agora, mostramos outra solução para o problema dos caminhos, desta vez utilizando técnicas de combinatória analítica. Para tanto, considere  $\mathcal{T}$  a classe de todas as soluções possíveis para o problema dos caminhos (cada solução para o problema pode ser interpretada com uma árvore rotulada). Mostraremos que essa classe  $\mathcal{T}$  pode ser decomposta em um produto rotulado de duas outras classes rotuladas, as quais passaremos a descrever logo a seguir.

Nesse problema existem duas características a serem observadas: a ordem em que visitamos as cidades e a maneira como as escolhemos. A idéia para a solução do problema é decompor a classe rotulada  $\mathcal{T}$  da seguinte maneira.

Todo caminho pode ser visto como um par  $(\alpha, \beta)$ , onde  $\alpha$  representa uma lista não ordenada das cidades não visitadas e  $\beta$  representa a lista ordenada das cidades percorridas no caminho. Daí, vem que:

$$\mathcal{T} = \mathcal{R} \star \mathcal{S}$$

onde  $\mathcal{R}$  mapeia os subconjuntos de cidades não visitadas e  $\mathcal{S}$  mapeia as permutações das cidades presentes no caminho. Então, temos o seguinte simbolismo:

$$\mathcal{T} = SET(\mathcal{Z}) \star SEQ(\mathcal{Z}).$$

com  $\mathcal{Z} = \{1\}$  sendo a classe atômica. Segue que a FGE para  $\mathcal{T}$  é dada por:

$$T(z) = \frac{e^z}{1-z}$$

Expandindo individualmente em série de Taylor  $e^z$  e  $\frac{1}{1-z}$  na expressão acima, temos:

$$\begin{aligned} T(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{k \geq 0} z^k \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &\quad + z + z^2 + \frac{z^3}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \dots \\ &\quad + z^2 + \frac{z^3}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \dots \\ &\quad + \frac{z^3}{0!} + \frac{z^4}{1!} + \dots \\ &\quad + \frac{z^4}{0!} + \dots \\ &= \binom{0!}{0!} z^0 + \binom{1!}{1!} z^1 + \binom{2!}{2!} \frac{z^2}{2!} + \binom{3!}{3!} \frac{z^3}{3!} + \binom{4!}{4!} \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &\quad + \binom{1!}{0!} z^1 + \binom{2!}{1!} \frac{z^2}{2!} + \binom{3!}{2!} \frac{z^3}{3!} + \binom{4!}{3!} \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &\quad + \binom{2!}{0!} \frac{z^2}{2!} + \binom{3!}{1!} \frac{z^3}{3!} + \binom{4!}{2!} \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &\quad + \binom{3!}{0!} \frac{z^3}{3!} + \binom{4!}{1!} \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &\quad + \binom{4!}{0!} \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

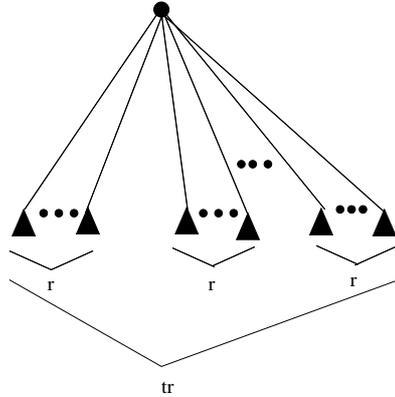
## 4.2 Contagem de árvores r-modulares

Nesta seção, reproduzimos alguns resultados originais de [14]. Árvores r-modulares são árvores planas enraizadas onde cada vértice possui um múltiplo  $tr$  de filhos, com  $r \in \mathbb{N}_+$  fixo e  $t \in \mathbb{N}_+$  variável. Nossos resultados para essas árvores generalizam alguns resultados conhecidos sobre enumeração de árvores na literatura.

### 4.2.1 Árvores r-modulares limitadas

**Definição 4.1.** *Árvores r-modulares limitadas (ver figura 4.1), para um dado valor  $r \in \mathbb{N}_+$  fixo, são árvores cujo o número  $tr$  de filhos de um vértice é múltiplo de  $r$  e limitado a no máximo  $mr$  filhos isto é  $t \leq m \in \mathbb{N}$ .*

Ao longo dos próximos parágrafos mostramos que essas árvores são bem conhecidas para certos valores de  $m$  e  $r$ . A figura 4.1 mostra o esquema de uma árvore  $r$ -modular.



**Figura 4.1:** Árvore  $r$ -modular limitada: cada nó pode ter  $tr$  sub-árvores  $r$ -modulares, com  $0 \leq t \leq m$ .

Na figura 4.1 temos uma raiz com  $tr$  filhos, para  $0 \leq t \leq m$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , que são sub-árvores do mesmo tipo. Sendo  $\mathcal{T}$  a classe combinatória correspondente ao conjunto de todas essas árvores [podemos defini-las recursivamente empregando a construção SEQML pela figura 4.1], temos  $\mathcal{T} = \mathcal{Z} \times \text{SEQML}^{[r,m]}(\mathcal{T})$ .

**Teorema 4.1.** *O número de árvores com  $n$  vértices (dado que  $n \equiv 1 \pmod{r}$ ) cujo número de filhos de um vértice é um múltiplo de  $r$ , e tendo no máximo  $mr$  filhos, é dado por:*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{r(m+1)} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{(r+1)(n-1)-rk(m+1)}{n-1} (-1)^k \quad (4.3)$$

**Prova:** Lembrando que a função geradora  $T(z)$  associada a  $\mathcal{T}$  é dada por:

$$T(z) = z \left( \frac{1 - T(z)^{r(m+1)}}{1 - T(z)^r} \right),$$

Isso nos permite aplicar o Teorema da Inversão Lagrangeana para obter  $T_n$ . Defina  $\phi(T)$  como a função  $\frac{1-T^{r(m+1)}}{1-T^r}$ . Então, temos:

$$T_n = [z^n]T(z) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left( \frac{1 - u^{r(m+1)}}{1 - u^r} \right)^n \quad (4.4)$$

Considere as seguintes identidades combinatórias [9]:

$$(1 - u^{r(m+1)})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u^{r(m+1)k}. \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{1}{1-u^r}\right)^n = \sum_{j \geq 0} \binom{n+j-1}{n-1} u^{rj} \quad (4.6)$$

Usando as identidades acima, temos:

$$\begin{aligned} \phi(u)^n &= \left(\frac{1-u^{r(m+1)}}{1-u^r}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u^{r(m+1)k} \sum_{j \geq 0} \binom{n+j-1}{n-1} u^{rj} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j \geq 0} \binom{n+j-1}{n-1} u^{rj+r(m+1)k}. \end{aligned}$$

Note que desejamos obter o coeficiente de  $u^{n-1}$  em  $\phi(u)^n$ , i.e.  $[u^{n-1}]\phi(u)^n$ . Então, é suficiente que tenhamos  $rk(m+1) + rj = n-1$ , o que implica em:

$$j = \frac{n - rk(m+1) - 1}{r} \quad (4.7)$$

Devemos também ter  $j \geq 0$ . Então, de (4.7) obtemos:

$$k \leq \frac{n-1}{r(m+1)},$$

de maneira que:

$$[u^{n-1}]\phi(u)^n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{r(m+1)} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n(r+1)-rk(m+1)-(r+1)}{n-1} (-1)^k,$$

e, conseqüentemente, usando (4.4), o resultado segue. ■

Este resultado generaliza outros resultados conhecidos da literatura.

