



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO**  
**PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO**

**RAUL WAYNE TEIXEIRA LOPES**

**NÚMERO DE TURÁN PARA CÓPIAS DISJUNTAS DE CAMINHOS**

**FORTALEZA**

**2017**

RAUL WAYNE TEIXEIRA LOPES

NÚMERO DE TURÁN PARA CÓPIAS DISJUNTAS DE CAMINHOS

Dissertação apresentada ao Curso de do Programa de Mestrado e Doutorado em Ciências da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciências da Computação. Área de Concentração: Teoria dos Grafos

Orientador: Prof. Dr. Victor Almeida Campos

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

L855n Lopes, Raul Wayne Teixeira.

Número de Turán Para Cópias Disjuntas de Caminhos / Raul Wayne Teixeira Lopes. – 2017.  
47 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2017.

Orientação: Prof. Dr. Victor Almeida Campos.

1. Teoria Extremal dos Grafos. 2. Número de Turán. I. Título.

CDD 005

---

RAUL WAYNE TEIXEIRA LOPES

NÚMERO DE TURÁN PARA CÓPIAS DISJUNTAS DE CAMINHOS

Dissertação apresentada ao Curso de do Programa de Mestrado e Doutorado em Ciências da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciências da Computação. Área de Concentração: Teoria dos Grafos

Aprovada em: 20/02/2017

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Victor Almeida Campos (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família e aos meus amigos, pelo apoio, motivação e jogatina. Em especial, agradeço à minha tia Gilma, pela fortaleza e suporte oferecidos quando houve necessidade, e à minha vó Ziza por, bem, ser a vó Ziza. Agradeço também ao meu falecido avô José Colombo Teixeira, por ter sido o melhor exemplo de pessoa que eu algum dia espero ser capaz de seguir, e à Natália Diógenes, por sempre acreditar em mim, me apoiar e me empurrar para frente.

Aos companheiros de maratona de programação da Universidade Estadual do Ceará, por me ajudarem a enxergar e entender o caminho que eu gostaria de seguir.

Ao meu orientador e amigo Victor Almeida Campos, por ter me aceitado como aluno e pelos anos de orientação. Agradeço também pelo apoio na participação de congressos, escolas e workshops e pelo tempo usado na correção deste texto.

Agradeço também a todos do grupo ParGO, pelo excelente ambiente de estudo e pesquisa.

Agradeço em especial aos membros da banca examinadora, Fabrício Siqueira Benevides e Rudini Menezes Sampaio, pelas correções, comentários e sugestões realizadas desde a defesa de proposta de dissertação.

Por último, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“The truth will set you free. But not until it is finished with you.”

(David Foster Wallace)

## RESUMO

O número de Turán  $ex(n, F)$  é o número máximo de arestas que um grafo em  $n$  vértices pode ter sem conter  $F$  como subgrafo. Determinar  $ex(n, kF)$  para alguns grafos pequenos é fácil. Porém, o problema cresce rapidamente de dificuldade quando consideramos grafos maiores ou quando queremos determinar  $ex(n, kF)$ , onde  $kF$  é o grafo formado por  $k$  cópias disjuntas do grafo  $F$ . Nos últimos anos, houve progresso no problema de determinar  $ex(n, \mathcal{P})$ , onde  $\mathcal{P}$  é o grafo formado pela união disjunta de  $k$  caminhos. Para  $n$  suficientemente grande, o problema é bem resolvido. Pouco se sabe, no entanto, sobre o problema para  $n$  pequeno. Seja  $P_3$  o grafo formado por um caminho em 3 vértices. Gorgol ofereceu um limite inferior para  $ex(n, kF)$  quando  $F$  é um grafo conexo e, no mesmo artigo, conjecturou que este limite é apertado quando  $F = P_3$ . Oferecemos nesta dissertação uma prova construtiva para esta conjectura de Gorgol, determinando assim o valor de  $ex(n, kP_3)$  para todos  $n$  e  $k$ . Oferecemos um algoritmo que encontra  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em um grafo  $G = (V, E)$  suficientemente denso. Mostramos também como podemos encontrar estas  $k$  cópias de  $P_3$  em tempo  $O(k|E|)$ .

**Palavras-chave:** Teoria Extremal dos Grafos. Número de Turán.

## ABSTRACT

The Turán number  $\text{ex}(n, F)$  is the maximum number of edges in a graph on  $n$  vertices which does not contain  $F$  as a subgraph. It is easy to determine  $\text{ex}(n, kF)$  for small graphs. However, the problem quickly grows in difficulty as we want to avoid bigger graphs or  $kF$ , the graph formed by the disjoint union of  $k$  copies of  $F$ .

In the last few years, there was progress in the problem of finding  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$ , where  $\mathcal{P}$  is the graph formed by the disjoint union of  $k$  paths.  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$  is well known for sufficiently large  $n$ , but little is known of the problem for small  $n$ . Let  $P_3$  be a path on 3 vertices. Gorgol offered a lower bound for  $\text{ex}(n, kF)$  when  $F$  is a connected graph and, in the same paper, conjectured that this bound is tight when  $F = P_3$ . In this dissertation, we offer a constructive proof for this conjecture from Gorgol, thus determining  $\text{ex}(n, kP_3)$  for all  $n$  and  $k$ . We give an algorithm that finds  $k$  disjoint copies of  $P_3$  in a sufficiently dense graph  $G = (V, E)$ . We also show how to find those  $k$  copies of  $P_3$  in time  $O(k|E|)$ .

**Keywords:** Extremal Graph Theory. Turán Number.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Grafos extremais que excluem $kP_3$ . . . . .	12
Figura 2 – Classes de grafos. . . . .	16
Figura 3 – Grafos multipartidos. . . . .	17
Figura 4 – O grafo $F_{n,\ell}$ . . . . .	21
Figura 5 – $H_{n,\ell,s} = (K_{\ell-2s} \cup \overline{K}_{n-\ell+s}) \vee K_s$ . . . . .	22
Figura 6 – Grafos extremais que excluem $kP_3$ . . . . .	26
Figura 7 – Grafos extremais que excluem $kP_3$ . . . . .	27
Figura 8 – Visão geral do algoritmo. . . . .	30
Figura 9 – O grafo $G$ após o Passo 1. . . . .	31
Figura 10 – Exemplo do Lema 4.5. . . . .	33
Figura 11 – Exemplo do Lema 4.7. . . . .	35
Figura 12 – Exemplo do Lema 4.9. . . . .	36

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	10
2	NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA . . . . .	14
2.1	Conceitos Básicos . . . . .	14
2.2	Relações entre grafos . . . . .	15
2.3	Classes de grafos . . . . .	15
2.4	Conceitos de Teoria Extremal dos Grafos . . . . .	17
3	ESTADO DA ARTE . . . . .	18
3.1	Teoria Extremal dos Grafos . . . . .	19
3.1.1	<i>Evitando caminhos</i> . . . . .	21
3.1.2	<i>Evitando ciclos</i> . . . . .	23
3.1.3	<i>Evitando árvores</i> . . . . .	24
3.2	Número de Turán para Cópias Disjuntas de Caminhos . . . . .	25
4	PROVA DA CONJECTURA DE GORGOL . . . . .	29
4.1	Visão geral do algoritmo . . . . .	29
4.2	Iterações do Algoritmo . . . . .	30
4.2.1	<i>Passo 1</i> . . . . .	30
4.2.2	<i>Passo 2</i> . . . . .	33
4.2.3	<i>Passo 3</i> . . . . .	34
4.2.4	<i>Passo 4</i> . . . . .	35
4.3	Prova de corretude do Algoritmo . . . . .	36
5	COMPLEXIDADE DO ALGORITMO . . . . .	39
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	44
	REFERÊNCIAS . . . . .	46

## 1 INTRODUÇÃO

Um grafo simples com  $n$  vértices e livre de triângulos pode conter no máximo  $\lfloor n^2/4 \rfloor$  arestas. Este fato, descoberto por Mantel em 1907 (1), é reconhecido como o primeiro resultado da Teoria Extremal dos Grafos. Este é um exemplo de uma classe de problemas recorrente a esta área de estudo da matemática: problemas de densidade de arestas. Nestes casos, estamos interessados em determinar qual a densidade máxima de arestas que um grafo com  $n$  vértices pode conter mantendo determinada propriedade. O Teorema de Turán, de 1941 (2), é um outro resultado histórico desta classe de problemas e oferece uma generalização do Teorema de Mantel: Turán mostrou que o maior grafo em  $n$  vértices e livre de cliques de tamanho  $k+1$  é o grafo  $k$ -partido completo onde cada uma das  $k$  partes possui tamanho  $\lfloor n/k \rfloor$  ou  $\lceil n/k \rceil$ . Estes grafos são hoje conhecidos como grafos de Turán. O número de Turán  $\text{ex}(n, F)$  é o número máximo de arestas que um grafo em  $n$  vértices pode ter sem conter  $F$  como subgrafo.

Problemas de densidade de arestas não se restringem a buscas pelo número de Turán para algum par  $(n, F)$ , mas também pelas propriedades inerentes a grafos densos e com número de vértices suficientemente grande. O Lema da Regularidade de Szemerédi, de 1978 (3), diz que todo grafo denso e suficientemente grande pode ser aproximado por um grafo aleatório e, portanto, respeita propriedades robustas inerentes a grafos aleatórios. Uma versão mais fraca deste lema, restringindo-se a grafos bipartidos, foi utilizada para provar o Teorema de Szemerédi (4), enquanto sua versão completa mostrou-se impactante para a área da teoria extremal dos grafos. Como consequências do Lema da Regularidade nesta área, podemos citar o Teorema de Erdős-Stones (5), que é uma generalização do Teorema de Turán, e o Teorema de Erdős-Stone-Simonovits (6), que mostra que o número de Turán  $\text{ex}(n, F)$ , para qualquer grafo simples  $F$ , depende do número cromático  $\chi(F)$ <sup>1</sup>:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{n^2} = \frac{\chi(F) - 2}{2\chi(F) - 2}.$$

É importante ressaltar que o Teorema de Erdős-Stone-Simonovits é mais interessante para grafos não bipartidos. Caso  $F$  seja bipartido, o teorema nos diz apenas que  $\text{ex}(n, F) \ll n^2$ . O foco do atual trabalho é justamente obter resultados melhores que o Teorema de Erdős-Stone-Simonovits para certos grafos bipartidos. Mais precisamente, quando consideramos grafos formados pela união disjunta de caminhos.

<sup>1</sup> O número cromático é o menor valor  $\chi(G)$  tal que  $G$  admite uma  $\chi(G)$ -coloração onde cada classe de cor induz um conjunto independente em  $G$ .

Denotemos por  $G \cup F$  a união disjunta dos grafos  $G$  e  $F$ ,  $G \vee F$  o *join* destes grafos. Lembre-se que *join* de dois grafos  $G$  e  $F$  é o grafo obtido de  $G \cup F$  adicionando arestas de todos os vértices de  $G$  a todos os vértices de  $F$ . Seja  $kG$  o grafo formado pela união disjunta de  $k$  cópias de  $G$ . Seja também  $H_{\text{ex}}(n, F)$  um grafo com  $n$  vértices e  $\text{ex}(n, F)$  arestas que não possui  $F$  como subgrafo.  $H_{\text{ex}}(n, F)$  é um *grafo extremal*. Denotamos por  $P_\ell$  o caminho em  $\ell$  vértices e  $M_n$  o emparelhamento quase perfeito em  $n$  vértices<sup>2</sup>.

Para alguns grafos pequenos o problema de determinar  $\text{ex}(n, F)$  é fácil. Todo grafo não-vazio, por exemplo, contém um  $P_2$  e, como  $H_{\text{ex}}(n, P_3) = M_n$ , temos que  $\text{ex}(n, P_3) = e(M_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ . No entanto, determinar  $\text{ex}(n, F)$  é, em geral, um problema difícil que cresce rapidamente de dificuldade quando consideramos grafos maiores. Erdős e Gallai mostraram que

$$\text{ex}(n, P_\ell) \leq \frac{n}{2}(\ell - 2),$$

para  $\ell \geq 2$  (7). O valor de  $\text{ex}(n, kP_2)$ , onde  $kP_2$  consiste no grafo formado por  $k$  arestas independentes, também foi determinado por Erdős e Gallai no mesmo artigo (7). O problema de determinar o número de Turán para grafos formados pela união disjunta de caminhos maiores, no entanto, permaneceu em aberto por muitos anos. Nos últimos 5 anos, houve bastante progresso neste problema, tanto para o caso em que todos os caminhos tem o mesmo tamanho, quanto para o caso em que os caminhos podem ter tamanhos diferentes.

Gorgol, em 2011 (8), mostrou limites inferior e superior para  $\text{ex}(n, kF)$  quando  $F$  é um grafo conexo em  $r$  vértices. O limite inferior foi encontrado notando que nenhum dos seguintes grafos contém  $k$  cópias disjuntas de  $F$ :

$$G_1(n, kF) = K_{kr-1} \cup H_{\text{ex}}(n - kr + 1, F);$$

$$G_2(n, kF) = K_{k-1} \vee H_{\text{ex}}(n - k + 1, F).$$

Na figura 1 ilustramos estes grafos quando  $F = P_3$ .

De fato,  $G_1(n, kF)$  não pode conter  $kF$  como subgrafo pois  $K_{kr-1}$  possui no máximo  $k - 1$  cópias de  $F$  e o resto do grafo é livre de  $F$ . Qualquer cópia de  $F$  em  $G_2(n, kF)$  precisa conter pelo menos um vértices de  $K_{k-1}$  e portanto existem no máximo  $k - 1$  cópias de  $F$  em  $G_2(n, kF)$ . O limite inferior encontrado por Gorgol é dado então por

$$\text{ex}(n, kF) \geq \max\{e(G_1(n, kF)), e(G_2(n, kF))\}.$$

<sup>2</sup> Se  $n$  é par, então  $M_n$  é um emparelhamento em  $n$  vértices. Se  $n$  é ímpar, então  $M_n = M_{n-1} \cup K_1$ .

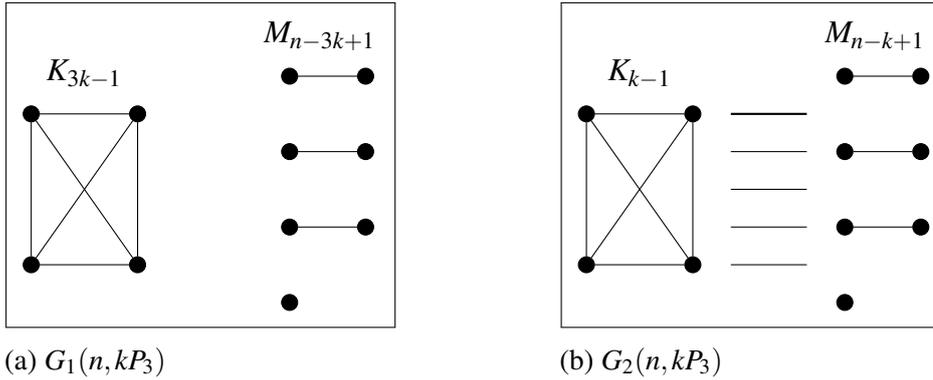


Figura 1 – Grafos extremais que excluem  $kP_3$ .

Considerando os resultados conhecidos para  $ex(n, P_\ell)$  e  $ex(n, kP_2)$ , o limite inferior dado por Gorgol para  $ex(n, kF)$  é de particular interesse quando  $F = P_3$ . Assim, definimos

$$\text{Gorgol}(n, k) = \max\{e(G_1(n, kP_3)), e(G_2(n, kP_3))\}.$$

Seja  $\mathcal{P} = P_{\ell_1} \cup P_{\ell_2} \cup \dots \cup P_{\ell_k}$ . Para os próximos resultados, consideramos dois casos distintos. Para o primeiro caso, consideramos que todos os caminhos que compõem  $\mathcal{P}$  possuem o mesmo tamanho. Claramente, temos que  $ex(n, kP_3) \geq \text{Gorgol}(n, k)$ . Gorgol conjecturou que vale a igualdade nesta inequação para todos  $n$  e  $k$ . No mesmo artigo, Gorgol mostrou que esta conjectura é válida para  $k \in \{2, 3\}$ . Para  $\mathcal{P} = kP_\ell$ , com  $\ell \geq 2$  e  $n$  suficientemente grande, o valor de  $ex(n, \mathcal{P})$  foi dado por Bushaw e Kettle também em 2011 (9).

