



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

JHONATA ADAM SILVA MATIAS

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE FLUXO

FORTALEZA

2019

JHONATA ADAM SILVA MATIAS

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE FLUXO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Algoritmos e Otimização.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto

FORTALEZA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M38m Matias, Jhonata Adam Silva.

Métodos para solução do problema de coloração de fluxo / Jhonata Adam Silva Matias. – 2019.
71 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto.

1. Otimização combinatória. 2. Coloração de fluxo. 3. Fluxo em rede. 4. Coloração de arestas. I. Título.

CDD 005

JHONATA ADAM SILVA MATIAS

MÉTODOS PARA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE FLUXO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Ciência da Computação do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ciência da Computação. Área de Concentração: Algoritmos e Otimização.

Aprovada em: 13 de Fevereiro de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo
Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof^a. Dr^a. Ana Shirley Ferreira da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Diego Rodrigues
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Manoel Bezerra Campêlo Neto, pelas críticas e pelos generosos conselhos que foram fundamentais para o meu aprendizado durante o mestrado e para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores participantes da banca examinadora, Ana Shirley Ferreira da Silva, Carlos Diego Rodrigues e Rudini Menezes Sampaio, pela contribuição que deram a este trabalho.

À minha mãe Joana, minha namorada Joice e aos meus irmãos Eric, Diná e Lucas, pela paz e segurança que vocês me passam.

Aos amigos de laboratório Jonas Costa, Mardson Ferreira, Sergio Filho e Arthur Araruna, pela disposição em tirar dúvidas e pelas inúmeras discussões a respeito de grafos, otimização e assuntos aleatórios durante as pausas no trabalho.

Por fim, à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) pelo financiamento da pesquisa de mestrado através da bolsa de estudos concedida.

“Vá em frente, a fé irá depois.”

(d'Alambert)

RESUMO

Considere um grafo G com uma certa demanda de fluxo a ser enviada de alguns vértices de origem a um vértice de destino. Chamamos de fluxo viável uma transmissão de fluxo através dos vértices e arestas de G que satisfaz a demanda. Cada fluxo viável define um multigrafo com os vértices e arestas de G , mas com a multiplicidade de cada aresta sendo igual à quantidade de fluxo que passa por essa aresta no fluxo viável. Uma solução viável do problema de coloração de fluxo é composta por um fluxo viável e uma atribuição de cores às arestas do seu respectivo multigrafo tal que duas arestas adjacentes recebem cores distintas. O objetivo do problema é encontrar uma solução viável onde a coloração das arestas tenha o menor número de cores distintas. Neste trabalho, apresentamos um algoritmo aproximativo que fornece uma solução viável para o problema de coloração de fluxo com até $\lfloor (5\chi'_\Phi + 2)/4 \rfloor$ cores, onde χ'_Φ é o número ótimo de cores. O fator de aproximação desse algoritmo melhora o fator $3/2$ do algoritmo de Campêlo *et al.* (2012), até então a melhor garantia de aproximação encontrada na literatura. Para esse propósito, definimos um novo problema, a ser solucionado em uma das etapas do nosso algoritmo, que provamos poder ser resolvido em tempo polinomial. Apresentamos duas novas formulações de programação inteira para o problema de coloração de fluxo, adaptamos de forma direta uma terceira, proposta inicialmente para um problema relacionado, e realizamos um estudo teórico das três formulações. Propomos uma heurística, baseada no método de geração de colunas, que pode ser implementada com duas das formulações estudadas. Apresentamos experimentos computacionais realizados com as duas versões da heurística, mostrando que ambas obtêm, de forma bastante eficiente, soluções com valor muito próximo ao ótimo. Por fim, sugerimos um algoritmo exato, baseado no método de *branch-and-cut*, que utiliza uma das formulações estudadas e duas desigualdades que provamos serem válidas para essa formulação.

Palavras-chave: Otimização combinatória. Coloração de fluxo. Fluxo em rede. Coloração de arestas.