**Corolário 4.1.** *O número de árvores com  $n$  vértices (dado que  $n \equiv 1 \pmod{2}$ ) cujos vértices possuem um número par de filhos, com no máximo  $2m$  filhos, é dado por :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2(m+1)} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{3(n-1)-2k(m+1)}{n-1} (-1)^k.$$

**Prova:** Faça  $r = 2$  em (4.3) e o resultado segue. ■

**Corolário 4.2.** *O número de árvores com  $n$  vértices, cujos nós têm no máximo  $m$  filhos, é dado por:*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{2(n-1) - k(m+1)}{n-1} (-1)^k.$$

**Prova:** Faça  $r = 1$  em (4.3) e o resultado segue. ■

**Corolário 4.3.** *O número de árvores unárias binárias com  $n$  vértices é dado por:*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{2(n-1)-3k}{n-1} (-1)^k.$$

**Prova:** Faça  $r = 1$  e  $m = 2$  em (4.3) e o resultado segue. ■

Esse resultado em (4.3) é equivalente ao que enumera os números de Motzkin [8]:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{2(n-1)-3k}{n-1} (-1)^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k-1}$$

**Corolário 4.4.** *O número de árvores binárias com  $n$  vértices (dado que  $n \equiv 1 \pmod{2}$ ) é dado por:*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{\frac{3(n-1)-4k}{2}}{n-1} (-1)^k = \frac{1}{n} \binom{n}{\frac{n-1}{2}}.$$

**Prova:** Faça  $r = 2$  e  $m = 1$  em (4.3) e o resultado segue. ■

**Corolário 4.5.** *O número de árvores  $k$ -árias com  $n$  vértices (dado que  $n \equiv 1 \pmod{k}$ ) é dado por: .*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2k} \rfloor} \binom{n}{k} \binom{\frac{k(n-2k-1)+n}{k}}{n-1} (-1)^k = \frac{1}{n} \binom{n}{\frac{n-1}{k}}.$$

**Prova:** Faça  $r = k$  e  $m = 1$  em (4.3) e o resultado segue. ■

## 4.2.2 Árvores r-modulares gerais

Podemos enumerar árvores r-modulares onde cada vértice pode possuir um número qualquer  $kr$  de filhos, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , com  $r \in \mathbb{N}$  fixo. Seja  $\mathcal{U}$  a classe combinatória correspondente a essas árvores. Observe que a classe  $\mathcal{U}$  pode ser definida como  $\mathcal{U} = \mathcal{Z} \times SEQM^{[r]}(\mathcal{U})$ , com  $U(z) = z \left( \frac{1}{1-U(z)^r} \right)$ .

**Teorema 4.2.** *O número de árvores com  $n$  vértices (dado que  $n \equiv 1 \pmod{r}$ ) cujos vértices têm um múltiplo  $r$  de filhos é dado por:*

$$\frac{1}{n} \binom{\frac{(n-1)(r+1)}{r}}{n-1} \quad (4.8)$$

**Prova:** Aplicando o teorema da Inversão Lagrangeana para  $U(z)$  e utilizando (4.6), temos:

$$U_n = [z^n]U(z) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left( \frac{1}{1-u^r} \right)^n = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left( \sum_{j \geq 0} \binom{n+j-1}{n-1} u^{rj} \right). \quad (4.9)$$

Para extrair o coeficiente  $[u^{n-1}]$  da soma (4.9) acima devemos ter  $rj = n - 1$  ou, equivalentemente,

$$j = \frac{n-1}{r},$$

e assim, substituindo essa igualdade em (4.9), obtemos o resultado desejado.

Finalmente, temos os seguintes resultados adicionais:

**Corolário 4.6.** *O número de árvores gerais com  $n$  vértices cujos vértices têm qualquer número de filhos é dado por:*

$$\frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

**Prova:** Faça  $r = 1$  em (4.8) e o resultado segue. ■

**Corolário 4.7.** *O número de árvores com  $n$  vértices (dado que  $n \equiv 1 \pmod{2}$ ) cujos vértices têm um número par de filhos é dado por:*

$$\frac{1}{n} \binom{\frac{3(n-1)}{2}}{n-1}.$$

**Prova:** Faça  $r = 2$  em (4.8) e o resultado segue. ■

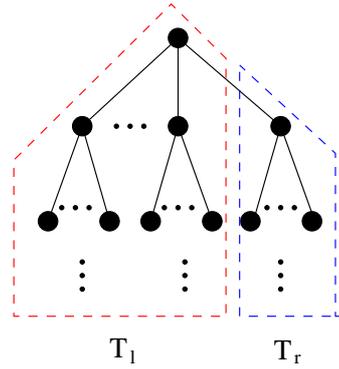
## 4.3 Árvores $k$ -Cayley Finitas

Árvores  $k$ -Cayley finitas são árvores enraizadas planas cujos vértices não folha possuem grau  $k$ . Uma árvore  $k$ -Cayley finita ou é um nó raiz ou é um nó raiz com  $k$  sub-árvores não vazias, onde cada sub-árvore de um nó raiz é um árvore  $(k-1)$ -ária. Note que o modo como definimos uma árvore  $k$ -Cayley não é recursivo. Na figura 4.2 apresentamos um esquema geral de uma árvore  $k$ -Cayley. Observe nessa figura que uma árvore  $k$ -Cayley pode ser vista como um par ordenado  $(T_l, T_r)$  composto de duas árvores  $(k-1)$ -árias, onde  $T_l$  é uma árvore  $(k-1)$ -ária formada pelo nó raiz e suas  $(k-1)$  sub-árvores não vazias mais à esquerda e  $T_r$  que é uma árvore  $(k-1)$ -ária não vazia mais à direita do nó raiz. A figura 4.2 ajuda-nos a entender melhor essa idéia.