Para o segundo caso, os caminhos que compõem  $\mathcal{P}$  não necessariamente possuem o mesmo tamanho. Se pelo menos um destes caminhos não é um  $P_3$ , o valor de  $ex(n, \mathcal{P})$  foi determinado por Lidický, Liu e Palmer para  $n$  suficientemente grande (10).

Para ambos os casos, e considerando os resultados enunciados até aqui, temos que, embora pouco se saiba sobre  $ex(n, \mathcal{P})$  quando  $n$  é pequeno, o problema se encontra bem resolvido para  $n$  suficientemente grande. Nesta dissertação, mostramos uma prova construtiva da conjectura de Gorgol para quaisquer valores de  $n$  e  $k$  através de um algoritmo que encontra  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em um grafo  $G = (V, E)$  com  $|E| > \text{Gorgol}(|V|, k)$  (11). Mostramos também que podemos encontrar estas  $k$  cópias em tempo  $O(k|E|)$ .

## Organização do texto

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos, contando com o Capítulo de introdução.

No Capítulo 2, introduzimos as notações e terminologias necessárias para a compreensão deste texto. Apresentamos alguns conceitos de Teoria dos Grafos nesse capítulo.

No Capítulo 3, apresentamos definições formais de problemas e resultados na área de foco desta dissertação, a Teoria Extremal dos Grafos. Iniciamos descrevendo alguns problemas, resultados e motivações clássicas da área e, após, enunciando formalmente alguns resultados fortemente relacionados com o resultado principal apresentado nesta dissertação. O objetivo do Capítulo 3 é o de situar este texto no atual estado da arte da teoria extremal dos grafos.

No Capítulo 4, apresentamos uma prova formal da Conjectura de Gorgol. Descrevemos detalhadamente o algoritmo proposto e os lemas necessários para a prova da conjectura.

No Capítulo 5, analisamos a complexidade do algoritmo proposto. Mostramos como podemos encontrar as  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em tempo  $O(k|E|)$ .

No Capítulo 6, concluímos esta dissertação com um sumário dos resultados obtidos, descrevendo alguns problemas que permanece em aberto e algumas possibilidades de extensão destes resultados.

## 2 NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

### 2.1 Conceitos Básicos

Um grafo  $G = (V, E)$  consiste em um conjunto  $V$  de vértices e um conjunto  $E$  de arestas, onde  $V$  e  $E$  são disjuntos e cada aresta corresponde a um par não-ordenado de vértices. Denotamos por  $V(G)$  e  $E(G)$  os conjuntos de vértices e arestas de um grafo  $G$ , respectivamente. Definimos  $n(G)$  como o número de vértices de  $G$  e  $e(G)$  como o número de arestas de  $G$ . Se  $e$  é uma aresta entre os vértices  $u$  e  $v$ , denotamos  $e$  por  $uv$  ou  $vu$ , dizemos que  $u$  é vizinho de  $v$  (e vice-versa) e dizemos que  $u$  e  $v$  são as *extremidades* de  $e$ . Dizemos também que  $e$  *incide* em  $u$  e  $v$ . Uma aresta com extremidades idênticas é chamada de *laço* e duas ou mais arestas com o mesmo par de extremidades são chamadas de *arestas múltiplas*. Dizemos que um grafo  $G$  é *simples* se  $G$  não possui laços nem arestas múltiplas. Consideramos apenas grafos simples nesta dissertação.

Dizemos que dois vértices são *adjacentes* se eles são vizinhos um do outro, e dizemos que duas arestas são adjacentes se elas possuem uma extremidade em comum. Seja  $v \in V(G)$ . A *vizinhança* de  $v$  em  $G$  é o conjunto  $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ . O *grau* de  $v$  em  $G$  é o número de arestas incidentes em  $v$  e utilizamos  $d_G(v)$  para denotar o grau de  $v$  no grafo  $G$ . Note que, se  $G$  é um grafo simples, então  $d_G(v) = |N_G(v)|$ . O *grau mínimo*  $\delta(G)$  do grafo  $G$  é  $\min\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ . O *grau máximo*  $\Delta(G)$  do grafo  $G$  é  $\max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$ . Dizemos também que um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é *universal* se  $v$  é vizinho de todos os outros vértices de  $G$ .

Para  $A \subseteq V(G)$ ,  $e_G(A)$  é o número de arestas com ambas as extremidades em  $A$ . Para  $A, B \subseteq V(G)$ ,  $e_G(A, B)$  é o número de arestas em  $G$  com uma extremidade em  $A$  e outra em  $B$ . Denotamos por  $d_G(v, A)$  o número de arestas incidentes em  $v$  que possuem a outra extremidade em algum vértice de  $A$ . Chamamos de  $ne_G(A, B) = |A||B| - e_G(A, B)$  o número de não-arestas com uma extremidade em  $A$  e outra em  $B$ . O *complemento*  $\overline{G}$  de  $G$  é o grafo com conjunto de vértices  $V(G)$  cujas arestas são os pares de vértices não-adjacentes em  $G$ . Quando  $G$  é óbvio pelo contexto, omitiremos o subscrito nestas notações.

Uma *clique* é um conjunto de vértices adjacentes dois a dois. Um *conjunto independente* é um conjunto de vértices não adjacentes dois a dois. Um *emparelhamento* é um conjunto de arestas não adjacentes duas a duas.

## 2.2 Relações entre grafos

Aqui, descrevemos algumas relações entre grafos e operações utilizadas para construir novos grafos a partir de grafos conhecidos.

Denotamos por  $G \cup H$  a *união disjunta* dos grafos  $G$  e  $H$ ,  $G \vee H$  o *join* destes grafos. O join de dois grafos  $G$  e  $H$  é o grafo obtido de  $G \cup H$  adicionando arestas de todos os vértices de  $G$  a todos os vértices de  $H$ .

Se  $H$  é um grafo obtido a partir da remoção de um conjunto possivelmente vazio de vértices ou arestas de  $G$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo* de  $G$  e representamos esta relação por  $H \subseteq G$ . Se  $H$  é subgrafo de  $G$  e  $e(H) < e(G)$  ou  $n(H) < n(G)$ , então  $H$  é um *subgrafo próprio* de  $G$  e dizemos  $H \subset G$ . Seja  $G[X]$  o grafo com conjunto de vértices  $X$ , onde  $X \subseteq V(G)$ , e conjunto de arestas formado por todas as arestas de  $G$  que possuem ambas as extremidades em  $X$ . Chamamos  $G[X]$  de subgrafo de  $G$  *induzido* por  $X$ . Se  $H \subseteq G$  e  $H = G[X]$  para algum  $X \subseteq G$ , dizemos que  $H$  é subgrafo induzido de  $G$ .

Um *isomorfismo* de um grafo  $G$  para um grafo  $H$  é uma bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $uv \in E(G)$  se, e somente se,  $f(u)f(v) \in E(H)$ . Se tal função existir, dizemos que  $G$  e  $H$  são isomorfos. Dizemos que um grafo  $G$  é uma *cópia* de um grafo  $H$  se  $G$  e  $H$  são disjuntos e isomorfos. Denotamos por  $kG$  o grafo formado pela união disjunta de  $k$  cópias do grafo  $G$ . Se um grafo  $G$  não possui cópia de um grafo  $H$  como subgrafo, dizemos que  $G$  é *livre* de  $H$  e, caso contrário, dizemos que  $G$  contém  $H$ .

## 2.3 Classes de grafos

Definidos os conceitos iniciais necessários para entender a notação utilizada, podemos descrever as classes de grafos que serão mencionadas nesta dissertação.

Um *caminho*  $P_k$  com conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é o grafo com arestas  $v_i v_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ . Um *k-ciclo*, representado por  $C_k$ , é o grafo obtido a partir de  $P_k$  adicionado da aresta  $v_1 v_k$ . Dizemos que  $G$  é *conexo* se para qualquer par de vértices  $u, v$  de  $G$  existe um caminho de  $u$  para  $v$  em  $G$ . Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Se  $n$  é par, então  $M_n$  é um emparelhamento em  $n$  vértices. Se  $n$  é ímpar, então  $M_n = M_{n-1} \cup K_1$ . Neste caso, chamamos  $M_n$  de emparelhamento quase perfeito em  $n$  vértices.

A *cintura* de um grafo  $G$  é o tamanho do menor ciclo contido em  $G$ . Seja  $k$  o tamanho do menor caminho contendo um par de vértices distintos  $u$  e  $v$ . Dizemos que a *distância* de  $u$

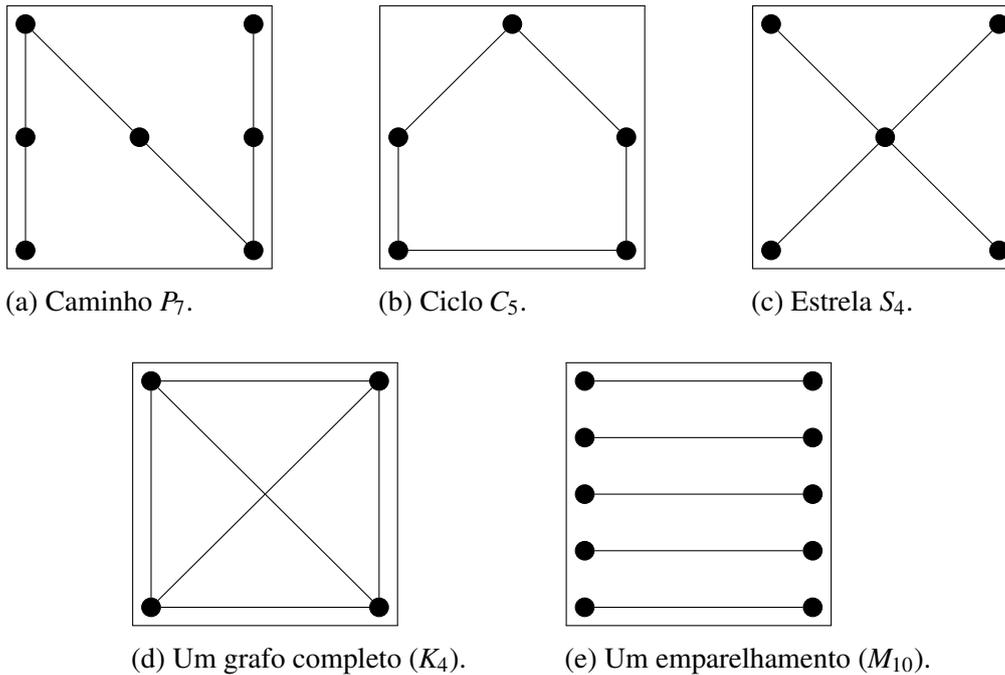


Figura 2 – Classes de grafos.

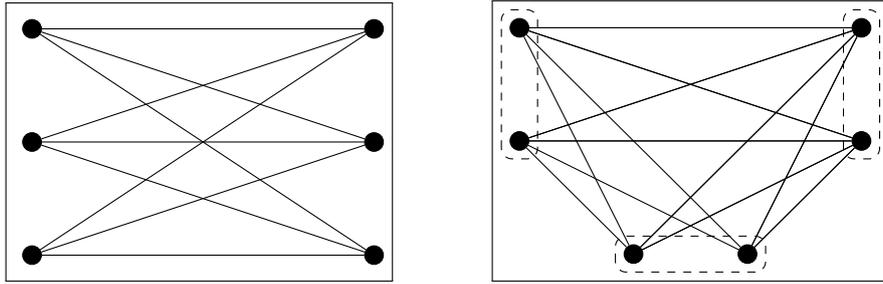
para  $v \in k - 1$ . O *diâmetro* de  $G$  é a maior distância entre um par de vértices de  $G$ .

As *componentes* de  $G$  são os subgrafos conexos maximais de  $G$ . Dizemos que  $G$  é uma *floresta* se toda componente de  $G$  for uma árvore. A *conectividade*  $\kappa(G)$  de um grafo  $G$  é o tamanho mínimo de um conjunto de vértices  $S$  tal que  $G - S$  é desconexo ou possui apenas um vértice. Dizemos que um grafo  $G$  é  $k$ -conexo se  $\kappa(G) \geq k$ .

O *grafo completo*  $K_n$  é o grafo de ordem  $n$  cujo conjunto de vértices forma uma clique. Um grafo é  $r$ -partido se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em  $r$  conjuntos independentes distintos. Se um grafo  $G$  é  $r$ -partido para  $r > 1$ , dizemos que  $G$  é *multipartido*. Dizemos que  $G$  é *multipartido completo* se  $G$  é  $r$ -partido, para algum  $r > 1$ , e existe uma aresta entre qualquer par de vértices em partes distintas. Se  $r = 2$  dizemos que  $G$  é *bipartido* e *bipartido completo*, respectivamente. Chamamos  $K_{n_1, n_2}$  o grafo bipartido completo com partes de ordem  $n_1$  e  $n_2$ , de *triângulo* o grafo  $K_3$  e de  $S_r$  o *grafo estrela*  $K_{1, r-1}$ . Note que  $P_3 = S_3$ . O grafo de Turán  $T_{r, n}$  é o grafo  $r$ -partido completo onde cada parte possui  $\lfloor n/r \rfloor$  ou  $\lceil n/r \rceil$  vértices.

Na Figura 2 ilustramos alguns exemplos das classes de grafos aqui mencionadas. Na Figura 3 ilustramos exemplos de um grafo bipartido completo e um grafo 3-partido completo.

Uma  $k$ -coloração de um grafo  $G$  é uma função  $\Psi: V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  onde os elementos do conjunto  $\{1, \dots, k\}$  são chamados de *cores*. Uma  $k$ -coloração  $\Psi$  de  $G$  é dita *própria* se para cada aresta  $uv$  de  $G$ ,  $\Psi(u) \neq \Psi(v)$ . O *número cromático*  $\chi(G)$  é o menor inteiro  $k$  tal que  $G$  admite uma  $k$ -coloração própria. Se  $\chi(G) = k$ , dizemos que  $G$  é  $k$ -cromático. Observe



(a) Um grafo bipartido completo.

(b) Um grafo 3-partido completo.

Figura 3 – Grafos multipartidos.

que  $\chi(G) \leq k$  se, e somente se,  $G$  é  $k$ -partido.

## 2.4 Conceitos de Teoria Extremal dos Grafos

Nesta seção, descrevemos alguns conceitos-chave para a boa compreensão do que é dito nesta dissertação sobre a teoria extremal dos grafos.

Seja  $F$  um grafo qualquer. O *número de Turán*  $ex(n, F)$  é o número máximo de arestas que um grafo  $G$  em  $n$  vértices pode possuir sem conter  $F$  como subgrafo. Denotamos por  $H_{ex}(n, F)$  um grafo em  $n$  vértices com  $ex(n, F)$  arestas que não possui  $F$  como subgrafo. Dizemos que  $H_{ex}(n, F)$  é um *grafo extremal*. Se desejamos evitar uma família de grafos  $\mathcal{F}$ , escrevemos  $ex(n, \mathcal{F})$  para o número máximo de arestas que um grafo  $G$  em  $n$  vértices pode possuir enquanto livre de grafos em  $\mathcal{F}$ .  $\mathcal{H}_{ex}(n, \mathcal{F})$  é a classe de grafos em  $n$  vértices com  $ex(n, \mathcal{F})$  arestas e livre de grafos em  $\mathcal{F}$ .

A *densidade* de arestas de um grafo  $G$  é a razão dada pelo número de arestas de  $G$  sobre o número máximo de arestas de um grafo em  $|V(G)|$  vértices. Logo, se  $G$  possui  $n$  vértices, a densidade de  $G$  é  $e(G)/\binom{n}{2}$ .

### 3 ESTADO DA ARTE

A Teoria Extremal dos Grafos busca relacionar as invariantes de grafos como ordem, tamanho, grau mínimo, grau máximo, conectividade e número cromático, entre outras. Em geral, estamos interessados em maximizar um parâmetro de um grafo  $G$  mantendo válida alguma propriedade sobre  $G$ . Sob este ponto de vista, várias perguntas naturais a teoria dos grafos podem ser formuladas: quantas arestas um grafo  $G$  em  $n$  vértices deve conter para que, independente de como estas sejam distribuídas,  $G$  contenha um ciclo? ou um  $K_r$ ?