### 4.3.1 Contagem de árvores $k$ -Cayley finitas

Considere uma árvore  $k$ -Cayley finita como um par ordenado  $(T_l, T_r)$  composto de duas árvores  $(k-1)$ -árias e seja  $\mathcal{A}$  a classe das árvores  $(k-1)$ -árias. Então, a classe  $\mathcal{T}$  das árvores  $k$ -Cayley finitas é dada por  $\mathcal{T} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  logo a FGO  $T(z)$  correspondente a classe  $\mathcal{T}$  é dada em função da FGO  $A(z)$  das árvores  $(k-1)$ -árias por:

$$T(z) = A(z)^2 \tag{4.10}$$



**Figura 4.2:** Representação de uma árvore  $k$ -Cayley finita como um par de árvores  $(k-1)$ -árias.

**Teorema 4.3.** *O número de árvores  $k$ -Cayley finitas com  $n$  vértices, (dado que  $n \equiv 2 \pmod{k-1}$  e  $k \geq 2$ ), é dado por*

$$\frac{k(k-1)}{n(k-2)+2} \binom{n-2}{\frac{n-k-1}{k-1}}$$

**Prova:** Considere a raiz de uma árvore  $k$ -Cayley e as duas árvores disjuntas  $T_l$  formada por essa raiz e por suas  $(k-1)$  sub-árvores  $(k-1)$ -árias mais à esquerda e  $T_r$  formada pela árvore  $(k-1)$ -ária mais a direita dessa raiz.

Seja  $q$  a quantidade de vértices de  $T_l$  e  $n-q$  a quantidade de vértices de  $T_r$ . Note que  $q \equiv 1 \pmod{k-1}$  e, para  $k > 3$ , devemos ter  $n \equiv 2 \pmod{k-1}$ , pois a raiz possui  $k$  filhos e qualquer outro vértice possui  $k-1$  filhos.

Considere a classe combinatória  $\mathcal{T}$  correspondente às árvores  $k$ -Cayley finitas, e considere a classe combinatória  $\mathcal{A}$  correspondente às árvores  $(k-1)$ -árias.

O coeficiente de  $z^n$  em  $T(z)$  em (4.10) representa a quantidade de árvores  $k$ -Cayley com  $n$  vértices. Note que  $[z^n]T(z)$  é uma soma de produtos do coeficiente de  $z^q$  e  $z^{n-q}$  em  $A(z)$ , com  $0 \leq q \leq n$ , tal que  $q \equiv 1 \pmod{k-1}$ . Com isso obtemos:

$$\begin{aligned} [z^n]T(z) &= \sum_{\substack{q=0 \\ q \equiv 1 \pmod{k-1}}}^n [z^q]A(z) \cdot [z^{n-q}]A(z) \\ &= \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor} [z^{(k-1)l+1}]A(z) \cdot [z^{n-(k-1)l-1}]A(z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizando o corolário 4.5 da seção 4.2, temos:

$$\begin{aligned}
[z^n]T(z) &= \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor} \frac{1}{(k-1)l+1} \binom{(k-1)l+1}{l} \frac{1}{n-(k-1)l-1} \binom{n-(k-1)l-1}{\frac{n-(k-1)l-2}{k-1}} \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor} \frac{1}{(k-1)l+1} \binom{(k-1)l+1}{l} \frac{1}{n-(k-1)l-1} \binom{n-(k-1)l-1}{\frac{n-(k-1)l-2}{k-1}} \\
&\quad - \frac{1}{n-1} \binom{n-1}{\frac{n-2}{k-1}}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Utilizando a proposição (4.1) que pode ser encontrada em [9], podemos obter uma forma mais simples para a expressão acima. Esta igualdade encontra-se demonstrada no apêndice A.

**Proposição 4.1.**

$$\sum_{j \geq 0} \binom{pj+r}{j} \binom{p(m-j)+s}{m-j} \frac{r}{pj+r} \frac{s}{p(m-j)+s} = \binom{pm+r+s}{m} \frac{r+s}{pm+r+s} \tag{4.13}$$

onde o índice  $j$  na soma (4.14) pode assumir somente valores não negativos para que as combinações possam ser bem definidas. Utilizando a proposição (4.1) e fazendo  $j = l$ ,  $r = s = 1$ ,  $m = \frac{n-2}{k-1}$  e  $p = k-1$  na expressão (4.12), ficamos com o seguinte resultado:

$$\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor} \frac{1}{(k-1)l+1} \binom{(k-1)l+1}{l} \frac{1}{n-(k-1)l-1} \binom{n-(k-1)l-1}{\frac{n-(k-1)l-2}{k-1}} = \frac{2}{n} \binom{n}{\frac{n-2}{k-1}}. \tag{4.14}$$

Veja que em (4.12), fazendo  $l$  variar de zero à  $\lfloor \frac{n-1}{k-1} \rfloor$ , colocamos um termo adicional  $\frac{1}{n-1} \binom{n-1}{\frac{n-2}{k-1}}$ . Levando esse fato em consideração temos que  $[z^n]T(z)$  é igual a:

$$\begin{aligned}
[z^n]T(z) &= \frac{2}{n} \binom{n}{\frac{n-2}{k-1}} - \frac{1}{n-1} \binom{n-1}{\frac{n-2}{k-1}} \\
&= \left( \frac{2(k-1)}{n(k-2)+2} - \frac{1}{n-1} \right) \binom{n-1}{\frac{n-2}{k-1}} \\
&= \left( \frac{k(n-2)}{(n-1)[n(k-2)+2]} \right) \left( \frac{(n-1)(n-2)!}{\binom{n-2}{k-1} \left( \frac{n-k-1}{k-1} \right)! \left( \frac{n(k-2)-k+3}{k-1} \right)!} \right) \\
&= \frac{k(k-1)}{n(k-2)+2} \binom{n-2}{\frac{n-k-1}{k-1}}.
\end{aligned}$$

E assim, temos o resultado procurado. ■

Vejam na figura 4.3 um exemplo das árvores de  $k$ -Cayley finitas para  $n = 4, 6, 8$  e  $k = 3$ .

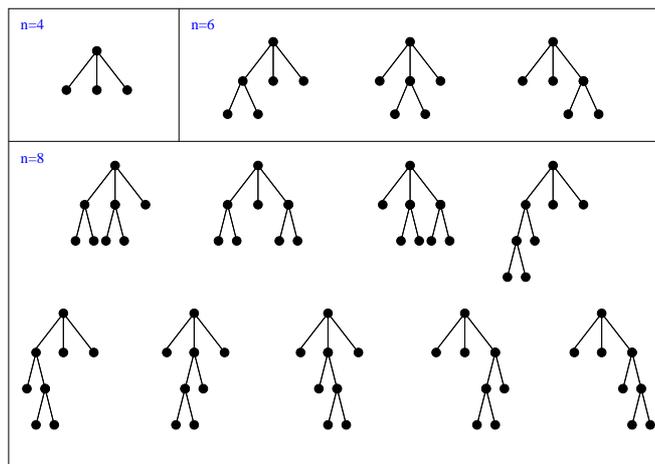


Figura 4.3: Exemplo de árvores k-Cayley finitas

#### 4.4 Árvores com partição de grau $d_0, d_1, \dots, d_n$

Nesta seção trabalhamos com árvores enraizadas planas e sem cruzamento de arestas. Por exemplo, dado o grafo da figura 4.4:



Figura 4.4: Grafo completo com 4 vértices inseridos no plano.