Em particular, estamos interessados em determinar as condições necessárias para garantir que um grafo  $G$  contenha um segundo grafo  $F$  como subgrafo. Neste caso, no entanto, parâmetros como conectividade ou número cromático não são de grande ajuda. Pela construção de Mycielski sabemos que existem grafos livres de  $K_3$  que possuem número cromático arbitrariamente grande (12) e Erdős mostrou que existem também grafos com número cromático e cintura arbitrariamente grandes (13). Portanto, se  $F$  não for uma floresta, existem grafos com número cromático arbitrariamente altos que não contém  $F$  como subgrafo. Por um resultado de Mader (14), existem também grafos livres de  $F$  com conectividade arbitrariamente grande. Assim, uma estratégia utilizada para forçar a existência de  $F$  como um subgrafo de um grafo  $G$  em  $n$  vértices é a de aumentar o número de arestas de  $G$ . O problema de determinar qual a quantidade mínima de arestas necessária em um grafo em  $n$  vértices para forçar a existência de um determinado subgrafo é um dos pilares da Teoria Extremal dos Grafos e o foco desta dissertação.

Iniciamos enunciando dois resultados clássicos que ajudaram a definir esta área de estudo. O primeiro, o Teorema de Mantel, determina o número máximo de arestas em um grafo em  $n$  vértices e livre de triângulos e é cronologicamente o primeiro resultado da teoria extremal dos grafos (1).

**Teorema 3.1** (Mantel). *Seja  $G$  um grafo em  $n$  vértices e livre de  $K_3$ . Então  $e(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$  com igualdade se, e somente se,  $G \cong K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ .*

O Teorema de Turán (2) oferece uma generalização do Teorema de Mantel, considerando grafos livres de  $K_r$ ,  $r \geq 2$ , e é considerado o resultado que de fato deu início ao estudo sistemático da Teoria Extremal dos Grafos. Lembramos que  $T_{r,n}$  é o grafo multipartido completo com  $n$  vértices e  $r$  partes onde cada parte tem tamanho  $\lfloor n/r \rfloor$  ou  $\lceil n/r \rceil$ .

**Teorema 3.2** (Turán). *Seja  $G$  um grafo em  $n$  vértices e livre de  $K_{r+1}$ , para  $r \geq 1$ . Então  $e(G) \leq e(T_{r,n})$ , com igualdade se, e somente se,  $G = T_{r,n}$ .*

O problema de determinar o máximo número de arestas em um grafo em  $n$  vértices e que não possui um outro grafo  $F$  como subgrafo pode ser visto como a busca pelo número de Turán  $\text{ex}(n, \mathcal{F})$  e pela classe de grafos extremais em  $n$  vértices e  $\text{ex}(n, F)$  arestas. Nesta notação, o Teorema de Turán pode ser escrito como

$$\text{ex}(n, K_{r+1}) = e(T_{r,n}) \text{ e } \mathcal{H}_{\text{ex}}(n, K_{r+1}) = T_{r,n}.$$

Neste capítulo iremos descrever alguns resultados e métodos da Teoria Extremal dos Grafos. Iniciamos descrevendo alguns teoremas clássicos da Teoria Extremal dos Grafos na Seção 3.1 e, na Seção 3.2, mostramos alguns resultados conhecidos mais fortemente relacionados ao resultado principal desta dissertação.

### 3.1 Teoria Extremal dos Grafos

Iniciamos esta seção mostrando que o número de Turán  $\text{ex}(n, F)$  é assintoticamente conhecido para todos os grafos não-bipartidos através do teorema de Erdős-Stones-Simonovits (6). No restante desta seção, falamos sobre resultados conhecidos para alguns casos particulares não cobertos (ou parcialmente cobertos) por este Teorema. Mostramos também uma prova curta do Teorema de Erdős-Stone-Simonovits utilizando uma extensão do Teorema de Turán dada por Erdős e Stone (5).

Seja  $G$  um grafo em  $n$  vértices com mais de  $e(T_{r,n})$  arestas. O Teorema de Turán nos diz que  $G$ , então, possui uma cópia do grafo completo  $K_{r+1}$  como subgrafo. Note que grafos de Turán são densos: assintoticamente, eles possuem  $O(n^2)$  arestas. Note também que  $T_{r,tr}$  contém  $tK_r$ , o grafo formado por  $t$  cópias disjuntas de  $K_r$ , como subgrafo. Podemos assim pensar na seguinte extensão para o Teorema de Turán: se  $G$  possui arestas suficientes para forçar a existência de um  $K_r$  como subgrafo, quão distante estamos de forçar que  $G$  possua  $T_{r,tr}$  como subgrafo? Notavelmente, não muito. O Teorema de Erdős-Stone nos diz que, para  $r$  e  $t$  fixos e  $n$  suficientemente grande, adicionar a  $G$  apenas uma pequena fração de  $n^2$  arestas é suficiente para garantir que  $G$  possua  $T_{r,tr}$  como subgrafo (5).

**Teorema 3.3** (Erdős-Stone). *Sejam  $r$  e  $t$  inteiros, onde  $r \geq 3$  e  $t \geq 2$ . Seja também  $d$  um real tal que  $0 < d < 1/2$ . Então existem um inteiro  $n_0$ , dependendo apenas de  $k, t$  e  $d$ , tal que todo grafo*

$G$  em  $n$  vértices, com  $n \geq n_0$ , e pelo menos  $e(T_{r-1,n}) + dn^2$  arestas contém uma cópia do grafo de Turán  $T_{r,t}$  como subgrafo.

Assim obtemos um limite superior para o número de Turán para cópias disjuntas de  $K_r$  para grafos suficientemente grandes:

$$\text{ex}(n, tK_r) \leq e(T_{r-1,n}) + O(n^2).$$

Veremos adiante, na Seção 3.2, que este limite não é apertado.

Uma importante consequência do Teorema de Erdős-Stone é que ele destaca a importância do número cromático na teoria extremal dos grafos. Oferecemos uma curta prova do Teorema de Erdős-Stone-Simonovits (6) utilizando o Teorema de Erdős-Stone. Esta demonstração foi retirada de (15).

**Teorema 3.4** (Erdős-Stone-Simonovits). *Para todo grafo  $F$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{n^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1} \right).$$

*Demonstração.* Seja  $r = \chi(F)$  e  $t$  o tamanho da maior classe de cor em uma  $r$ -coloração própria de  $F$ . Então  $F \subseteq T_{r,t}$ . Portanto, pelo Teorema de Erdős-Stone, para todo  $d > 0$ , existe um inteiro  $q$  tal que todo grafo  $G$  em  $n$  vértices, com  $n \geq q$ , e pelo menos  $e(T_{r-1,n}) + dn^2$  arestas possui uma cópia de  $F$ . Logo, para todo  $d > 0$  e  $n \geq q$ ,

$$\frac{\text{ex}(n, F)}{n^2} \leq \frac{e(T_{r-1,n}) + dn^2}{n^2} = \frac{e(T_{r-1,n})}{n^2} + d.$$

Por outro lado, como  $F$  é  $r$ -cromático e o grafo  $T_{r-1,n}$  é  $(r-1)$ -colorível, temos que  $F \not\subseteq T_{r-1,n}$ . Assim,  $\text{ex}(n, F) > e(T_{r-1,n})$  e

$$\frac{\text{ex}(n, F)}{n^2} > \frac{e(T_{r-1,n})}{n^2}.$$

Juntando as duas inequações obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}(n, F)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(T_{r-1,n})}{n^2} = \frac{\chi(F) - 2}{2\chi(F) - 2}.$$

□

Ressaltamos que este Teorema é de maior interesse para grafos não-bipartidos. Se  $F$  é um grafo bipartido, o Teorema 3.4 diz apenas que  $\text{ex}(n, F) = o(n^2)$ . No restante desta seção descreveremos alguns resultados conhecidos para o número de Turán para grafos bipartidos que são melhores que o Teorema de Erdős-Stone-Simonovits. Falamos de grafos extremais que são livres de caminhos grandes, ciclos grandes e árvores.

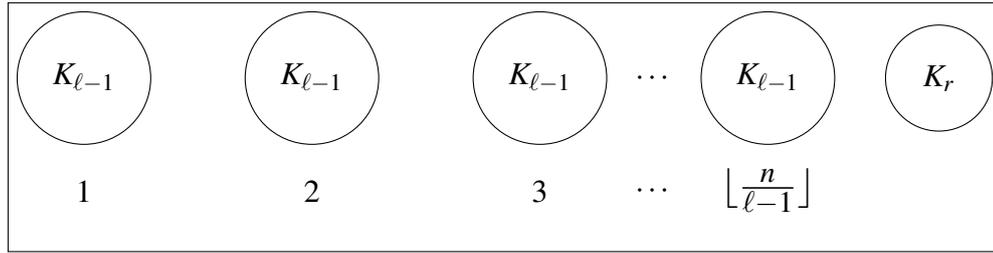


Figura 4 – O grafo  $F_{n,\ell}$

### 3.1.1 Evitando caminhos

Evitar caminhos pequenos é fácil. Todo grafo não vazio contém um  $P_2$  e um vértice com dois vizinhos forma um  $P_3$ . Logo  $\text{ex}(n, P_2) = 0$  e  $\text{ex}(n, P_3) = \lfloor n/2 \rfloor$ . Uma forma simples de conseguir um grafo maximal que é livre de cópias de qualquer grafo conexo com pelo menos  $\ell$  vértices é considerar um grafo cujas componentes conexas sejam cliques de tamanho menor ou igual a  $\ell - 1$ . Utilizamos este exemplo, de fácil visualização, para derivar o valor de  $\text{ex}(n, P_\ell)$  considerando dois casos. Utilizamos a seguinte definição.

**Definição 3.5.** Chamamos  $F_{n,\ell}$  o grafo em  $n$  vértices formado pela união disjunta de  $\lfloor n/(\ell - 1) \rfloor$  cópias de  $K_{\ell-1}$  e um  $K_r$ , onde  $r$  é o resto da divisão de  $n$  por  $\ell - 1$  (figura 4).

Contando as arestas de  $F_{n,\ell}$ , obtemos

$$e(F_{n,\ell}) = \left\lfloor \frac{n}{\ell-1} \right\rfloor \binom{\ell-1}{2} + \binom{r}{2}. \quad (3.1)$$

Erdős e Gallai mostraram que  $F_{n,\ell}$  é o único grafo extremal livre de  $P_\ell$  quando  $\ell - 1$  divide  $n$  (7).

**Teorema 3.6** (Erdős-Gallai). *Seja  $G$  um grafo em  $n$  vértices livre de  $P_\ell$ , com  $\ell \geq 2$ . Então*

$$e(G) \leq \frac{\ell-2}{2}n$$

com igualdade se e somente se  $\ell - 1$  divide  $n$  e todas as componentes conexas de  $G$  são grafos completos em  $\ell - 1$  vértices.

Como veremos adiante, evitar um caminho  $P_\ell$  é quase tão difícil quanto evitar um ciclo  $C_\ell$ ,  $\ell \geq 4$ . O limite superior dado pelo Teorema 3.6 é muito próximo do número máximo de arestas em um grafo em  $n$  vértices e livre de ciclos com pelo menos  $\ell$  vértices.

Este limite, no entanto, não é apertado. Seja  $q = \lfloor n/(\ell - 1) \rfloor$ . Observando que  $n - r = q(\ell - 1)$ , podemos reescrever  $e(F_{n,\ell})$  como

$$e(F_{n,\ell}) = \frac{\ell-2}{2}n - \frac{r(\ell-1-r)}{2}.$$

Logo,  $e(F_{n,\ell}) < (\ell - 2)n/2$  sempre que  $r > 0$  e, se  $r = 0$ , vale a igualdade no Teorema 3.6. Faudree e Schelp mostraram que  $\text{ex}(n, P_\ell) = e(F_{n,\ell})$ , para todos  $n$  e  $\ell$ , e que alguns outros grafos extremais livres de  $P_\ell$  podem ocorrer se  $\ell - 1$  não divide  $n$  (16). O mesmo resultado foi provado independentemente por Kopylov em (17), mas apenas Faudree e Schelp forneceram as estruturas extremais.

**Teorema 3.7** (Faudree-Schelp). *Seja  $r$  o resto da divisão de  $n$  por  $\ell - 1$ , para  $\ell \geq 2$ . Então*

$$\text{ex}(n, P_\ell) = e(F_{n,\ell}) = \frac{\ell - 2}{2}n - \frac{r(\ell - 1 - r)}{2}.$$

Para descrever alguns dos grafos extremais mencionados neste capítulo, fazemos uso da seguinte definição.

**Definição 3.8.** *Para  $n \geq 2\ell$ ,  $\ell > 2s$  e  $s \geq 1$ , definimos por  $H_{n,\ell,s}$  o grafo  $(K_{\ell-2s} \cup \overline{K}_{n-\ell+s}) \vee K_s$ . Note que  $e(H_{n,\ell,s}) = \binom{\ell-s}{2} + s(n-\ell+s)$  e, como  $\ell > 2s$ ,  $H_{n,\ell,s}$  é livre de  $C_\ell$ . Ilustramos o grafo  $H_{n,\ell,s}$  na figura 5.*

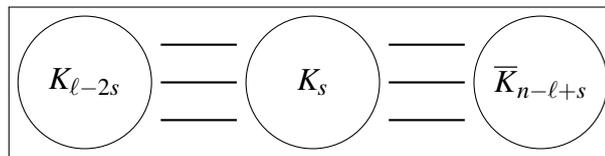


Figura 5 –  $H_{n,\ell,s} = (K_{\ell-2s} \cup \overline{K}_{n-\ell+s}) \vee K_s$

Faudree e Schelp descreveram duas construções para os possíveis grafos extremais que evitam  $P_\ell$ . Podemos ter  $H_{\text{ex}}(n, P_\ell) = F_{n,\ell}$  ou, se  $\ell$  é par e  $r = \ell/2$  ou  $\ell/2 - 1$ , o grafo extremal pode ser obtido da união disjunta de  $t$  cópias de  $K_{\ell-1}$ , para  $0 \leq t < \lfloor n/(\ell - 1) \rfloor$ , com uma cópia do grafo  $H_{n-t(\ell-1), \ell-1, \ell/2-1}$ .

Kopylov também determinou o número máximo de arestas em um grafo conexo em  $n$  vértices e livre de  $P_\ell$  (17). O mesmo resultado foi obtido por Balister, Győry, Lehel e Schelp em 2008, quando também mostraram quais são os grafos extremais e conexos livres de  $P_\ell$ .

**Teorema 3.9** (Balister-Győry-Lehel-Schelp). *Seja  $G$  um grafo conexo em  $n$  vértices e livre de  $P_{\ell+1}$ . Então*

$$e(G) \leq \max \left\{ \binom{\ell-1}{2} + (n-\ell+1), \left( \binom{\lceil (\ell+1)/2 \rceil}{2} + \left\lfloor \frac{\ell-1}{2} \right\rfloor \left( n - \left\lfloor \frac{\ell+1}{2} \right\rfloor \right) \right) \right\}$$

com igualdade se, e somente se,  $G = H_{n,\ell,1}$  ou  $G = H_{n,\ell, \lfloor (\ell-1)/2 \rfloor}$ .

### 3.1.2 Evitando ciclos

Estamos agora interessados em grafos maximais em arestas que evitam ciclos com pelo menos 4 vértices. Trivialmente, um grafo extremal que evita  $P_\ell$  também evita  $P_{\ell+1}$ , pois  $P_\ell \subseteq P_{\ell+1}$ . No entanto, não é verdade que  $C_\ell \subseteq C_{\ell+1}$ . Seja  $\text{ex}(n, C_{\geq \ell})$  o número máximo de arestas em um grafo em  $n$  cujo maior ciclo possui no máximo  $\ell - 1$  vértices. Consideramos aqui dois problemas: determinar  $\text{ex}(n, C_\ell)$  e  $\text{ex}(n, C_{\geq \ell})$ . Ressaltamos que estes problemas são de interesse maior quando consideramos ciclos pares pois, pelo Teorema 3.4, o valor de  $\text{ex}(n, C_\ell)$  é assintoticamente conhecido para ciclos ímpares.