Temos que todas as árvores com quatro vértices enraizadas no vértice superior direito desse grafo são dadas na figura 4.5:

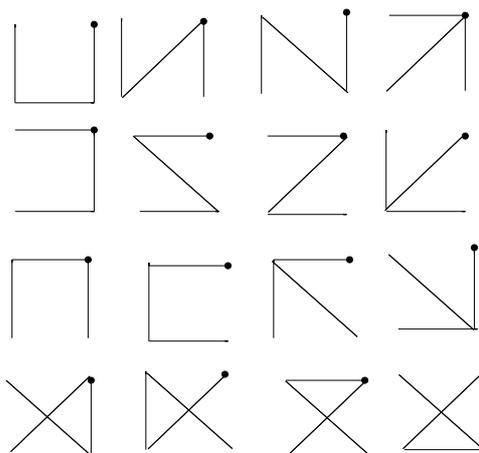


Figura 4.5: Todas as árvores com quatro vértices do grafo da figura 4.4 enraizadas no vértice superior direito.

Dentre as árvores da figura acima, as doze primeiras são sem cruzamento de arestas,

enquanto as quatro últimas da quarta fileira dessa figura são árvores com cruzamento de arestas. Em nosso caso, estamos interessados apenas na contagem das árvores sem cruzamento de arestas com uma restrição adicional que será introduzida mais adiante.

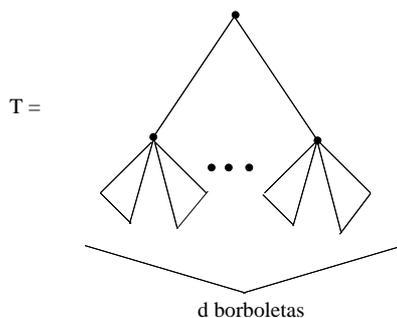
Vamos restringir nossa contagem para grafos cujos vértices sejam vértices de um polígono regular. Isso, para podermos empregar o conceito de borboleta que introduzimos em seguida.

**Definição 4.2.** *Uma borboleta (ver figura 4.6) é um par ordenado de árvores enraizadas planas sem cruzamento que compartilham um vértice, que é a raiz dessas duas árvores. O que resta da borboleta com a remoção do vértice raiz é chamado de asas dessa borboleta. Uma borboleta sem asas é uma árvore com um único vértice denominado de folha.*



**Figura 4.6:** Representação de uma borboleta.

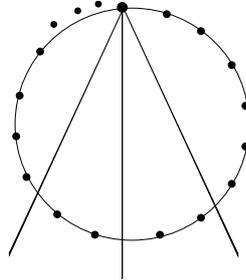
Usando a definição acima, representamos uma árvore enraizada plana  $T$  sem cruzamento de arestas, cuja raiz tem grau de saída (número de filhos) igual a  $d$ , como sendo uma seqüência de  $d$  borboletas conectadas (penduradas) na raiz de  $T$  (ver figura 4.7).



**Figura 4.7:** Representação de uma árvore através de uma seqüência de  $d$  borboletas.

Essa representação pode ser vista, para o caso dos vértices  $V$  de um polígono regular, como sendo uma divisão dos vértices do polígono por  $d - 1$  linhas partindo do vértice raiz que divide o conjunto de vértices do polígono em  $d$  subconjuntos disjuntos. Logo, qualquer árvore sem cruzamento induzidas nos vértices de um subconjunto  $S_1 \subset V$ , não terá cruzamento de arestas com outra árvore induzida nos vértices de outro subconjunto  $S_2 \subset V$ , com  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . Na figura 4.8 abaixo mostramos um exemplo em que três linhas dividem a região do conjunto de vértices de um polígono regular em quatro

regiões disjuntas de vértices. Logo, podemos construir uma árvore sem cruzamento de arestas cujo vértice raiz tem grau quatro, a partir de árvores sem cruzamento obtida em cada região individualmente.



**Figura 4.8:** Representação abstrata de um polígono regular com  $v$  vértices particionados em quatro regiões disjuntas (de vértices) por três linhas.

Pelas noções acima, denotamos por  $\mathcal{T}$  a classe das árvores planas enraizadas sem cruzamento de arestas e por  $\mathcal{B}$  a classe das borboletas, verificamos as seguintes relações envolvendo  $\mathcal{T}$  e  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{Z} \times SEQ(\mathcal{B}) \quad (4.15)$$

$$\mathcal{T} \times \mathcal{T} \equiv \mathcal{Z} \times \mathcal{B} \quad (4.16)$$

em que (4.15) indica que toda árvore é um seqüência de borboletas penduradas em um dado nó raiz (representado pela classe atômica  $\mathcal{Z}$ ), e (4.16) indica que existe um isomorfismo entre um par ordenado de duas árvores e o produto cartesiano de uma classe atômica  $\mathcal{Z}$  por uma borboleta. Nesse caso, o elemento de  $\mathcal{Z}$  representa a raiz (idêntica) das duas árvores que contribui com uma unidade apenas para o tamanho da borboleta.

Segue então as seguintes relações entre as funções geradoras dessas classes.

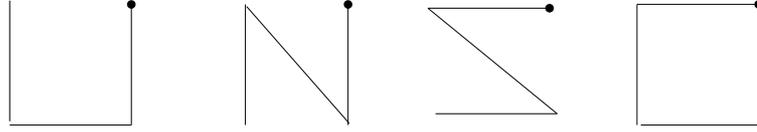
$$T(z) = \frac{z}{1 - B(z)} \quad (4.17)$$

$$B(z) = \frac{T^2(z)}{z} \quad (4.18)$$

Usaremos as idéias introduzidas acima para a contagem de árvores com determinada partição de grau de saída nos vértices.

**Definição 4.3.** *Seja  $\tau$  uma árvore de tamanho  $n$  e grau máximo de saída  $r$ . A partição de grau  $g(\tau)$  é definida como a seqüência de inteiros não negativos  $(n_0, n_1, \dots, n_r)$ , onde  $n_i$  é o número de vértices de grau de saída igual a  $i$  em  $\tau$ , para  $i = 0, \dots, r$ . Perceba que  $\sum n_i = n$  e  $\sum in_i = n - 1$ .*

Por exemplo, na figura 4.9, as árvores tem partição de grau  $(1, 3, 0, 0)$ , indicando que existe um vértice de grau de saída igual a zero (folha) e três vértices de grau de saída igual a um. Não existem vértices de grau de saída igual a dois nem igual a três, que seria o máximo grau de saída possível.



**Figura 4.9:** árvores com partição de grau  $n_0 = 1, n_1 = 3, n_2 = 0, n_3 = 0$

**Proposição 4.2.** *O número de árvores planas enraizadas sem cruzamento de arestas com partição de grau  $(n_0, n_1, \dots, n_r)$  é dado por:*

$$T_n = \frac{1}{n(n-1)} \binom{n}{n_0, n_1, n_2, \dots, n_r} 1^{n_0} 2^{n_1} \dots (r+1)^{n_r} \sum_{i=1}^r \frac{i n_i}{i+1}$$

Em seguida explicamos de uma forma mais detalhada e amigável a demonstração desse resultado encontrado em [7].