O problema de determinar  $\text{ex}(n, C_{\geq \ell})$  possui resultados semelhantes aos enunciados na Seção 3.1.1 e alguns desses resultados foram obtidos nos mesmos artigos. Mencionamos aqui apenas o resultado que determinou o valor exato de  $\text{ex}(n, C_{\geq \ell})$ .

**Teorema 3.10** (Kopylov (17), Woodwall (18)). *Seja  $G$  um grafo em  $n$  vértices onde  $n = q(\ell - 2) + r$ , onde  $1 \leq r \leq \ell - 2$ ,  $\ell \geq 3$ ,  $q \geq 1$ . Se*

$$e(G) > q \binom{\ell - 1}{2} + \binom{r}{2},$$

*então  $G$  contém um ciclo com pelo menos  $\ell$  vértices, e este limite é o melhor possível. Portanto,*

$$\text{ex}(n, C_{\geq \ell}) = \frac{\ell - 1}{2}n - \frac{r(\ell - r)}{2}.$$

A estrutura dos grafos extremais também foi caracterizada. Novamente, lidamos com dois casos:  $H_{\text{ex}}(n, C_{\geq \ell}) = F_{n, \ell}$  ou  $\ell$  é ímpar,  $r = (\ell + 1)/2$  ou  $(\ell - 1)/2$  e o grafo extremal é formado pela união disjunta de  $t$  cópias de  $K_{\ell-1}$  e uma cópia de  $H_{n-t(\ell-2), \ell, (\ell-1)/2}$ .

Determinar  $\text{ex}(n, C_{2\ell})$  é um problema bem mais difícil. De fato, este problema é considerado um dos problemas clássicos da combinatória extremal. O primeiro resultado é mais antigo até do que o próprio Teorema de Turán. Em um artigo de 1938, Erdős determinou que  $\text{ex}(n, C_4) = \Theta(n^{3/2})$  (19). Erdős também declarou que  $\text{ex}(n, C_{2\ell}) \leq c_\ell n^{1+1/\ell}$  para alguma constante  $c_\ell$  dependendo apenas de  $\ell$  (20). Este resultado não publicado de Erdős é conhecido como o Teorema dos Ciclos Pares. O primeiro limite superior para  $c_\ell$  foi determinado por Bondy e Simonovits em 1974 (21) como consequência do seguinte teorema.

**Teorema 3.11** (Bondy-Simonovits). *Seja  $G$  um grafo em  $n$  vértices. Então  $C_{2\ell} \subseteq G$  para todo inteiro  $\ell$  que satisfaz*

$$e(G) \geq 100\ell n \text{ e } e(G) \geq 10\ell n^{1+1/\ell}.$$

Para  $n$  suficientemente grande, este teorema nos diz que  $\text{ex}(n, C_{2\ell}) \leq 10\ell n^{1+1/\ell}$ . Alguns resultados mais precisos existem para ciclos pequenos. Em particular, consideramos o  $C_4$ , o  $C_6$  e o  $C_{10}$ .

Para o  $C_4$ , Erdős, Rényi e Sós mostraram que  $\text{ex}(n, C_4) = (1/2)n^{3/2} + o(n^{3/2})$  (22). Benson mostrou construções que provam que  $\text{ex}(n, C_{2\ell}) = \Omega(n^{1+1/\ell})$  quando  $\ell \in \{3, 5\}$  (23). Estas construções mostram que o expoente  $1 + 1/\ell$  é ótimo para o  $C_6$  e o  $C_{10}$ . A existência de grafos com  $\Theta(n^{1+1/\ell})$  arestas livres de  $C_8$  ou de ciclos pares maiores que o  $C_{10}$  não ainda foi determinada.

O Teorema 3.11 foi melhorado por Pikhurko em 2012 (24).

**Teorema 3.12** (Pikhurko). *Para todo  $\ell \geq 2$  e  $n \geq 1$ , temos que*

$$\text{ex}(n, C_{2\ell}) \leq (\ell - 1)n^{1+1/\ell} + 16(\ell - 1)n.$$

### 3.1.3 Evitando árvores

Motivados pelo fato de que o número de Turán para  $P_\ell$  e  $S_\ell$ , onde  $S_\ell$  é o grafo estrela com  $\ell$  vértices, é basicamente o mesmo, Erdős e Sós conjecturaram que o valor de  $\text{ex}(n, P_\ell)$  é também suficiente para árvores.

**Conjectura 3.13** (Erdős-Sós (20)). *Seja  $T_\ell$  uma árvore em  $\ell$  vértices. Se  $G$  é um grafo em  $n$  vértices e livre de  $T_\ell$  então*

$$e(G) \leq \frac{\ell - 2}{2}n.$$

Esta conjectura foi validada para uma variedade de casos particulares, alguns considerando alguma condição sobre a árvore  $T$  que desejamos evitar e alguns considerando alguma propriedade sobre o grafo  $G$  que deve ser livre de árvores.

McLennan mostrou que a conjectura é válida quando consideramos apenas árvores com diâmetro menor ou igual a 4 (25). Sidorenko validou a conjectura para árvores  $T_\ell$  que possuem um vértice vizinho de pelo menos  $\ell/2$  vértices de grau 1 (26). Para condições sobre o grafo, Saclé e Wozniak provaram que a conjectura também é verdadeira para grafos livres de  $C_4$  (27). Wang, Li e Liu provaram que é suficiente considerar apenas grafos  $G$  tais que  $\overline{G}$ , o complemento do grafo  $G$ , possua cintura maior ou igual a 4 (28). Ajtai, Komlós, Simonovits e Szemerédi possuem uma prova, ainda não publicada, da validade da conjectura de Erdős-Sós para árvores suficientemente grandes (29).

Para florestas, Brandt generalizou o Teorema 3.15, que determina  $\text{ex}(n, \ell P_2)$ , para florestas em  $\ell$  arestas que não possuem vértices isolados (30).

**Teorema 3.14** (Brandt). *Seja  $G$  um grafo em  $n$  vértices. Se*

$$e(G) > \max \left\{ \binom{\ell-1}{2} + (\ell-1)(n-\ell+1), \binom{2\ell-1}{\ell} \right\},$$

*então  $G$  contém toda floresta com  $\ell$  arestas que não possui vértices isolados.*

### 3.2 Número de Turán para Cópias Disjuntas de Caminhos

Nesta seção, estamos interessados no número de Turán para grafos formados pela união disjunta de outros grafos menores. Em particular, desejamos encontrar o número de Turán para grafos formados pela união disjuntas de caminhos. Lembramos que denotamos por  $kF$  o grafo formado por  $k$  cópias disjuntas de um grafo  $F$ .

Frequentemente, o problema de determinar o número de Turán  $\text{ex}(n, kF)$  se apresenta como uma extensão natural de algum problema já conhecido. Por exemplo, o Teorema de Turán determina  $\text{ex}(n, K_r)$  e uma extensão natural seria determinar  $\text{ex}(n, kK_r)$ . O Teorema de Erdős-Stone fornece, em particular, um limite superior para  $\text{ex}(n, kK_r)$  quando  $n$  é suficientemente grande. Porém, este teorema mostra condição suficiente para encontrar um  $k$  cópias de  $K_r$  que se comportam de uma determinada maneira (formam um grafo de Turán) e portanto é natural acreditar que este limite não seja apertado. Simonovits mostrou que, de fato, o limite não é apertado provando que, para  $n$  suficientemente grande,  $K_{k-1} \vee T_{r, n-k+1}$  é o único grafo extremal livre de  $kK_{r+1}$  (31). Para alguns grafos pequenos, o problema também se encontra resolvido: Erdős e Gallai, no mesmo artigo em que fornecem o número de Turán para caminhos, estenderam este resultado para o grafo formado por  $k$  arestas independentes.

**Teorema 3.15** (Erdős-Gallai).

$$\text{ex}(n, kP_2) = \max \left\{ \binom{k-1}{2} + (k-1)(n-k+1), \binom{2k-1}{2} \right\}.$$

Se considerarmos grafos maiores, no entanto, o problema cresce rapidamente de dificuldade. Embora o valor exato de  $\text{ex}(n, kF)$  seja desconhecido para muitas classes de grafos, Gorgol ofereceu limites superior e inferior para o número de Turán para cópias disjuntas de grafos conexos (8).

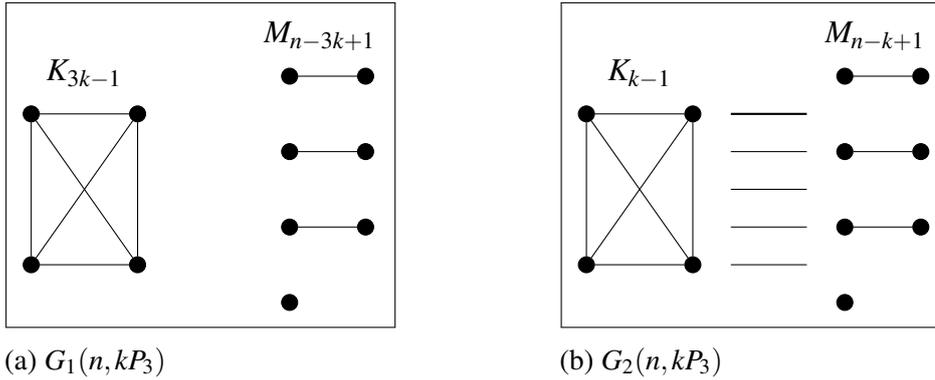


Figura 6 – Grafos extremais que excluem  $kP_3$ .

Seja  $F$  um grafo conexo em  $r$  vértices. O limite inferior dado por Gorgol advém do fato de que nenhum dos seguintes grafos contém  $k$  cópias de  $F$ :

$$G_1(n, kF) = K_{kr-1} \cup H_{\text{ex}}(n - kr + 1, F);$$

$$G_2(n, kF) = K_{k-1} \vee H_{\text{ex}}(n - k + 1, F).$$

Estes grafos são ilustrados na Figura 6. Como observado no Capítulo 1,  $G_1(n, kF)$  possui apenas  $k - 1$  cópias de  $F$  em  $K_{kr-1}$  e o restante do grafo é livre de  $F$ . Em  $G_2(n, kF)$ , toda cópia de  $F$  contém pelo menos um vértice de  $K_{k-1}$  e portanto o grafo contém no máximo  $k - 1$  cópias de  $F$ . Temos assim o limite inferior dado por Gorgol.

**Teorema 3.16** (Gorgol). *Seja  $F$  um grafo conexo em  $r$  vértices. Temos então que  $\text{ex}(n, kF) \geq \max \{e(G_1(n, kF)), e(G_2(n, kF))\}$ .*

Pelos Teoremas 3.6 e 3.15, os valores exatos de  $\text{ex}(n, P_\ell)$  e  $\text{ex}(n, kP_2)$  são conhecidos. Portanto, o limite inferior para  $\text{ex}(n, kF)$  dado por Gorgol é de interesse particular quando  $F$  é um caminho em pelo menos três vértices. Focamos no caso em que o caminho tem exatamente 3 vértices.

Seja  $g_1(n, k) = e(G_1(n, kP_3))$  e  $g_2(n, k) = e(G_2(n, kP_3))$ . Como  $\text{ex}(n, P_3) = e(M_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ , temos que

$$g_1(n, k) = \binom{3k-1}{2} + \left\lfloor \frac{n-3k+1}{2} \right\rfloor;$$

$$g_2(n, k) = \binom{k-1}{2} + (n-k+1)(k-1) + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor.$$

Se  $3k \leq n < 5k$ , temos que  $g_1(n, k) \geq g_2(n, k)$ . Definimos

$$\text{Gorgol}(n, k) = \begin{cases} g_1(n, k), & \text{para } 3k \leq n < 5k, \\ g_2(n, k), & \text{para } n \geq 5k. \end{cases}$$

Seja também  $\mathcal{P} = P_{\ell_1} \cup P_{\ell_2} \cup \dots \cup P_{\ell_k}$ . Nos últimos 5 anos, houve bastante progresso no problema de determinar  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$  sob determinadas condições. Consideramos dois casos distintos. Primeiro, descrevemos os resultados conhecidos para o caso em que todos os caminhos que compõem  $\mathcal{P}$  possuem o mesmo tamanho. Isto é,  $\ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_k$ . Se  $\mathcal{P} = kP_3$ , temos que  $\text{ex}(n, \mathcal{P}) \geq \text{Gorgol}(n, k)$ . A seguinte conjectura foi feita por Gorgol (8):

**Conjectura 3.17** (Gorgol).

$$\text{ex}(n, kP_3) = \text{Gorgol}(n, k).$$

No mesmo artigo, Gorgol mostrou que esta conjectura é de fato válida quando  $k \in \{2, 3\}$  (8). Bushaw e Kettle mostraram que a conjectura de Gorgol é válida para  $n$  suficientemente grande determinando  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$  quando  $\mathcal{P} = kP_\ell$ , para  $\ell \geq 4$  (9).

**Teorema 3.18** (Bushaw-Kettle). Para  $k \geq 2$ ,  $\ell \geq 4$  e  $n \geq 2\ell + 2k\ell(\lceil \ell/2 \rceil + 1) \binom{\ell}{\lceil \ell/2 \rceil}$ ,

$$\text{ex}(n, kP_\ell) = \binom{k \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor - 1}{2} + \left( k \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor - 1 \right) \left( n - k \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor + 1 \right) + c_\ell,$$

onde  $c_\ell = 1$  se  $\ell$  é ímpar, e  $c_\ell = 0$  se  $\ell$  é par.

A construção utilizada para a demonstração deste teorema também determina o grafo extremal  $H_{\text{ex}}(n, kP_\ell)$ . Seja  $F_n$  o grafo vazio em  $n$  vértices e  $t = k \lfloor \ell/2 \rfloor - 1$ . Considere o grafo  $H = K_t \vee F_{n-t}$ . Se  $\ell$  é par, então  $H_{\text{ex}}(n, kP_\ell) = H$  e, se  $\ell$  é ímpar,  $H_{\text{ex}}(n, kP_\ell) = H$  e adicionamos uma aresta ao grafo vazio  $F_{n-t}$  usado para construir  $H$ . Os dois casos são ilustrados na Figura 7. Esta demonstração também mostra que a construção utilizada é ótima para  $n = O(k\ell^2 2^\ell)$ . Foi também conjecturado que este resultado é válido para  $n = O(k\ell)$ .

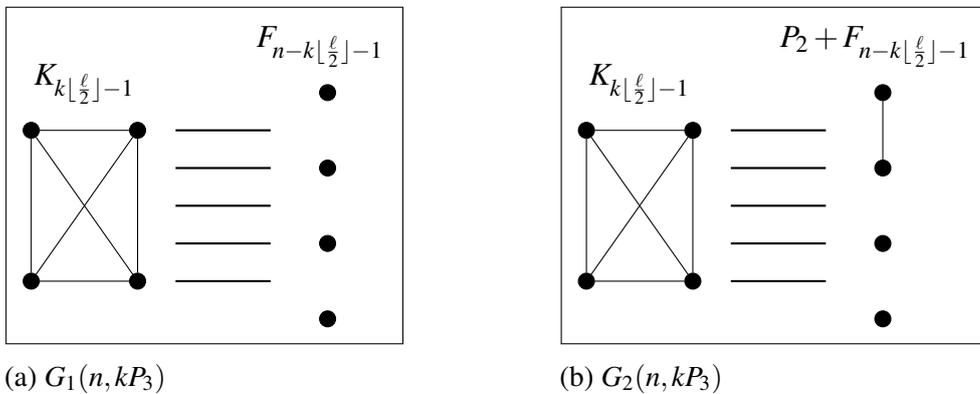


Figura 7 – Grafos extremais que excluem  $kP_3$ .

Agora, consideramos que os caminhos que compõem  $\mathcal{P}$  não necessariamente possuem o mesmo tamanho. O valor de  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$  foi determinado por Lidický, Liu e Palmer quando

$n$  é suficientemente grande e pelo menos um dos caminhos que compõem  $\mathcal{P}$  não é um  $P_3$  (10). Neste mesmo artigo, foi também determinado o valor de  $\text{ex}(n, kS_\ell)$  para  $n$  suficientemente grande.