Inicialmente, lembre que uma borboleta é definida como um par ordenado de árvores, uma direita e outra esquerda, que possuem a mesma raiz. Essa borboleta, por sua vez, também é uma árvore. Logo, sendo  $d$  o grau de saída da raiz, podemos representar essa borboleta como sendo uma seqüência de  $d$  borboletas penduradas nessa raiz. Como a árvore é plana e sem cruzamento de arestas e essa borboleta também é vista como um par de árvores (esquerda, direita) de mesma raiz, temos  $d+1$  possibilidades de separar as  $d$  borboletas em parte direita e parte esquerda desse par.

Isso nos permite definir  $\mathcal{B}$  de forma recursiva usando a construção *pointing* como:

$$\mathcal{B} = \Theta(\text{SEQ}(\mathcal{B}))$$

e portanto sua função geradora é dada por:

$$B(z) = z(1B^0(z) + 2B^1(z) + 3B^2(z) + \dots) \quad (4.19)$$

Veja que o termo  $(k+1)B^k(z)$  indica  $k+1$  maneiras de apontar onde, dentre as  $k$  borboletas, será feita a partição entre árvore direita e árvore esquerda que compõe a borboleta original cuja raiz tem grau de saída  $k$ .

Sendo assim, vamos introduzir, em cada um desses termos, variáveis  $u_k$  para marcar vértices de grau de saída  $k$  na borboleta. Com isso, obtemos uma função geradora em um número infinito de variáveis.

$$B(z, u_0, u_1, \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} z u_i (i+1) B^i(z) \quad (4.20)$$

Introduzindo também as variáveis  $u_i$  para marcar vértices de grau de saída  $i$  em (4.10), obtemos:

$$T(z, u_0, u_1, \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} z u_i B^i \quad (4.21)$$

Nosso objetivo é determinar o coeficiente  $[u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_r^{n_r} z^n](T)$  em (4.21) que representa o número de árvores de tamanho  $n$  (vértices) com partição de grau  $(n_0, n_1, \dots, n_r)$ . Note que

$$\begin{aligned} [u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_r^{n_r} z^n](T) &= \sum_{k=1}^r [u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_k^{n_k} \dots u_r^{n_r} z^n](z u_k B^k) \\ &= \sum_{k=1}^r [u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_k^{n_k-1} \dots u_r^{n_r} z^{n-1}] B^k \end{aligned}$$

Veja que em (4.19),  $B$  está definida de forma que podemos aplicar o teorema da inversão Lagrangeana (forma de Bürmann (3.7)). Ou seja:

$$[u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_k^{n_k-1} \dots u_r^{n_r} z^{n-1}] B^k = \frac{k}{n-1} [u_0^{n_0} \dots u_k^{n_k-1} \dots u_r^{n_r} z^{n-1}] \phi^{n-1}(u, u_0, u_1, \dots)$$

com  $\phi(u, u_0, u_1, \dots) = \sum_{i \geq 0} u_i (i+1) u^i$ ; logo, definindo  $\bar{u} = \sum_{i \geq r+1} u_i (i+1) u^i$ , temos:

$$\phi(u, u_0, u_1, \dots) = (1u_0 + 2u_1 u^1 + 3u_2 u^2 + \dots + (r+1)u_r u^r + \bar{u})^{n-1}$$

que por sua vez é igual a:

$$= \sum_{n_0 + \dots + (n_k-1) + \dots + n_r + n_f = n-1} \binom{n-1}{n_0, \dots, n_k-1, \dots, n_r, n_f} 1^{n_0} \dots (k+1)^{n_k-1} \dots (r+1)^{n_r} \bar{u}^{n_f} u^{\sum i n_i}$$

Na expressão acima, quando  $n_0 + n_1 + \dots + n_k - 1 + \dots + n_r = n - 1$  (equivalentemente  $\sum n_i = n$  e  $\sum i n_i = n - 1$ ), temos  $n_f = 0$ . Daí, segue que:

$$[u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_k^{n_k-1} u_r^{n_r} z^{n-1}] \phi^{n-1} = \binom{n-1}{n_0, \dots, n_k-1, \dots, n_r, 0} 1^{n_0} \dots (k+1)^{n_k-1} \dots (r+1)^{n_r}$$

Portanto, chegamos ao resultado de que  $[u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_k^{n_k-1} u_r^{n_r} z^{n-1}] B^k$  é igual a:

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{n-1} \binom{n-1}{n_0, \dots, n_k-1, \dots, n_r} 1^{n_0} 2^{n_1} \dots (k+1)^{n_k-1} \dots (r+1)^{n_r} \\ &= \frac{n_k (k+1)}{n_k (k+1)} \frac{k}{n-1} \frac{n}{n} \binom{n-1}{n_0, \dots, n_k-1, \dots, n_r} 1^{n_0} 2^{n_1} \dots (k+1)^{n_k-1} \dots (r+1)^{n_r} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \frac{(kn_k)}{k+1} \binom{n}{n_0, \dots, n_k, \dots, n_r} 1^{n_0} 2^{n_1} \dots (k+1)^{n_k} \dots (r+1)^{n_r} \end{aligned}$$

que, somando para valores de  $k = 1, \dots, r$ , obtemos:

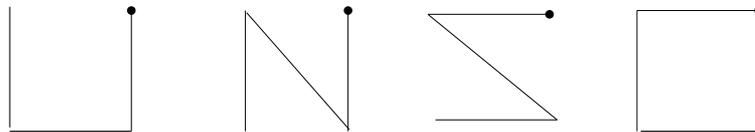
$$[u_0^{n_0} u_1^{n_1} \dots u_r^{n_r} z^n]T = \frac{1}{n(n-1)} \binom{n}{n_0, n_1, n_2, \dots, n_r} 1^{n_0} 2^{n_1} \dots (r+1)^{n_r} \sum_{i=1}^r \frac{in_i}{i+1}$$

conforme o enunciado da proposição 4.2, finalizando a prova.

Mostramos abaixo um exemplo de aplicação desse resultado para o grafo da figura 4.4. As árvores são enraizadas no vértice do canto superior direito. Sendo  $n = 4$ , devemos ter  $\sum n_i = 4$  e  $\sum in_i = 3$ . Vamos encontrar a quantidade de árvores com cada partição de grau possível mostrada na tabela abaixo:

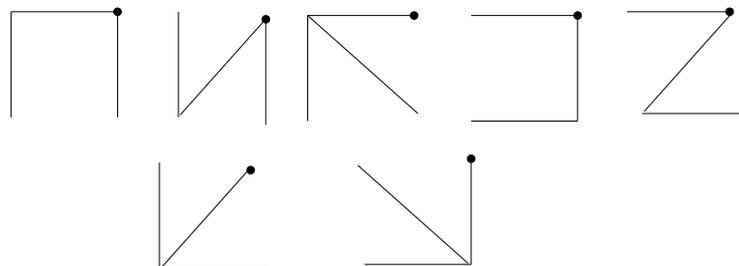
partição	$n_0$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
(i)	1	3	0	0
(ii)	2	1	1	0
(iii)	3	0	0	1

A quantidade de árvores com partição de grau do tipo (i), é dada por  $\frac{1}{4 \times 3} \binom{4}{1, 3, 0, 0} 1^1 2^3 \left(\frac{3}{2}\right) = 4$ . Na figura 4.10, mostramos essas árvores.



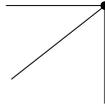
**Figura 4.10:** Árvores com partição de grau  $n_0 = 1, n_1 = 3, n_2 = 0, n_3 = 0$ .

A quantidade de árvores com partição de grau do tipo (ii), é dada por  $\frac{1}{4 \times 3} \binom{4}{2, 1, 1, 0} 1^2 2^1 3^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = 7$ . Na figura 4.11, mostramos essas árvores.



**Figura 4.11:** Árvores com partição de grau  $n_0 = 2, n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0$ .

Finalmente, a quantidade de árvores com partição de grau do tipo (iii), é dada por,  $\frac{1}{4 \times 3} \binom{4}{3, 0, 0, 1} 1^3 2^0 3^0 4^1 \left(\frac{3}{4}\right) = 1$ . Na figura 4.12, mostramos essa árvore.



**Figura 4.12:** Árvore com partição de grau  $n_0 = 3, n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$ .

# Capítulo 5

## Considerações Finais

O estudo envolvendo a contagem de estruturas particulares de árvores é o tema principal deste trabalho. Inicialmente, nossa proposta objetivava contar árvores geradoras com restrição de grau máximo nos vértices, o que se mostrou muito mais complexo do que o esperado. Daí termos atacado casos mais simples desse problema, como a contagem de caminhos Hamiltonianos que podem ser considerados árvores cuja restrição de grau nos vértices internos do caminho é igual a dois e, nas extremidades do caminho, igual a um. Avançamos pouco nesse propósito com a contagem das árvores planas enraizadas sem cruzamento de arestas e com partição fixa de grau de saída nos vértices. Esses resultados são conhecidos na literatura e foram apresentados aqui, acreditamos, de forma mais intuitiva. Porém, a complexidade de realizar a contagem do problema original ainda é uma dificuldade a ser vencida.

Quando do esforço para realizar a contagem dessas árvores, ocorreu de encontrarmos dois tipos de árvores que acreditamos serem inéditos: as árvores  $r$ -modulares e as árvores  $k$ -Cayley. Propomos construções simbólicas de combinatória analítica para ambos os tipos de árvores e, a partir delas, encontramos funções geradoras que possibilitaram realizar suas contagens. Mostramos que as árvores  $r$ -modulares generalizam vários tipos de árvores, dentre os quais alguns são conhecidos da literatura, como as unárias-binárias, binárias,  $k$ -árias, gerais, etc. Esses resultados foram objeto do artigo [14]. Usamos as árvores  $r$ -modulares para obter as árvores  $k$ -Cayley e chegamos à sua contagem usando resultados complexos de combinatória clássica. Esse resultado foi o mais árduo de ser obtido e o artigo referente às árvores  $k$ -Cayley foi submetido [1] e aguarda parecer. Os resultados sobre esses dois tipos de árvores constituem a contribuição principal deste trabalho.

Destacamos também a importância que as construções de seqüências de múltiplos limitada e ilimitada tiveram na obtenção dos resultados aqui apresentados. Essas construções também são originais e podem facilitar a contagem de outros tipos de árvores não tratados neste texto.

Tão importante quanto ter alcançado resultados teóricos, citamos também como contribuição o aprendizado introdutório dessa nova disciplina denominada de

combinatória analítica, complexa, porém fascinante e mágica. Entendê-la e explicá-la aqui, neste texto, mesmo que seja apenas uma parte introdutória, é uma conquista para nós. Claro, muito resta a ser feito, como o estudo assintótico de alguns resultados dados em forma de somas alternadas para se chegar a valores fechados ou aproximados para os mesmos. Porém, isso e o aprofundamento do estudo dessa disciplina, pretendemos fazê-los como seqüência deste trabalho.

# Apêndice A

## Convolução generalizada de Vandermonde

Neste apêndice demonstramos a seguinte igualdade combinatória:

$$\sum_{j \geq 0} \binom{pj+r}{j} \binom{p(m-j)+s}{m-j} \frac{r}{pj+r} \frac{s}{p(m-j)+s} = \binom{pm+r+s}{m} \frac{r+s}{pm+r+s} \quad (\text{A.1})$$

para  $p, r, m, s \in \mathbb{R}$ .

Utilizamos uma família de séries de potências chamada de série binomial generalizada, que é definida como:

$$B_t(z) = \sum_{k \geq 0} (tk)^{k-1} \frac{z^k}{k!} \quad \text{onde} \quad (tk)^{k-1} = \frac{(tk)!}{(tk - (k-1))!}$$

A identidade abaixo é válida para todo  $r \in \mathbb{R}$ . Para maiores detalhes ver [9], página 147.

$$B_t(z)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{tk+r}{k} \frac{r}{tk+r} z^k. \quad (\text{A.2})$$

Agora, por (A.2), temos as seguintes igualdades:

$$B_t(z)^{r+s} = \sum_{k \geq 0} \binom{tk+r+s}{k} \frac{r+s}{tk+r+s} z^k$$

$$B_t(z)^r = \sum_{i \geq 0} \binom{ti+r}{i} \frac{r}{ti+r} z^i$$

$$B_t(z)^s = \sum_{j \geq 0} \binom{tj+s}{j} \frac{s}{tj+s} z^j$$

Sabendo que:

$$B_t(z)^{r+s} = B_t(t)^r B_t(z)^s.$$

obtemos:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{tk + r + s}{k} \frac{r + s}{tk + r + s} z^k = \sum_{i \geq 0} \binom{ti + r}{i} \frac{r}{ti + r} z^i \sum_{j \geq 0} \binom{tj + s}{j} \frac{s}{tj + s} z^j$$

que pode ser reescrito na forma:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{tk + r + s}{k} \frac{r + s}{tk + r + s} z^k = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{ti + r}{i} \binom{tj + s}{j} \frac{s}{tj + s} \frac{r}{ti + r} z^{i+j} \quad (\text{A.3})$$

sendo que ao igualar os coeficientes de mesma potência em  $z$  em (A.3), obtemos  $j+i = k$  ou  $j = k - i$ . Daí, vem que:

$$\binom{tk + r + s}{k} \frac{r + s}{tk + r + s} = \sum_{i \geq 0} \binom{ti + r}{i} \binom{t(k-i) + s}{k-i} \frac{s}{t(k-i) + s} \frac{r}{ti + r}$$

# Apêndice B

## Inversão Lagrangeana

Inicialmente reproduzimos alguns conceitos e resultados utilizados na demonstração do teorema da inversão Lagrangeana.

**Lema B.1.** [13] Se  $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  é um operador linear invertível (com norma  $\|T\| < 1$ ), então o operador linear  $S = \text{Id} - T$  também é invertível.