**Teorema 3.19** (Lidický-Liu-Palmer). *Seja  $\mathcal{P} = P_{\ell_1} \cup P_{\ell_2} \cup \dots \cup P_{\ell_k}$ . Se pelo menos algum  $\ell_i$  é diferente de 3, então para  $n$  suficientemente grande,*

$$\text{ex}(n, \mathcal{P}) = \left( \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{\ell_i}{2} \right\rfloor - 1 \right) \left( n - \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{\ell_i}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left( \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{\ell_i}{2} \right\rfloor - 1 \right) + c,$$

onde  $c = 1$  se todos os  $\ell_i$  são ímpares e  $c = 0$  caso contrário. Ademais, o grafo extremal  $H_{\text{ex}}(n, \mathcal{P})$  é único.

O grafo extremal dado pelo Teorema 3.19 é como se segue. Seja  $G_{\mathcal{P}}(n)$  o grafo em  $n$  vértices com um conjunto  $X$  de  $(\sum_{i=1}^k \lfloor \ell_i/2 \rfloor) - 1$  vértices universais junto com uma única aresta em  $G_{\mathcal{P}}(n) - X$  se todo  $\ell_i$  é ímpar ou  $n - |X|$  vértices isolados caso contrário. Então  $H_{\text{ex}}(n, \mathcal{P}) = G_{\mathcal{P}}(n)$ . Note que  $G_{\mathcal{P}}(n)$  é exatamente o grafo extremal dado por Bushaw e Kettle pela demonstração do Teorema 3.18 quando todos os caminhos que compõem  $\mathcal{P}$  possuem o mesmo tamanho. Portanto, excetuando o caso quando  $\mathcal{P} = kP_3$ , o Teorema 3.19 é uma generalização do Teorema 3.18.

Para ambos os casos, então, o valor de  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$  é conhecido para  $n$  suficientemente grande: se algum caminho que compõe  $\mathcal{P}$  não for um  $P_3$ ,  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$  é dado pelo Teorema 3.19 e, caso contrário, é dado pelo Teorema 3.18. Para  $n$  pequeno, no entanto, pouco se sabe sobre o número de Turán para cópias disjuntas de caminhos. Nesta dissertação, oferecemos uma resposta positiva para a Conjectura de Gorgol (3.17) através de um algoritmo que, para todo  $n \geq 3k$ , dado um grafo  $G$  com mais do que  $\text{Gorgol}(n, k)$  arestas, encontra pelo menos  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em  $G$  (11).

**Teorema 3.20.** *Seja*

$$\text{Gorgol}(n, k) = \begin{cases} \binom{3k-1}{2} + \lfloor \frac{n-3k+1}{2} \rfloor, & \text{para } 3k \leq n < 5k, \\ \binom{k-1}{2} + (n-k+1)(k-1) + \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor, & \text{para } n \geq 5k. \end{cases}$$

Então  $\text{ex}(n, kP_3) = \text{Gorgol}(n, k)$  para  $n \geq 3k$ .

Observe que, se  $n < 3k$ ,  $\text{ex}(n, kP_3) = \binom{n}{2}$ . No Capítulo 4 mostramos a demonstração do Teorema 3.20. Até esta data, permanece em aberto determinar  $\text{ex}(n, \mathcal{P})$  para  $n$  pequeno quando pelo menos um dos caminhos que compõem  $\mathcal{P}$  não é um  $P_3$ .

## 4 PROVA DA CONJECTURA DE GORGOL

Neste capítulo, oferecemos uma prova para a Conjectura de Gorgol na forma de um algoritmo que, dado como entrada um grafo  $G = (V, E)$ , encontra um conjunto de cópias disjuntas de  $P_3$  em  $G$ . Mostramos que, se  $G$  possui  $n$  vértices e mais do que  $\text{Gorgol}(n, k)$  arestas, então o algoritmo retorna pelo menos  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em  $G$ .

O algoritmo fornecido irá construir iterativamente uma coleção  $\mathcal{Q}$  de  $P_3$ , iniciando com  $\mathcal{Q} = \emptyset$ . Cada iteração percorrerá uma sequência ordenada de 4 passos buscando por uma melhoria para a coleção atual. Definimos esta condição de melhoria na Seção 4.2.

Mostramos que, se em uma dada iteração, um dos 4 passos não for capaz de encontrar uma melhoria para a atual coleção  $\mathcal{Q}$ , podemos inferir algumas propriedades sobre o grafo  $G$ . De mão destas propriedades, mostramos que o algoritmo não para enquanto a coleção tiver tamanho menor do que  $k$  ou, caso contrário, podemos estimar inferiormente o número de não-arestas entre vértices em  $\mathcal{Q}$  e encontrar uma contradição.

### 4.1 Visão geral do algoritmo

Uma  $P_3$ -configuração em  $G$  é uma família de conjuntos disjuntos de vértices,  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ , tal que, para  $1 \leq i \leq s$ ,  $|Q_i| = 3$  e  $G[Q_i]$ , o subgrafo de  $G$  induzido por  $Q_i$ , contém uma cópia de  $P_3$  como subgrafo. O tamanho da  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_s\}$  é  $s$  e denotado  $s(\mathcal{Q})$ . O número de triângulos de  $\mathcal{Q}$  é o número de conjuntos  $Q_i$  que induzem triângulos em  $G$ . Dizemos que uma  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q}'$  é uma melhoria de  $\mathcal{Q}$  se  $s(\mathcal{Q}') > s(\mathcal{Q})$  ou se  $s(\mathcal{Q}') = s(\mathcal{Q})$  e  $\mathcal{Q}'$  possui mais triângulos do que  $\mathcal{Q}$ .

Iniciamos com uma  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q}_0$  de tamanho 0 e procedemos através de uma sequência de iterações. Para  $i > 1$ , na  $i$ -ésima iteração, o algoritmo segue uma sequência de passos em busca de uma melhoria  $\mathcal{Q}_i$  da atual  $P_3$ -configuração conhecida  $\mathcal{Q}_{i-1}$ . Os passos serão executados ordenadamente e, sempre que um passo encontra com sucesso uma melhoria, atualizamos as estruturas necessárias para o bom funcionamento do algoritmo e iniciamos uma nova iteração a partir do primeiro passo. Desta forma, podemos garantir que se um passo não obtém sucesso em encontrar uma melhoria, então todos os passos anteriores também não foram bem sucedidos na busca. Se uma melhoria não é encontrada em nenhum passo da iteração, então o algoritmo para. Uma visão geral do algoritmo é dada na Figura 8. As setas pontilhadas indicam que o passo não obteve sucesso em encontrar uma melhoria para a atual  $P_3$ -configuração. As

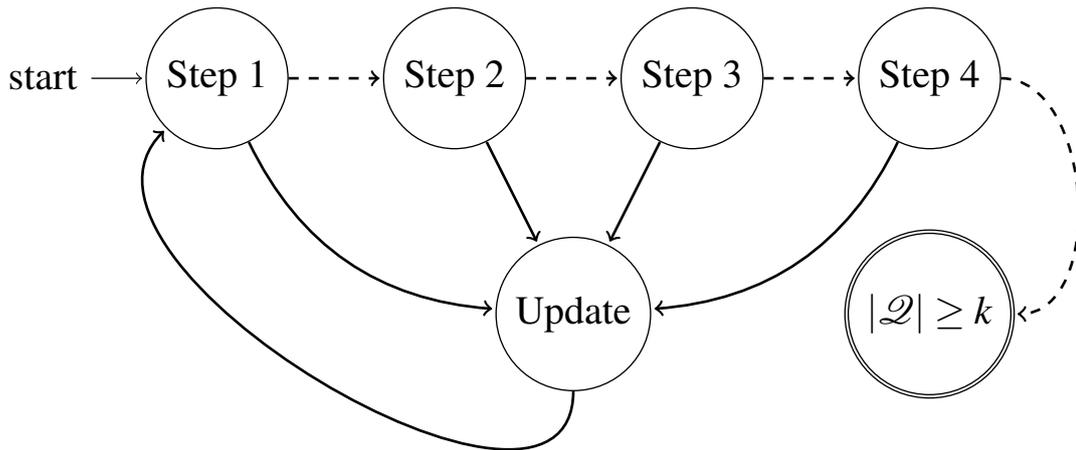


Figura 8 – Visão geral do algoritmo.

setas contínuas indicam que uma melhoria foi encontrada.

## 4.2 Iterações do Algoritmo

Nesta seção, descrevemos o comportamento do algoritmo em cada iteração. Cada iteração segue uma sequência de passos em uma dada ordem.

Na  $i$ -ésima iteração, cada passo checa por uma condição em  $\mathcal{Q}_{i-1}$  para obter uma melhoria  $\mathcal{Q}_i$ . Descreveremos a sequência de passos do algoritmo indexados pela ordem em que eles são verificados. Em cada um desses passos, considere  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{i-1} = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ ,  $U = Q_1 \cup \dots \cup Q_s$  e  $F = V(G) - U$ .

Com o intuito de facilitar a compreensão da relação entre os passos do algoritmo e a conjectura de Gorgol nós provamos alguns resultados que são válidos quando um dos passos não mais é capaz de encontrar uma melhoria para a atual  $P_3$ -configuração em uma dada iteração. Para provar estes resultados, assumimos que  $G$  possui  $n$  vértices,  $e(G) > \text{Gorgol}(n, k)$  e  $s(\mathcal{Q}) < k$ . Afirmamos aqui estas condições e, a fim de evitar repetições, não mais em cada um dos resultados mencionados.

### 4.2.1 Passo 1

Se  $F$  possui um vértice  $u$  que possui dois vizinhos distintos em  $F$ , então escolha  $Q$  contendo  $u$  e dois de seus vizinhos em  $F$  e defina  $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q} \cup Q$ .

Quando o Passo 1 não é bem sucedido em encontrar uma melhoria, é esperado que

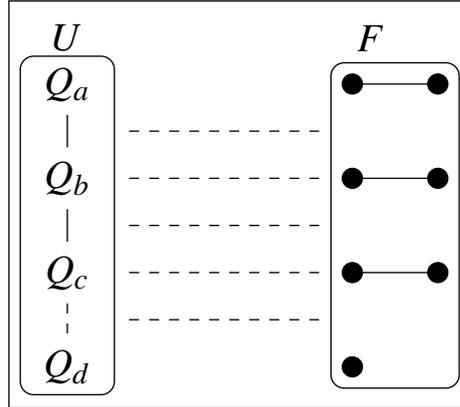


Figura 9 – O grafo  $G$  após o Passo 1.

existam alguns conjuntos  $Q_j$  contendo muitas arestas com uma extremidade em  $F$ . Contamos com a existência destes conjuntos para encontrar uma melhoria para a atual  $P_3$ -configuração, reconstruindo-os da forma descrita nos passos seguintes. Seja  $EE_j(G) = e_G(Q_j) + e_G(Q_j, F) - 9$ . Dizemos que  $Q_j$  possui *arestas em excesso* se  $EE_j(G) \geq 1$ . Tais conjuntos serão fundamentais para encontrar uma melhoria desejada para  $\mathcal{Q}$ , portanto mostraremos que pelo menos um conjunto  $Q_j$  possui arestas em excesso. Este fato surge como um corolário da seguinte inequação, que é de suma importância em nossa prova para a Conjectura de Gorgol. A figura 9 ilustra a estrutura do grafo  $G$  após o Passo 1.

**Lema 4.1.** *Seja  $\mathcal{Q}^+ = \{Q_1, \dots, Q_{k-1}\}$  onde os conjuntos  $Q_{s(\mathcal{Q})+1}, \dots, Q_{k-1}$  são conjuntos disjuntos de três vértices em  $F$  e  $U^* = U \cup Q_{s+1} \cup \dots \cup Q_{k-1}$ . Se, para  $i \leq j \leq k-1$ ,  $EE_j^*(G) = e_G(Q_j) + e_G(Q_j, V(G) \setminus U^*) - 9$ , então*

$$\sum_{1 \leq i \leq k} EE_i^*(G) > \sum_{1 \leq i < j < k} ne(Q_i, Q_j).$$

*Demonstração.* Seja  $G^* = G_1(n, kP_3)$ , lembrando que  $G^* = K_{3k-1} \cup M_{n-3k+1}$ . Considere também que  $G^*$  e  $G$  possuem o mesmo conjunto de vértices  $V$ . Em particular, considere que o conjunto de vértices de  $K_{3k-1}$  em  $G^*$  contém  $U^*$ .

Podemos contar as arestas de  $G$  como aquelas que possuem pelo menos uma extremidade em  $U^*$  junto com as arestas que não possuem nenhuma extremidade em  $U^*$ . Logo, temos que  $e(G) = e_G(U^*, V) + e_G(V \setminus U^*)$ . Similarmente, temos que  $e(G^*) = e_{G^*}(U^*, V) + e_{G^*}(V \setminus U^*)$ . Subtraindo uma equação pela outra e arrumando os termos, obtemos

$$e_G(U^*, V) - e_{G^*}(U^*, V) = e(G) - e(G^*) + e_{G^*}(V \setminus U^*) - e_G(V \setminus U^*).$$

Note que  $e(G) > \text{Gorgol}(n, k) \geq e(G^*)$ . Note também que, se o Passo 1 não se aplica, então

$V \setminus U^*$  induz um emparelhamento perfeito quase perfeito em  $G^*$  e induz um grafo com grau máximo menor do que 2 em  $G$ . Portanto, concluímos que  $e_{G^*}(V \setminus U^*) - e_G(V \setminus U^*) > 0$ .

Podemos contar as arestas de  $G$  como se segue:

$$\begin{aligned} e_G(U^*, V) &= \sum_{1 \leq i < k} (e_G(Q_i) + e_G(Q_i, V \setminus U^*)) + \sum_{1 \leq i < j < k} e_G(Q_i, Q_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < k} EE_i^*(G) + 9(k-1) + \sum_{1 \leq i < j < k} e_G(Q_i, Q_j). \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para  $G^*$  e notando que  $EE_j^*(G^*) = 0$  e  $e_{G^*}(Q_i, Q_j) = 9$  obtemos

$$\begin{aligned} e_{G^*}(U^*, V) &= \sum_{1 \leq i < k} EE_i^*(G^*) + 9(k-1) + \sum_{1 \leq i < j < k} e_{G^*}(Q_i, Q_j) \\ &= 9(k-1) + \sum_{1 \leq i < j < k} 9 \end{aligned}$$

e portanto

$$e_G(U^*, V) - e_{G^*}(U^*, V) = \sum_{1 \leq i < k} EE_i^*(G) + \sum_{1 \leq i < j < k} (e_G(Q_i, Q_j) - 9) > 0.$$

O resultado desejado segue de uma reorganização dos termos desta inequação, observando que  $ne_G(Q_i, Q_j) = 9 - e_G(Q_i, Q_j)$ .  $\square$

**Corolário 4.2.** *Existe pelo menos um conjunto em  $\mathcal{Q}$  com arestas em excesso em  $G$ .*

*Demonstração.* Por definição,  $EE_j(G) \geq EE_j^*(G)$ , para  $j \leq s$ . Temos também que  $EE_j^*(G) \leq 0$  quando  $j > s(\mathcal{Q})$  pois  $\Delta(G[F]) \leq 1$  quando o Passo 1 não se aplica. Usando o Lema 4.1 temos que

$$\sum_{1 \leq i \leq s(\mathcal{Q})} EE_i(G) \geq \sum_{1 \leq i < k} EE_i^*(G) > \sum_{1 \leq i < j < k} ne_G(Q_i, Q_j).$$

Como o lado direito desta desigualdade estrita é não-negativo, então pelo menos um termo no lado esquerdo deve ser positivo e o resultado segue.  $\square$

Seja  $\mathcal{L} = \{Q_j \in \mathcal{Q} \mid j \leq s \text{ e } EE_j(G) \geq 1\}$ . Para todo  $Q_j \in \mathcal{L}$ , seja  $x_j$  o vértice de  $Q_j$  com maior número de vizinho em  $F$ . Nos próximos passos, utilizaremos os seguintes lemas auxiliares para encontrar melhorias em  $\mathcal{Q}$ .