**Prova B.1.** Pelo teorema do núcleo e da imagem, basta mostrar que  $\ker S = \{0\}$ . Mas se  $v \in (\ker S) \setminus \{0\}$ , então  $Sv = 0$ , e daí  $Tv = v$ . Logo,

$$\|T\| = \sup_{w \neq 0} \frac{\|T(w)\|}{\|w\|} \geq \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} = 1,$$

contradizendo a hipótese  $\|T\| < 1$ .

**Definição B.1.** [15] Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua, onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{C}$ . Dizemos que  $f$  é holomorfa<sup>1</sup> em  $z_0 \in U$ , se existe o limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (\text{B.1})$$

O número complexo  $f'(z_0)$  é chamado de derivada de  $f$  em  $z_0$ .

**Definição B.2.** [15] Seja  $U \subset \mathbb{C}$  um aberto. Dizemos que  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função analítica<sup>2</sup>, se para todo  $z_0 \in U$ , existe uma série de potências  $\sum_{n \geq 0} a_n(z_0)w^n$ , de termos  $(a_n(z_0))$  com raio de convergência  $r > 0$ , tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z_0)(z - z_0)^n$$

para todo  $z \in U$  tal que  $|z - z_0| < r$ .

---

<sup>1</sup>Funções holomorfas são definidas sobre um subconjunto aberto do plano de número complexo  $\mathbb{C}$  com valores em  $\mathbb{C}$  que são diferenciáveis em cada ponto. Esta condição é mais forte que a diferenciabilidade em caso real, implicando que a função é infinitamente diferenciável, sendo portanto descrita mediante sua expansão em série de Taylor.

<sup>2</sup>Uma função analítica é uma função que pode ser localmente expandida em séries de Taylor.

**Definição B.3.** [15] Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma aplicação diferenciável, onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um aberto. Dizemos que  $f$  é um difeomorfismo<sup>3</sup> sobre  $f(U)$ , se  $f(U)$  for aberto e se  $f : U \rightarrow f(U)$  for um homeomorfismo<sup>4</sup> cuja inversa  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  é diferenciável.

**Definição B.4.** [15] Dizemos que uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é conforme se para quaisquer vetores  $u, v \in \mathbb{R}^2$ , o ângulo formado por  $T(u)$  e  $T(v)$  é o mesmo que o formado por  $u$  e  $v$ .

**Teorema B.1.** [15] Seja  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  uma série de potências com raio de convergência  $r > 0$ . Denotemos por  $S(z)$  a função definida por esta série, com  $z$  pertencente a seu disco de convergência. Então  $S(z)$  é holomorfa e a sua derivada é dada por

$$S'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$$

para todo  $z$  no disco de convergência. Em particular, a série  $S'$  tem o mesmo disco de convergência que a série  $S$ .

Decorre de (B.1) que as funções analíticas são holomorfas.

**Teorema B.2.** [13][Função Implícita] Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k, k \geq 1$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , e  $(x_0, y_0) \in U$  tal que  $f(x_0, y_0) = c$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ . Então existe um retângulo aberto definido pelos intervalos  $I \times J$  de centro  $(x_0, y_0)$ , tal que  $f^{-1}(c) \cap (I \times J)$  é o gráfico de uma função  $\varphi : I \rightarrow J$  de classe  $C^k$ . Tem-se  $\varphi(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ , sendo estas derivadas calculadas no ponto  $(x, \varphi(x))$ .

**Teorema B.3.** [15][Fórmula integral de Cauchy]

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa, onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um aberto. Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  um caminho fechado livremente homotópico<sup>5</sup> a uma constante em  $U$ . Para todo  $z \in U - \gamma([a, b])$ , vale a seguinte fórmula:

$$I(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{w - z}$$

onde  $I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$  é chamado índice de  $\gamma$  com respeito ao ponto  $z_0$ . Também chamado de número de voltas da curva  $\gamma$  em torno do ponto  $z_0$ .

A fórmula de inversão Lagrangeana é o conteúdo do seguinte teorema

<sup>3</sup>Difeomorfismo é um bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável.

<sup>4</sup>Do grego homoios = semelhante e morpha = forma. Intuitivamente, um homeomorfismo transforma pontos de um objeto que estão perto uns dos outros, para pontos de outro objeto que estão próximos entre si, e os pontos no primeiro objeto que não estão próximos entre si em pontos para o segundo objeto que não estão próximos entre si.

<sup>5</sup>Duas aplicações contínuas de um espaço em outro são homotópicas (do grego homos=mesmo e topos=lugar) se uma delas pode ser deformada continuamente na outra.

**Teorema B.4.** *Seja  $\phi(u) = \sum_{k \geq 0} \phi_k u^k$  a expansão em série de potências em torno de 0 de uma função analítica  $\phi : B(0; r) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\phi_0 \neq 0$ . Então existe  $s > 0$  tal que, para  $z \in B(0; s) \subset \mathbb{C}$ , a equação (em  $y$ )  $y = z\phi(y)$  admite uma única solução  $y(z) = \sum_{k \geq 1} y_k z^k$ , analítica em  $z$  e tal que*

$$y_n = \frac{1}{n} [u^{n-1}] (\phi(u)^n).$$

**Prova:** *(Demonstração de Antonio Caminha Muniz Neto) Considere a função  $F : \mathbb{C} \times B(0; r) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $F(y, z) = y - z\phi(y)$ . Identificando (da maneira usual)  $\mathbb{C}$  com  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{C} \times B(0; r)$  com um aberto de  $\mathbb{R}^4$ , e calculando a derivada de Fréchet<sup>6</sup>  $D_y F$  de  $F$  com respeito a  $y$ , obtemos*

$$D_y F(y, z) = Id - z\phi'(y),$$

onde  $\phi'(y)$  denota a derivada complexa de  $\phi$  em  $y$  e identificamos  $z\phi'(y)$  com um operador linear em  $\mathbb{R}^2$  da maneira usual.

Agora, tome  $s > 0$  tal que  $\phi(y) \neq 0$  para  $y \in B(0; s)$ . Portanto, sendo  $F^{-1}(0) = \{(y, z); F(y, z) = 0\}$  (não-vazio, pois contém pelo menos o ponto 0), temos em  $F^{-1}(0) \cap (B(0; s) \times B(0; r))$  que

$$D_y F(y, z) = Id - \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y$$

(aqui, novamente vemos  $\frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y$  como um operador linear em  $\mathbb{R}^2$ ).

Mas como  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y = 0$ , podemos supor que  $s > 0$  foi tomado tão pequeno que  $|\frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y| < 1$  para  $y \in B(0; s)$ . Portanto, em  $F^{-1}(0) \cap (B(0; s) \times B(0; r))$  temos

$$D_y F(y, z) = Id - T_y,$$

onde  $T_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador linear de norma  $\|T_y\| < 1$ . Pelo lema anterior, segue que a derivada  $D_y F(y, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador invertível, e o teorema B.2 garante que, diminuindo  $r$  e  $s$  sempre que necessário,  $F^{-1}(0)$  define o gráfico de uma aplicação (real) diferenciável  $y = y(z) : B(0; r) \rightarrow B(0; s)$ , tal que  $y(0) = 0$ ; em particular,  $y = y(z)$  é contínua.

Afirmamos que a função  $y$  é injetiva em  $B(0; r)$ . De fato, para  $z_1, z_2 \in B(0; r)$ , se  $y(z_1) = y(z_2) = w$ , então a relação  $y(z) = z\phi(y(z))$  nos dá

$$z_1\phi(w) = z_1\phi(y(z_1)) = y(z_1) = y(z_2) = z_2\phi(y(z_2)) = z_2\phi(w);$$

mas como  $\phi(w) \neq 0$  para  $w \in B(0; s)$ , segue daí que  $z_1 = z_2$ .

<sup>6</sup>A derivada de Fréchet é a generalização do conceito de derivada de funções em  $\mathbb{R}^n$  em espaços de Banach.

Mostremos agora que  $y$  é uma função analítica (complexa) de  $z \in B(0; r)$ . Se  $z, z_0 \in B(0; r)$ , com  $z \neq z_0$ , então a injetividade de  $y$  garante que  $y(z) \neq y(z_0)$ , e daí

$$\begin{aligned} \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z_0))}{z - z_0} \\ &= \frac{z\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z))}{z - z_0} + \frac{z_0\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z_0))}{z - z_0} \\ &= \phi(y(z)) + z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} \cdot \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0} \left( 1 - z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} \right) = \phi(y(z)). \quad (\text{B.2})$$

Agora, a continuidade de  $y$  nos dá  $\lim_{z \rightarrow z_0} y(z) = y(z_0)$ , donde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} = \lim_{y(z) \rightarrow y(z_0)} z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} = z_0 \phi'(y(z_0)),$$

o qual tende a 0 quando  $z_0 \rightarrow 0$ . Podemos então supor adicionalmente que  $r$  foi escolhido tão pequeno que  $z_0 \phi'(y(z_0)) \neq 1$  em  $B(0; r)$ . Portanto, fazendo  $z \rightarrow z_0$  em (B.2), concluímos que  $y'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}$  existe e

$$y'(z_0) = \frac{\phi(y(z_0))}{1 - z_0 \phi'(y(z_0))}.$$

Em particular,  $y'(0) = \phi(0) = a_0 \neq 0$  e  $y$  é uma função analítica complexa de  $z$ , para  $z \in B(0; r)$ .

Seja,  $y(z) = y_0 + y_1 z + \dots + y_n z^n + \dots$  a expansão de  $y$  em série de potências de  $z$  em  $B(0; r)$ . Então  $y'(z) = y_1 + 2y_2 z + \dots + ny_{n-1} z^{n-1} + \dots$ , e pelo teorema B.3 temos

$$ny_n = [z^{n-1}](y') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{y'(z)}{z^n} dz, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow B(0; r)$  é qualquer curva  $C^1$  por partes e tal que  $I(\gamma; 0) = 1$ . Mas  $y(z) = z\phi(y(z))$  nos dá  $z = \frac{y(z)}{\phi(y(z))}$ , de maneira que

$$ny_n = [z^{n-1}](y') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi(y(z))^n y'(z) dz}{y(z)^n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{y \circ \gamma} \frac{\phi(w)^n dw}{w^n}.$$

Por fim, como  $y$  é um difeomorfismo conforme sobre sua imagem, com  $y(0) = 0$ , segue que

$$I(y \circ \gamma; 0) = I(\gamma; 0) = 1,$$

de maneira que a igualdade acima nos dá, novamente por aplicação da fórmula integral de Cauchy,

$$ny_n = [u^{n-1}](\phi(u)^n).$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Andrade, R., P. Silva and G. Mota, *Limited  $r$ -modular and finite  $k$ -cayley trees*, Submitted to the V Latin - American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium - LAGOS 09, Gramado. (2009).
- [2] Cayley, A., *On the analytic forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations*, Reports British Assoc. Advance. Sci. **45** (1875), pp. 257–305.
- [3] Cayley, A., *Ueber die analytischen figuren, welche in der mathematik bäume genannt werden und ihre anwendung auf die theorie chemischer verbindungen*, Ber. Deutsch. Chem. Ges (1875).
- [4] Cayley, A., *On the analytical forms called trees*, Amer. J. Math **4** (1881), pp. 266–268.
- [5] Cayley, A., *A theorem on trees*, Quarterly Journal of Pure and Applied Math **23** (1889), pp. 376–378.
- [6] Feller, W., “An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol.1,” John Wiley, 1971.
- [7] Flajolet, P. and M. Noy, *Analytic combinatorics of non-crossing configurations*, Discrete Mathematics **204** (1999), pp. 203–229.
- [8] Flajolet, P. and R. Sedgewick, “Analytic Combinatorics,” Cambridge University Press, 2009.
- [9] Graham, R. L., D. E. Knuth and O. Patashnik, “Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science,” Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1994.
- [10] Hassani, M., *Counting and computing by  $e$* , Journal of Integer Sequences **6** (2006), pp. 123–126.
- [11] Knuth, D. E., “Selected papers on analysis of algorithms,” CSLI Publications, Stanford, CA, USA, 2000.

- 
- [12] Laplace, P., “Théorie Analytique des Probabilités,” Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995.
- [13] Lima, E. L., “Curso de Análise 2,” IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [14] Mota, G., P. Silva and R. Andrade, *Enumeration of  $r$ -modular trees*, Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - XL SBPO, João Pessoa (2008), pp. 2543–2550.
- [15] Neto, A. L., “Funções de uma variável complexa,” IMPA, Rio de Janeiro, 1993.
- [16] Newman, D. J., “Analytic Number Theory,” Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics **177**, Springer, 1998.
- [17] Otter, R., *The number of trees*, Annals of Mathematics. **49** (1948), pp. 583–599.
- [18] Pólya, G. and R. Read, “Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds,” Springer-Verlag, New York, 1987.
- [19] Rains, E. M. and N. J. A. Sloane, *On cayley’s enumeration of alkanes (or 4-valent trees)*, Journal of Integer Sequences **2** (1999).
- [20] Santos, J. P. O., M. P. Melo and I. T. Murari, “Introdução a Análise Combinatória,” Editora da Unicamp, Campinas, SP, 1998.
- [21] Sedgewick, R. and P. Flajolet, “An introduction to the analysis of algorithms,” Addison-Wesley Publishing Company., 1996.
- [22] Tanenbaum, G., “Introduction to analytic and probabilistic number theory,” Cambridge University, 1995.
- [23] Waterman, M. S., “Introduction to Computational Biology,” Chapman and Hall, 1995.
- [24] Wilf, H. S., “Generatingfunctionology,” Academic Press, 1990.
- [25] Woan, W. and B. Tankersley, *Exponential generating functions for trees with weighted edges and labeled nodes*, Journal of Integer Sequences, 07.8.4 **10** (2007).