**Lema 4.3.** *Se  $Q_j \in \mathcal{L}$ , então  $e(Q_j, F) \geq 7$  e  $d(x_j, F) \geq 3$ .*

*Demonstração.* De  $EE_j(G) = e(Q_j) + e(Q_j, F) - 9 \geq 1$  temos que  $e(Q_j, F) \geq 7$  pois  $e(Q_j) \leq 3$ . Ademais, se  $d(v, F) \leq 2$  para todos os vértices em  $Q_j$ , então  $e(Q_j, F) \leq 6$ . Esta contradição prova o lema.  $\square$

**Lema 4.4.** *Seja  $C$  um 4-ciclo contido em um grafo  $G$ . Se  $C$  possui pelo menos dois vizinhos  $w_1$  e  $w_2$  não contidos em  $C$ , então  $G[V(C) \cup \{w_1, w_2\}]$  possui duas cópias disjuntas de  $P_3$ .*

*Demonstração.* Se  $w_1$  e  $w_2$  possuem um vizinho em comum em  $C$ , então estes três vértices formam um  $P_3$  e o segundo  $P_3$  é obtido diretamente de  $C$ . Se  $w_1$  e  $w_2$  possuem dois vizinhos distintos em  $C$ , então é fácil obter duas cópias de  $P_3$  em  $G[V(C) \cup \{w_1, w_2\}]$ , uma contendo  $w_1$  e a outra contendo  $w_2$  como extremidades.  $\square$

#### 4.2.2 Passo 2

Para cada  $Q \in \mathcal{Q}$ , faça um dos seguintes se as condições são satisfeitas.

1. Se  $G[Q \cup F]$  contém duas cópias disjuntas de  $P_3$  com conjuntos de vértices  $Q'$  e  $Q''$ , então defina  $\mathcal{Q}_i = \{Q', Q''\} \cup \mathcal{Q} \setminus Q$ .
2. Se  $Q$  não induz triângulo mas  $G[Q \cup F]$  contém um triângulo com conjunto de vértices  $Q'$ , então defina  $\mathcal{Q}_i = \{Q'\} \cup \mathcal{Q} \setminus \{Q\}$ .

Obtemos os seguintes resultados se o Passo 2 não se aplica.

**Lema 4.5.** *Nenhum vértice em  $F$  possui dois vizinhos em qualquer  $Q_a \in \mathcal{L}$ .*

*Demonstração.* Seja  $Q_a \in \mathcal{L}$  e suponha que dois vértices de  $Q_a$   $v_1$  e  $v_2$  possuam um vizinho em comum  $w$  em  $F$ . Mostramos que o Passo 2 aplica-se para obter uma contradição.

Se  $v_1$  e  $v_2$  não possuem vizinho em comum em  $Q_a$ , então eles são adjacentes em  $G$  e  $Q_a$  não induz triângulo, mas  $\{v_1, v_2, w\}$  induz triângulo e o Passo 2 aplica-se. Se  $v_1$  e  $v_2$  possuem vizinho em comum em  $Q_a$ , então existe um 4-ciclo  $C$  com conjunto de vértices  $Q_a \cup \{w\}$ . Como  $x_a$  deve possuir pelo menos dois vizinhos distintos em  $F$  que não estão em  $C$ , o Lema 4.4 garante que  $G[Q_a \cup F]$  contém pelo menos duas cópias disjuntas de  $P_3$  e o Passo 2 aplica-se.  $\square$

A Figura 10 ilustra as possíveis melhorias que podem ser encontradas na demonstração por contradição do Lema 4.5.

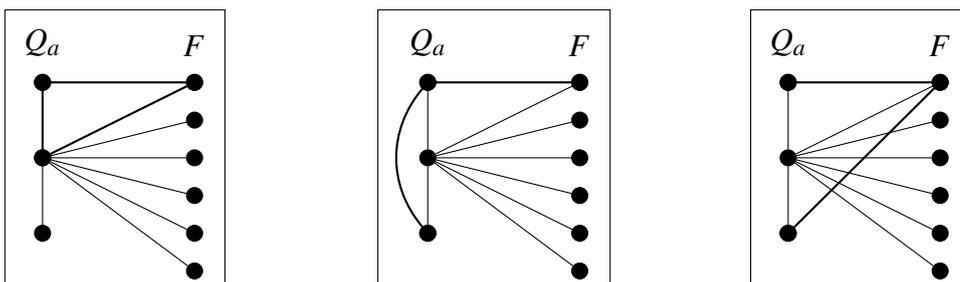


Figura 10 – Possíveis melhorias encontradas na demonstração do Lema 4.5.

**Lema 4.6.** Se  $Q_a \in \mathcal{L}$ , então  $d(x_a, F) \geq 6$ .

*Demonstração.* Primeiro, suponha que  $Q_a$  induz triângulo em  $G$ . Se um vértice  $w \in F$  possui um vizinho em  $Q_a \setminus \{x_a\}$ , então  $G[\{w\} \cup Q_a \setminus \{x_a\}]$  contém um  $P_3$  como subgrafo e  $x_a$  tem dois vizinhos em  $F \setminus \{w\}$  pelo Lema 4.3 e o Passo 2 pode ser aplicado. Logo, todos os vizinhos de  $Q_a$  em  $F$  devem possuir  $x_a$  como único vizinho em  $Q_a$ . Pelo Lema 4.3, temos que  $e(Q_a, F) \geq 7$  que implica  $d(x_a, F) \geq 7$ .

Suponha agora que  $Q_a$  induz  $P_3$  em  $G$ . Se algum vértice em  $Q_a \setminus \{x_a\}$  possui dois vizinhos em  $F$ , então  $x_a$  também possui dois vizinhos em  $F$  e estes vértices são todos distintos pelo Lema 4.5. Portanto,  $G[Q_a \cup F]$  contém duas cópias disjuntas de  $P_3$  e o Passo 2 pode ser aplicado. Concluimos que se  $EE_a(G) \geq 1$  então  $e(Q_a, F) \geq 8$  e  $d(x_j, F) \geq 6$ .  $\square$

Na busca por uma melhoria para  $\mathcal{Q}$ , o Lema 4.6 nos diz que se  $Q_a, Q_b \in \mathcal{L}$ , então nós podemos escolher vizinhos distintos de  $x_a$  e  $x_b$  em  $F$  para substituir  $Q_a$  e  $Q_b$  por  $Q'_a$  e  $Q'_b$  usando apenas vértices em  $\{x_a, x_b\} \cup F$ . Esta observação será recorrente nos passos seguintes para buscar uma melhoria para  $\mathcal{Q}$  utilizando os vértices em  $(Q_a \cup Q_b) \setminus \{x_a, x_b\}$  para encontrar uma outra cópia de  $P_3$ .

### 4.2.3 Passo 3

Para todos  $Q_a, Q_b \in \mathcal{Q}$  distintos, faça um dos seguintes se as condições são satisfeitas.

1. Se  $G[Q_a \cup Q_b \cup F]$  contém três cópias disjuntas de  $P_3$  com conjuntos de vértices  $Q, Q'$  e  $Q''$  como subgrafo, então defina  $\mathcal{Q}_i = \{Q, Q', Q''\} \cup \mathcal{Q} \setminus \{Q_a, Q_b\}$ .
2. Se  $Q_a$  e  $Q_b$  não induzem triângulo em  $G$  mas  $G[Q_b \cup Q_a \cup F]$  contém um triângulo com conjunto de vértices  $Q$  e uma cópia disjuntas de  $P_3$  com conjunto de vértices  $Q'$ , então defina  $\mathcal{Q}_i = \{Q, Q'\} \cup \mathcal{Q} \setminus \{Q_a, Q_b\}$ .

Se o Passo 3 não se aplica, obtemos os seguintes resultados.

**Lema 4.7.** Se  $Q_a, Q_b \in \mathcal{L}$ , então  $ne(Q_a, Q_b) \geq 4$ .

*Demonstração.* Para fins de contradição, assumamos que  $e(Q_a, Q_b) \geq 6$  e seja  $G' = G[(Q_a \cup Q_b) \setminus \{x_a, x_b\}]$ . Note que encontrar uma cópia de  $P_3$  em  $G'$  significa que podemos encontrar outras duas cópias disjuntas de  $P_3$  escolhendo  $x_a, x_b$  e dois vizinhos disjuntos de cada um destes vértices em  $F$ . Isso implica que a primeira condição do Passo 3 pode ser aplicada. Como  $x_a$  e  $x_b$  podem tocar no máximo 5 arestas entre  $Q_a$  e  $Q_b$  (Figura 11), existe pelo menos uma aresta em  $G'$  com

uma extremidade em  $Q_a$  e outra em  $Q_b$ . Se  $G[Q_a \setminus \{x_a\}]$  ou  $G[Q_b \setminus \{x_b\}]$  possui uma aresta, então unir esta aresta com uma aresta entre  $Q_a$  e  $Q_b$  resulta em um cópia de  $P_3$  em  $G'$ . Se isto não acontece, então  $Q_a$  e  $Q_b$  não induzem triângulos em  $G$ . No entanto,  $e(Q_a, Q_b) \geq 6$  implica que existe um vértice  $v \in Q_a \setminus \{x_a\}$  com  $d(v, Q_b) \geq 2$ . Se  $v$  é adjacente a ambos os vértices em  $Q_b \setminus \{x_b\}$ , então temos uma cópia de  $P_3$  em  $G'$ . Caso contrário, existe um triângulo em  $G[Q_b \cup Q_a \setminus \{x_a\}]$  e podemos encontrar uma outra cópia de  $P_3$  escolhendo  $x_a$  junto com dois de seus vizinhos em  $F$  e a segunda condição do Passo 3 pode ser aplicada.  $\square$

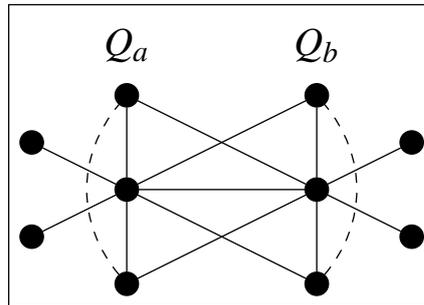


Figura 11 – Exemplo do número máximo de arestas tocando os vértices  $x_a$  e  $x_b$  no Lema 4.7.  $x_a$  e  $x_b$  são os vértices centrais de  $Q_a$  e  $Q_b$ .

**Lema 4.8.** Se  $ne(Q_a, Q_b) \leq 1$  para  $Q_a \in \mathcal{L}$  e  $Q_b \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{L}$ , então  $e(Q_b, F) = 0$ .

*Demonstração.* Assuma, para fins de contradição, que temos  $Q_a \in \mathcal{L}$  e  $Q_b \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_a\}$  com  $e(Q_a, Q_b) \geq 8$  e  $e(Q_b, F) \geq 1$ . O número de arestas entre  $Q_a$  e  $Q_b$  implica que existe um vértice  $v \in Q_a \setminus \{x_a\}$  que é adjacente a todos os vértices em  $Q_b$  e  $Q_b \cup \{v\}$  é o conjunto de vértices de um 4-circuito  $C$  em  $G$  e ambos os vértices em  $Q_a \setminus \{v\}$  possuem um vizinho em  $Q_b \cup \{v\}$ . Ademais,  $e(Q_b, F) \geq 1$  implica que  $C$  é adjacente ao vértice em  $Q_a \setminus \{x_a, v\}$  e a um vértice  $w$  em  $F$ . Logo, pelo Lema 4.4, existe duas cópias disjuntas de  $P_3$  em  $G[(Q_a \cup Q_b \cup \{w\}) \setminus \{x_a\}]$ . Podemos então escolher  $x_a$  junto com dois de seus vizinhos em  $F \setminus \{w\}$  como uma outra cópia de  $P_3$  e a primeira condição do Passo 3 pode ser aplicada.  $\square$

#### 4.2.4 Passo 4

Para todos  $Q_a \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{L}$  e  $Q_b, Q_c \in \mathcal{L}$  distintos, faça como se segue. Se  $G[(Q_a \cup Q_b \cup Q_c) \setminus \{x_b, x_c\}]$  contém duas cópias disjuntas de  $P_3$  com conjuntos de vértices  $Q$  e  $Q'$ , então sejam  $Q'_a$  e  $Q'_b$  conjuntos disjuntos contendo  $x_a$  e  $x_b$ , contidos em  $F \cup \{x_a, x_b\}$  e que contenham cópias de  $P_3$  em  $G$ . Defina  $\mathcal{Q}_i = \{Q, Q', Q'_a, Q'_b\} \cup \mathcal{Q} \setminus \{Q_a, Q_b, Q_c\}$ .

Obtemos os seguintes resultados se o Passo 4 não se aplica.

**Lema 4.9.** Se  $ne(Q_a, Q_b) \leq 1$  para  $Q_a \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{L}$  e  $Q_b \in \mathcal{L}$ , então  $ne(Q_a, Q_c) \geq 6$  para todo  $Q_c \in \mathcal{L} \setminus \{Q_b\}$ .

*Demonstração.* Assuma, para fins de contradição, que temos  $Q_a \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{L}$  e  $Q_b, Q_c \in \mathcal{L}$  tal que  $e(Q_a, Q_b) \geq 8$  e  $e(Q_a, Q_c) \geq 4$ . Note que se  $e(Q_a, Q_b) \geq 8$  então todo vértice em  $Q_b$  possui um vizinho em  $Q_a$  e existe um vértice  $v \in Q_b \setminus \{x_b\}$  tal que  $v$  é adjacente a todos os vértice de  $Q_a$  (figura 12). Logo,  $Q_a \cup \{v\}$  é o conjunto de vértices de um 4-ciclo  $C$  em  $G$  e ambos os vértices de  $Q_b \setminus \{v\}$  possuem um vizinho em  $Q_a \cup \{v\}$ . Como  $e(Q_a, Q_c) \geq 4$ , então existe um vértices em  $Q_c \setminus \{x_c\}$  com um vizinho em  $Q_a$ . Logo, Lema 4.4 garante que existem duas cópias de  $P_3$  em  $G[(Q_a \cup Q_b \cup Q_c) \setminus \{x_b, x_c\}]$  e o Passo 4 pode ser aplicado.  $\square$

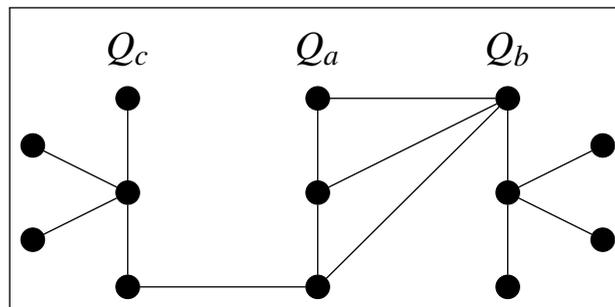


Figura 12 – Exemplo do Lema 4.9.  $x_b$  e  $x_c$  são os vértices centrais de  $Q_b$  e  $Q_c$  neste exemplo.

### 4.3 Prova de corretude do Algoritmo

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $e(G) > \text{Gorgol}(n, k)$ . Suponha que a aplicação do algoritmo dado no Capítulo 3 ao grafo  $G$  retorna uma  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q}$ . Assuma, para fins de contradição, que  $s(\mathcal{Q}) < k$ . Encontramos uma contradição ao considerar a desigualdade do Lema 4.1 em conjunto com os lemas seguintes.

**Lema 4.10.** Se  $n < 5k$  e  $Q_j \in \mathcal{L}$ , então  $EE_j^*(G) \leq 2k - 4$ .

*Demonstração.* Como  $|U^*| = 3k - 3$ , temos que  $|V(G) \setminus U^*| = n - 3k + 3 \leq 2k + 2$ . Note que o Lema 4.5 nos diz que  $d(Q_j, V(G) \setminus U^*) \leq |V(G) \setminus U^*|$ . Concluimos este lema utilizando o limite anterior junto com o fato de que  $e(Q_j) \leq 3$  na definição de  $EE_j^*(G)$ .  $\square$

Quando  $n \geq 5k$ , obtemos o seguinte fortalecimento do Lema 4.1.

**Lema 4.11.** Sejam  $\mathcal{Q}^+$  e  $EE^*$  como definidos como no Lema 4.1. Se  $n \geq 5k$ , então

$$\sum_{1 \leq i < k} (EE_i^*(G) - n + 5k - 7) > \sum_{1 \leq i < j < k} ne(Q_i, Q_j)$$

*Demonstração.* Seguimos as mesmas ideias presentes na demonstração do Lema 4.1, utilizando  $G^* = G_2(n, kP_3)$  no lugar de  $G_1(n, kP_3)$ .

Seja  $G^* = G_2(n, kP_3)$ , lembrando que  $G^* = K_{k-1} \vee M_{n-k+1}$ . Considere também que  $G^*$  e  $G$  possuem o mesmo conjunto de vértices  $V$ . Em particular, considere que cada  $Q_i$  em  $G^*$  contém um vértice de  $K_{k-1}$  e que os outros dois são vértices adjacentes em  $M_{n-k+1}$ . Agora, assim como na demonstração do Lema 4.1, temos que  $e(G) > \text{Gorgol}(n, k) \geq e(G^*)$  e  $V \setminus U^*$  induz um emparelhamento quase perfeito em  $G^*$  e possui grau máximo menor do que 2 em  $G$ . Logo,  $e_G(U^*, V) - e_{G^*}(U^*, V) > 0$  ainda é uma desigualdade válida quando consideramos o novo  $G^*$ .

Assim como no Lema 4.1, temos que

$$e_G(U^*, V) = \sum_{1 \leq i < k} EE_i^*(G) + 9(k-1) + \sum_{1 \leq i < j < k} e_G(Q_i, Q_j).$$

Para o novo  $G^*$ , temos que  $e_{G^*}(Q_i) = 3$ ,  $e_{G^*}(Q_i, V \setminus U^*) = n - 3k + 3$  e  $e_{G^*}(Q_i, Q_j) = 5$ . Portanto,  $EE_i^*(G^*) = n - 3k - 3$  e

$$\begin{aligned} G^*(U^*, V) &= \sum_{1 \leq i < k} EE_i^*(G^*) + 9(k-1) + \sum_{1 \leq i < j < k} e_{G^*}(Q_i, Q_j) \\ &= (k-1)(n-3k+3) + 9(k-1) + \left( \sum_{1 \leq i < j < k} 9 \right) - 4 \binom{k-1}{2} \\ &= (k-1)(n-5k+7) + 9(k-1) + \sum_{1 \leq i < j < k} 9 \end{aligned}$$

Aplicando estas equações a  $e_G(U^*, V) - e_{G^*}(U^*, V) > 0$  e arrumando os termos, obtemos a desigualdade desejada.  $\square$

**Lema 4.12.** *Se  $n \geq 5k$  e  $Q_j \in \mathcal{L}$ , então  $EE_j^*(G) - n + 5k - 7 \leq 2k - 10$ .*

*Demonstração.* Se  $Q_j \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{L}$  ou  $j > s(\mathcal{Q})$ , então  $EE_j(G) \leq 0$  e  $EE_j^*(G) - n + 5k - 7 \leq -7$ . Consideremos, então,  $Q_j \in \mathcal{L}$ . Note que o Lema 5 nos diz que  $d(Q_j, V(G) \setminus U^*) \leq |V(G) \setminus U^*|$  e  $|U^*| = 3k - 3$  implica que  $|V(G) \setminus U^*| = n - 3k + 3$ . Concluimos este lema utilizando o limite anterior junto com  $e(Q_j) \leq 3$  na definição de  $EE_j^*(G)$ .  $\square$

**Teorema 4.13.** *Se um grafo  $G$  possui  $n$  vértices e  $e(G) > \text{Gorgol}(n, k)$  arestas, então o algoritmo proposto encontrará uma  $P_3$ -configuração de tamanho pelo menos  $k$ .*

*Demonstração.* Para fins de contradição, assumamos que o algoritmo proposto retorna uma  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q}$  com  $s(\mathcal{Q}) < k$ . Seja  $H$  o grafo bipartido com conjunto de vértices  $\mathcal{Q}^+$  e uma aresta entre  $Q$  e  $Q'$ ,  $Q \in \mathcal{L}$  e  $Q' \in \mathcal{Q}^+ \setminus \mathcal{L}$ , se  $ne(Q, Q') \leq 1$ . Seja  $\mathcal{A}$  a família de conjuntos de  $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{L}$  contendo os conjuntos com grau maior ou igual a 1 em  $H$ . Note que o Lema 4.5 nos diz que nenhum conjunto de  $\mathcal{Q}^+ \setminus \mathcal{Q}$  está em  $\mathcal{A}$ .

Se  $Q_j \in \mathcal{A}$ , então o Lema 4.9 nos diz que  $Q_j$  possui exatamente um vizinho em  $H$  e o Lema 4.8 nos diz que  $d_G(Q_j, F) = 0$ . Ademais, como  $V(G) \setminus U^* \subseteq F$ , temos que  $d_G(Q_j, V(G) \setminus U^*) = 0$  que por sua vez garante que  $EE_j^*(G) \leq -6$ . Note também que  $EE_j^*(G) \leq 0$  para todo  $Q_j \in \mathcal{Q}^+ \setminus \mathcal{L}$ .

Seja  $a = |\mathcal{A}|$  e  $\ell = |\mathcal{L}|$ . Se  $n < 5k$ , os limites dados no parágrafo anterior, junto com o Lema 4.10, nos dizem que

$$\sum_{1 \leq i < k} EE_i^*(G) \leq \ell(2k - 4) - 6a.$$

Quando  $n \geq 5k$  o Lema 4.12, junto com os mesmos argumentos utilizados para obter o limite anterior, nos diz que

$$\sum_{1 \leq i < k} (EE_i^*(G) - n + 5k - 7) \leq \ell(2k - 4) - 6a.$$

Portanto, se mostrarmos que

$$\sum_{1 \leq i < j < k} ne(Q_i, Q_j) \geq \ell(2k - 4) - 6a$$

então obtemos uma contradição ao Lema 4.1 se  $n < 5k$  e ao Lema 4.11 se  $n \geq 5k$ , provando assim o teorema.

Como  $s(\mathcal{Q}) < k$  e o algoritmo parou, então nenhum passo do algoritmo aplica-se à  $\mathcal{Q}$ . O Lema 4.7 nos diz que existem 4 não-arestas entre cada par de conjuntos em  $\mathcal{L}$ . O Lema 4.9 nos diz que existem pelo menos 6 não-arestas entre cada conjunto  $Q' \in \mathcal{A}$  e cada  $Q \in \mathcal{L}$  exceto para o vizinho de  $Q'$  em  $H$ . Ademais, pela definição de  $H$ , todo conjunto em  $\mathcal{Q}^+ \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{L})$  possui pelo menos 2 não-arestas para cada  $Q \in \mathcal{L}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j < k} ne(Q_i, Q_j) &\geq 4 \binom{\ell}{2} + 6a(\ell - 1) + 2\ell(k - 1 - \ell - a) \\ &= \ell(2k - 4) - 6a + 4a\ell \end{aligned}$$

Obtemos assim uma contradição, pois ambos  $a$  e  $\ell$  são não-negativos.

□

## 5 COMPLEXIDADE DO ALGORITMO

Neste capítulo, analisamos a complexidade do algoritmo proposto no Capítulo 4. Mostramos como o algoritmo proposto encontra  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em tempo  $O(km)$ , onde  $m$  é número de arestas de um grafo  $G$  em  $n$  vértices e  $m > \text{Gorgol}(n, k)$ . Frequentemente será necessário verificar as relações de adjacência entre vértices de  $G$  e, portanto, é útil considerar o grafo descrito como uma lista de adjacências. Como  $m = \Omega(n)$ , a verificação de todas as relações de adjacência entre os vértices de  $G$  pode ser feita em tempo  $O(m)$ . Iniciamos relembrando algumas definições feitas no início do Capítulo 4.

Uma  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q}$  em  $G$  é uma família de conjuntos disjuntos de vértices onde  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_s\}$  e, para  $1 \leq i \leq s$ ,  $|Q_i| = 3$  e  $P_3 \subseteq G[Q_i]$ , onde  $G[Q_i]$  é o subgrafo de  $G$  induzido por  $Q_i$ . Definimos por  $s(\mathcal{Q})$  o tamanho  $|\mathcal{Q}|$  da  $P_3$ -configuração. Durante a execução do algoritmo, os vértices do grafo  $G$  são particionados nos subconjuntos  $U$  e  $F$  onde

$$U = \bigcup_{i=1}^{s(\mathcal{Q})} Q_i \text{ e } F = V(G) \setminus U.$$

O algoritmo inicia com  $U = \emptyset$  e  $F = V(G)$  e consideramos aqui, para fins de análise da complexidade de tempo, que o algoritmo para quando encontramos  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$ . Dizemos também que uma configuração  $\mathcal{Q}'$  é uma melhoria de  $\mathcal{Q}$  se  $s(\mathcal{Q}') > s(\mathcal{Q})$  ou  $s(\mathcal{Q}') = s(\mathcal{Q})$  e  $\mathcal{Q}'$  possui mais triângulos do que  $\mathcal{Q}$ . Lembramos também que

$$\text{Gorgol}(n, k) = \begin{cases} \binom{3k-1}{2} + \lfloor \frac{n-3k+1}{2} \rfloor, & \text{para } 3k \leq n < 5k, \\ \binom{k-1}{2} + (n-k+1)(k-1) + \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor, & \text{para } n \geq 5k. \end{cases}$$

Para a prova da conjectura de Gorgol, oferecemos um algoritmo que encontra pelo menos  $k$  cópias de  $P_3$  em  $G$  através de uma sequência de iterações bem definidas. Cada iteração do algoritmo percorre 4 passos, em ordem, e cada um destes passos tentará encontrar uma melhoria para a atual  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q}$  do algoritmo. Assim, cada iteração pode, no melhor caso, encontrar um novo  $P_3$  ou, no pior caso, aumentar a quantidade de triângulos na coleção. Para alcançarmos a complexidade de tempo desejada  $O(km)$ , é suficiente mostrar que cada um dos 4 passos descritos, em tempo  $O(m)$ , encontra uma melhoria para a atual  $P_3$ -configuração ou sinaliza a passagem para próximo passo e que o algoritmo executa no máximo  $O(k)$  iterações. Em cada uma das demonstrações abaixo, relativas aos 4 passos do algoritmo, mostramos como o passo em questão encontra uma melhoria em tempo  $O(m)$ . Após, argumentamos como a atualização da

atual  $P_3$ -configuração interfere apenas em um subconjunto pequeno de  $\mathcal{Q}$ . Descrevemos também como os valores de  $EE_i(G)$  podem ser calculados em tempo  $O(m)$  ao final de cada iteração.

Para cada  $v \in V(G)$ , definimos um inteiro  $q[v]$  no intervalo de 0 a  $s(\mathcal{Q})$  para indicar qual conjunto  $Q_i \in \mathcal{Q}$  contém  $v$ . Se  $q[v] = 0$ , então  $v \in F$ . Caso contrário,  $v \in \mathcal{Q}_{q[v]}$ . Assim, na descrição dos passos a seguir, podemos verificar se  $v \in F$  ou  $v \in Q_i$  em tempo constante verificando o vetor  $q$ . Além disto, quando criamos um novo  $P_3$  com vértices  $\{u, v, w\}$ , podemos atualizar a  $P_3$ -configuração existente atribuindo o valor  $s(\mathcal{Q}) + 1$  a  $q[u]$ ,  $q[v]$  e  $q[w]$  e, após, incrementando em uma unidade o valor de  $s(\mathcal{Q})$ . Observe que esta atualização também pode ser feita em tempo constante.

**Lema 5.1.** *O Passo 1 do algoritmo termina em tempo  $O(m)$ .*

*Demonstração.* Para cada vértice  $v$  em  $F$ , faça o seguinte. Percorra a vizinhança de  $v$  contando quantos vizinhos de  $v$  estão em  $F$ . Caso  $v$  possua pelo menos dois vizinhos  $u$  e  $w$  em  $F$ , escolha estes três vértices para formar um novo conjunto  $Q_i$ .

No pior caso, precisamos verificar todas as relações de adjacência entre vértices de  $G$  para concluir o Passo 1. Considerando o grafo  $G$  descrito como uma lista de adjacências, todas as arestas de  $G$  podem ser percorridas em tempo  $O(m + n)$ . Como  $m = \Omega(n)$ , o Passo 1 termina em tempo  $O(m)$ , como desejado.  $\square$

Mostramos agora como os valores de  $EE_i(G)$  podem ser calculados em tempo  $O(m)$  em qualquer momento da iteração.

**Lema 5.2.** *Dada uma  $P_3$ -configuração  $\mathcal{Q}$ , os valores de  $EE_i(G)$  podem ser armazenados em tempo  $O(m)$ .*

*Demonstração.* Lembramos que  $EE_i(G) = e(Q_i) + e(Q_i, F) - 9$ . Para cada conjunto  $Q_i$  em  $\mathcal{Q}$ , crie uma variável  $e_i$ , para contar o número de arestas em  $Q_i$ , e uma variável  $m_i$ , para contar o número de arestas com uma extremidade em  $Q_i$  e outra em  $F$ . Inicie com  $e_i = 0$  e  $m_i = 0$ , para  $1 \leq i \leq s(\mathcal{Q})$ . Para todo vértice  $u \in U$ , percorra a vizinhança de  $u$  fazendo um dos seguintes se as condições são satisfeitas.

1. Se  $u$  possui um vizinho  $v$  tal que  $q[u] = q[v]$ , incremente em 1 o valor de  $e_{q[u]}$ .
2. Se  $u$  possui um vizinho  $v$  tal que  $q[v] = 0$ , incremente em 1 o valor de  $m_{q[v]}$ .

Note que contamos duas vezes cada aresta com as duas extremidades em algum  $Q_i$ . Assim, obtemos os valores de  $e(Q_i)$  e  $e(Q_i, F)$  para todo conjunto  $Q_i \in \mathcal{Q}$  e o valor de  $EE_i(G)$  pode ser verificado em tempo constante nos passos descritos a seguir.

Para encerrar esta fase do algoritmo, precisamos verificar todas as arestas com pelo menos uma extremidade em  $U$ . Utilizando uma lista de adjacências, podemos percorrer todas as arestas de  $G$  em tempo  $O(m)$  e o resultado segue.  $\square$

Observe que podemos descrever o restante do algoritmo sem a generalidade utilizada na descrição dos passos 2 a 4. Cada um destes passos utiliza como base um lema que nos fornece alguma propriedade sobre o grafo  $G$  caso algum dos passos não obtenha sucesso em encontrar uma melhoria para  $\mathcal{Q}$ . O Passo 2, por exemplo, utiliza como base o Lema 4.5 para dizer que, se o Passo 2 não se aplica, então nenhum vértice de  $F$  possui dois vizinhos em mesmo conjunto  $Q_a \in \mathcal{L}$ . Podemos inverter este pensamento e garantir sobre  $G$  a mesma propriedade dada pelo Lema 4.5 mostrando que se existe algum vértice de  $F$  que possui dois vizinhos em algum conjunto  $Q_a \in \mathcal{L}$ , então o Passo 2 se aplica. Note que esta ideia é utilizada na prova por contradição do Lema 4.5. Podemos assim descrever os lemas utilizados como base para os Passos 2 a 4 com uma condição de busca no grafo  $G$  que, caso não satisfeita, nos fornece alguma propriedade sobre  $G$ . Para o Passo 2, o Lema seguinte é equivalente ao Lema 4.5.

**Lema 5.3.** *Se existe um vértice  $v \in F$  e um  $Q_a \in \mathcal{L}$  tal que  $d(v, Q_a) \geq 2$ , então o Passo 2 encontra uma melhoria para  $\mathcal{Q}$ .*

*Demonstração.* Similar ao Lema 4.5.  $\square$

**Lema 5.4.** *O Passo 2 do algoritmo termina em tempo  $O(m)$ .*

*Demonstração.* Precisamos encontrar um vértice  $v \in F$  que possua dois vizinhos em algum conjunto  $Q_a \in \mathcal{L}$ . Para cada vértice  $v \in F$ , faça o seguinte. Crie um vetor de inteiros  $m_v$  com  $s(\mathcal{Q})$  posições, todas iniciadas com 0, para contar quantos vizinhos  $v$  possui em cada um dos conjuntos  $Q_i \in \mathcal{Q}$ . Como  $s(\mathcal{Q}) \leq k$  e  $nk = O(m)$ , a criação destes vetores não afeta a complexidade do algoritmo.

Para cada vizinho  $u$  de  $v$  com  $q[u] \neq 0$ , incremente em 1 o vetor  $m_v$  no índice  $q[u]$ . Se este valor for pelo menos 2 e  $Q_{q[u]} \in \mathcal{L}$ , temos que  $d(v, Q_{q[u]}) \geq 2$  e, pelo Lema 5.3, o Passo 2 se aplica.

Para concluir o Passo 2, então, é necessário verificar todas as arestas com exatamente uma extremidade em  $F$ . O resultado segue pois podemos percorrer todas as arestas de  $G$  em tempo  $O(m)$ .  $\square$

Para o Lema 4.7, utilizado como base para o Passo 3, utilizamos o seguinte Lema:

**Lema 5.5.** *Se existem conjuntos  $Q_a$  e  $Q_b$  em  $\mathcal{L}$  tais que  $e(Q_a, Q_b) \geq 6$ , então o Passo 3 se aplica.*

*Demonstração.* Similar ao Lema 4.7. □

Por último, consideramos o Lema 4.9, utilizado como base para o Passo 4.

**Lema 5.6.** *Se existem conjuntos  $Q_a$ ,  $Q_b$  e  $Q_c$  tais que  $Q_a \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{L}$ ,  $Q_b$  e  $Q_c$  estão em  $\mathcal{L}$ ,  $e(Q_a, Q_b) \geq 8$  e  $e(Q_a, Q_c) \geq 4$ , então o Passo 4 se aplica.*

*Demonstração.* Similar ao Lema 4.9. □

**Lema 5.7.** *Os Passos 3 e 4 podem terminam em tempo  $O(m)$ .*

*Demonstração.* Para estes passos, precisamos contar as arestas entre conjuntos  $Q_i \in \mathcal{Q}$ . Crie uma matriz  $s(\mathcal{Q}) \times s(\mathcal{Q})$  de inteiros  $M$  para contar a quantidade de arestas com extremidades em conjuntos distintos de  $\mathcal{Q}$ . Inicie com  $M[a, b] = 0$  para todo par de conjuntos  $Q_a, Q_b$  em  $\mathcal{Q}$ . Como  $s(\mathcal{Q}) \leq k$  e  $k^2 = O(nk) = O(m)$ , podemos criar e inicializar a matriz  $M$  em tempo  $O(m)$ .

Para toda aresta  $uv \in E(G)$  tal que  $q[u] \neq 0$  e  $q[v] \neq 0$ , incremente em 1 o valor de  $M[q[u], q[v]]$ . Para cada conjunto  $Q_a \in \mathcal{Q}$ , verifique as seguintes condições.

1. Se  $Q_a \in \mathcal{L}$ , percorra a linha  $a$  da matriz  $M$ . Se existe uma coluna  $b$  da matriz tal que  $M[a, b] \geq 6$  e  $Q_b \in \mathcal{L}$ , encontramos um par de conjuntos  $Q_a, Q_b$  que respeita as condições do enunciado do Lema 5.5 e, portanto, o Passo 3 se aplica.
2. Se  $Q_a \notin \mathcal{L}$ , percorra a linha  $a$  da matriz  $M$ . Se existem colunas  $b$  e  $c$  da matriz tal que  $M[a, b] \geq 8$  e  $M[b, c] \geq 4$ , encontramos um trio de conjuntos  $Q_a, Q_b$  e  $Q_c$  que respeita as condições do enunciado do Lema 5.6 e, portanto, o Passo 4 se aplica.

Para preencher a matriz  $M$ , precisamos percorrer todas as arestas de  $G$ . Isto pode ser feito em  $O(m)$ . Para a busca de conjuntos candidatos para os Passos 3 e 4, precisamos percorrer, no pior caso, todas as posições da matriz  $M$  e isto também pode ser feito em  $O(m)$ . Concluimos que ambos os passos considerados podem ser realizados em tempo  $O(m)$ , como desejado. □

Nos resta apenas mostrar que o algoritmo executa no máximo  $O(k)$  iterações.

**Teorema 5.8.** *Dado um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas, com  $m > \text{Gorgol}(n, k)$ , o algoritmo proposto encontra  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em tempo  $O(km)$ .*

*Demonstração.* Pelos Lema 5.1, 5.4 e 5.7, cada iteração do algoritmo encontra uma melhoria em tempo  $O(m)$ . Para isto, mostramos que o número de passos realizados é  $O(k)$ .

Seja  $t(\mathcal{Q})$  o número de conjuntos  $Q_i \in \mathcal{Q}$  que induzem triângulo. Vamos mostrar que a quantidade de iterações necessárias para obter uma coleção de tamanho  $s(\mathcal{Q})$  é limitada superiormente por uma função crescente e não-negativa dependendo apenas de  $s(\mathcal{Q})$  e  $t(\mathcal{Q})$ .

Note que, pelos Lemas 5.3, 5.5 e 5.6, os Passos 2 a 4 podem interferir apenas em 1, 2 ou 3 conjuntos de  $\mathcal{Q}$ , respectivamente. O Passo 4, por exemplo, pode transformar  $3K_3$  em  $4P_3$  na coleção ao encontrar uma melhoria. Definimos a função  $f(\mathcal{Q})$  como

$$f(\mathcal{Q}) = 4s(\mathcal{Q}) + t(\mathcal{Q}).$$

Observe que o valor da função  $f$  sempre aumenta em pelo menos uma unidade após cada iteração. Se a melhoria encontrada apenas altera um  $P_3$  para um  $K_3$ , o valor de  $s(\mathcal{Q})$  permanece inalterado mas  $t(\mathcal{Q})$  aumenta em uma unidade. Se a iteração encontra um novo  $P_3$ , o valor de  $t(\mathcal{Q})$  pode diminuir em até três unidades, mas  $s(\mathcal{Q})$  aumenta em uma. Como  $s(\mathcal{Q}) \leq k$  e  $t(\mathcal{Q}) \leq k$ , temos que  $f(\mathcal{Q}) \leq 5k$  e, portanto  $f(\mathcal{Q}) = O(k)$  e o algoritmo encontra  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$  em  $O(k)$  iterações, como desejado.  $\square$

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Encerramos esta dissertação apresentando um resumo dos resultados obtidos, resultados relacionados e algumas possibilidades de extensão do resultado principal apresentado no Capítulo 4.

O foco desta dissertação é em problemas de subgrafos proibidos. Consideramos o problema de determinar o número máximo de arestas que um grafo em  $n$  vértices pode ter sem conter um grafo determinado subgrafo  $F$ . O número de Turán  $ex(n, F)$  determina o número máximo de arestas em um grafo em  $n$  vértices que não contém  $F$  como subgrafo. Em particular, queremos determinar o número de Turán  $ex(n, \mathcal{P})$  quando  $\mathcal{P}$  é o grafo formado pela união disjunta de caminhos.

Este problema é bem resolvido para alguns casos. Sabemos exatamente o número máximo de arestas que podemos adicionar a um grafo quando desejamos evitar apenas um caminho  $P_\ell$ . Este número foi determinado por Erdős e Gallai em 1959 (7). Se desejamos evitar o um conjunto de  $k$  caminhos disjuntos, uma sequência de resultados tornou o problema bem resolvido para grafos suficientemente grandes. Bushaw e Kettle determinaram o número de Turán  $ex(n, kP_\ell)$ , quando todos os caminhos possuem o mesmo tamanho, e Lidický, Liu e Palmer determinaram, em 2012, o valor de  $ex(n, \mathcal{P})$  quando  $\mathcal{P}$  é formado pela união disjunta de  $k$  caminhos onde pelo menos um deles não é um  $P_3$  (10). Portanto, o número de Turán para o grafo formado pela união disjunta de caminhos é conhecido para grafos suficientemente grandes, mas pouco se sabe sobre o problema para grafos pequenos. Nesta dissertação oferecemos um novo resultado para o problema determinando o número de Turán para um caso particular do problema em grafos de qualquer tamanho. Descrevemos esses resultados relacionados na Seção 3.2.

Gorgol, em 2011, mostrou limites para o valor de  $ex(n, kF)$  quando  $F$  é um grafo conexo (8). No mesmo artigo, Gorgol conjecturou que o limite inferior oferecido era apertado quando  $F = P_3$  e provou que a conjectura é válida para  $k \in \{2, 3\}$ . Utilizando os exemplos de grafos extremais dados por Gorgol, oferecemos no Capítulo 4 deste texto uma resposta afirmativa desta conjectura. Mostramos um algoritmo que, dado um grafo  $G$  como entrada contendo mais arestas do que o limite inferior para  $ex(n, kP_3)$  oferecido por Gorgol, encontra um conjunto de  $k$  cópias disjuntas de  $P_3$ . Na Seção 4.2 descrevemos detalhadamente as iterações do algoritmo. Na Seção 4.3 provamos sua corretude, o que valida a conjectura de Gorgol. No Capítulo 5 analisamos a complexidade do algoritmo proposto, mostrando como as  $k$  cópias de  $P_3$  podem ser encontradas em tempo  $O(km)$ , onde  $m$  é o número de arestas do grafo  $G$  dado como entrada.

Acreditamos que as técnicas utilizadas no Capítulo 4 possam ser adaptadas para o problema de determinar  $\text{ex}(n, kS_\ell)$ , onde  $S_\ell$  é o grafo estrela em  $\ell$  vértices, pois, no decorrer do algoritmo, tratamos o grafo  $P_3$  mais como uma estrela do que como um caminho, já que um fator determinante para o bom funcionamento do algoritmo é a existência, em cada iteração, de pelo menos um  $P_3$  contendo um vértice que possui muitos vizinhos livres. O Lema 4.1 pode facilmente ser adaptado para estrelas maiores, restando adaptar os restante do algoritmo. Ressaltamos, porém, que este resultado é de maior interesse apenas para valores pequenos de  $n$ ; Lidický, Liu e Palmer também determinaram o valor de  $\text{ex}(n, kS_\ell)$  para  $n$  suficientemente grande em (10).

Como possibilidade de extensão dos resultados obtidos, podemos também mencionar problemas de estabilidade. Neste caso, gostaríamos de poder dizer que grafos livres de  $kP_3$  mas com quantidade de arestas próximo a  $\text{ex}(n, kP_3)$  possuem estrutura parecida com os exemplos de grafos extremais livres de  $kP_3$  dados por Gorgol. Podemos também querer contar quantos grafos em  $n$  vértices e livres de  $kP_3$  existem. Para este problema, o método de containers para hipergrafos é de particular interesse (32), (33). Ressaltamos que este método alcançou grande popularidade recentemente na combinatória extremal.

## REFERÊNCIAS

- 1 MANTEL, W. Problem 28. **Wiskundige Opgaven**, v. 10, n. 320, p. 60–61, 1907.
- 2 TURÁN, P. On an extremal problem in graph theory. **Mat. Fiz. Lapok**, v. 48, n. 137, p. 436–452, 1941.
- 3 SZEMERÉDI, E. Regular partitions of graphs. **Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes**, v. 260, p. 399–401, 1941.
- 4 SZEMERÉDI, E. On sets of integers containing no  $k$  elements in arithmetic progression. **Acta Arithmetica**, v. 27, p. 199–245, 1975.
- 5 ERDŐS, P.; STONE, A. On the structure of linear graphs. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 52, p. 1087–1091, 1946.
- 6 ERDŐS, P.; SIMONOVITS, M. A limit theorem in graph theory. **Studia Sci. Math. Hung.**, p. 51–57, 1966.
- 7 ERDŐS, P.; GALLAI, T. On maximal paths and circuits of graphs. **Acta Math. Acad. Sci. Hungar.**, v. 10, p. 337–356, 1959.
- 8 GORGOL, I. Turán numbers for disjoint copies of graphs. **Graphs and Combinatorics**, Springer, v. 27, n. 5, p. 661–667, 2011.
- 9 BUSHAW, N.; KETTLE, N. Turán numbers of multiple paths and equibipartite forests. **Combinatorics, Probability and Computing**, Cambridge Univ Press, v. 20, n. 06, p. 837–853, 2011.
- 10 LIDICKÝ, B.; LIU, H.; PALMER, C. On the turán number of forests. **arXiv:1204.3102**, 2012.
- 11 CAMPOS, V.; LOPES, R. A proof for a conjecture of gorgol. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, v. 50, p. 367–372, 2015.
- 12 MYCIELSKI, J. Sur le coloriage des graphes. **Coll. Math.**, v. 3, p. 161–162, 1955.
- 13 ERDŐS, P. Graph theory and probability. **Can. J. Math.**, v. 11, p. 34–38, 1959.
- 14 MADER, W. Existenz  $n$ -fach zusammenhängender teilgraphen in graphen genügend grosser kantendichte. **Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg**, v. 37, p. 86–97, 1972.
- 15 BONDY, J.; MURTY, U. Graph theory. **Graduate Texts in Mathematics**, Springer, v. 244, p. 320–321, 2008.
- 16 FAUDREE, R.; SCHELP, R. Path ramsey numbers in multicolorings. **J. Combin. Theory Ser. B**, v. 19, n. 02, p. 150–160, 1975.
- 17 KOPYLOV, G. Maximal paths and cycles in a graph. **Dokl. Akad. Nauk SSSR**, v. 234, n. 01, p. 19–21, 1977.
- 18 WOODWALL, D. Maximal circuits of graphs i. **Acta Math. Acad. Sci. Hungar.**, v. 28, n. 1–2, p. 77–80, 1976.

- 19 ERDŐS, P. On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems. **Inst. Math. Mech. Univ. Tomsk**, v. 2, p. 74–82, 1938.
- 20 ERDŐS, P. Extremal problems in graph theory. **Theory of Graphs and its Applications (Proc. Sympos. Smolenice, 1963)**, p. 29–36, 1964.
- 21 BONDY, J.; SIMONOVITS, M. Cycles of even lengths in graphs. **Journal of combinatorial theory (B)**, v. 16, p. 97–105, 1974.
- 22 ERDŐS, P.; A.RÉNYI; SÓS, V. On a problem of graph theory. **Stud. Sci. Math. Hungar.**, v. 01, p. 215–235, 1966.
- 23 BENSON, C. Minimal regular graphs of girths eight and twelve. **Can. J. Math.**, v. 26, p. 1091–1094, 1966.
- 24 PIKHURKO, O. A note on the turán function of even cycles. **Proceedings of the american mathematical society**, v. 140, n. 11, p. 3687–3692, 2012.
- 25 MCLENNAN, A. The erdős-sós conjecture for trees of diameter four. **J. graph theory**, v. 49, p. 291–301, 2005.
- 26 SIDORENKO, A. Asymptotic solution for a new class of forbidden  $r$ -graphs. **Combinatorica**, v. 09, n. 2, p. 207–215, 2005.
- 27 SACLÉ, J.; WOZNIAK, M. The erdős-sós conjecture for graphs without  $C_4$ . **J. Combin. Theory Ser. B**, v. 70, p. 367–372, 1997.
- 28 WANG, M.; LI, G.; LIU, A. A result of erdős-sós conjecture. **Ars Combin.**, v. 55, p. 123–127, 2000.
- 29 FÜREDI, Z.; SIMONOVITS, M. The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems. **arXiv:1306.5167**, p. 58, 2013.
- 30 BRANDT, S. Subtrees and subforests of graphs. **J. Comb. Theory, Ser. B**, v. 61, n. 1, p. 63–70, 1994.
- 31 SIMONOVITS, M. A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems. In: **Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)**. [S.l.: s.n.], 1968. p. 279–319.
- 32 BALOGH, J.; MORRIS, R.; SAMOTIJ, W. Independent sets in hypergraphs. **J. Amer. Math. Soc.**, v. 28, p. 669–709, 2015.
- 33 SAXTON, D.; THOMASON, A. Hypergraph containers. **Inventiones Math.**, v. 201, p. 1–68, 2015.