ABSTRACT

Consider a graph G with a certain demand of flow to be sent from some source vertices to a target vertex. We call feasible flow a transmission of flow through the vertices and edges of G that meets the demand. Each feasible flow defines a multigraph with the vertices and edges of G , but with the multiplicity of each edge being equal to the amount of flow passing through that edge in the feasible flow. A feasible solution of the flow coloring problem consists of a feasible flow and an assignment of colors to the edges of its respective multigraph such that any two adjacent edges receive different colors. The goal of the problem is to find a feasible solution whose edge coloring has the least number of distinct colors. In this work, we present an approximation algorithm for the flow coloring problem that always uses fewer than $\lfloor (5\chi'_\Phi + 2)/4 \rfloor$ colors, where χ'_Φ is the optimal number of colors. The approximation ratio of that algorithm improves the previous best ratio, $3/2$, given by an algorithm by Campêlo *et al.* (2012). For this purpose, we have defined a new problem, which is solved in a step of our algorithm, and we prove that it can be solved in polynomial time. We present two novel integer linear programming formulations for the flow coloring problem and directly adapt a third one, initially proposed for a closely related problem. We also present a theoretical study of that three formulations. We propose a column generation based heuristic that can be implemented with two of the formulations studied. We present computational experiments performed with the two versions of the heuristic which shows that both can obtain, efficiently, solutions very close to the optimum. Finally, we suggest an exact algorithm, based on the branch-and-cut method, that uses one of the studied formulations and two inequalities that we have proved to be valid for this formulation.

Keywords: Combinatorial optimization. Flow coloring. Network flow. Edge coloring.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplos de soluções viáveis para uma instância do PCF.	25
Figura 2 – Possíveis subdigrafos de (V, A_G) correspondentes a um triângulo a, b, c em G_{ϕ^*}	27
Figura 3 – Ilustração da Proposição 3.1.2.	28
Figura 4 – Exemplo de instância do PCF cujo valor ótimo atinge o limite superior do Teorema 3.1.3 na igualdade.	29
Figura 5 – Exemplo de digrafo auxiliar para o MinGM.	31
Figura 6 – Exemplos de fluxos de mínimo grau máximo ótimo e não ótimo para o PCF.	37
Figura 7 – Instância G^* para o PCF.	49
Figura 8 – Solução dual viável para \mathcal{F}_{EP}	49
Figura 9 – Fluxo viável para G^*	50

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA . . .	14
2.1	Algoritmos e classes de problemas	14
2.2	Teoria de poliedros	16
2.3	Otimização matemática	17
2.4	Teoria dos grafos	19
2.4.1	<i>Grafos simples e multigrafos</i>	19
2.4.2	<i>Conectividade</i>	20
2.4.3	<i>Multigrafos bipartidos</i>	21
2.4.4	<i>Coloração de arestas</i>	21
2.4.5	<i>Fluxo em rede</i>	23
2.5	Problema de coloração de fluxo	24
3	MÉTODO APROXIMATIVO	26
3.1	Problema do fluxo de mínimo grau máximo	26
3.2	Obtendo um multigrafo de mínimo grau máximo	30
3.3	Colorindo um multigrafo de mínimo grau máximo	35
3.3.1	<i>Grafos bipartidos</i>	35
3.3.2	<i>Grafos arbitrários</i>	36
4	FORMULAÇÕES	42
4.1	Formulação Aresta-Cor	42
4.1.1	<i>Eliminação de simetrias</i>	43
4.1.2	<i>Adaptação das desigualdades blossom</i>	44
4.2	Formulação de Emparelhamentos Ponderados	46
4.2.1	<i>Subproblema para \mathcal{F}_{EP}</i>	47
4.2.2	<i>Comparação teórica entre \mathcal{F}_{AC} e \mathcal{F}_{EP}</i>	47
4.3	Formulação de Emparelhamentos e Caminhos Ponderados	50
4.3.1	<i>Subproblemas para \mathcal{F}_{ECP}</i>	51
4.3.2	<i>Comparação teórica entre \mathcal{F}_{EP} e \mathcal{F}_{ECP}</i>	52
5	HEURÍSTICA	56
5.1	Heurística com a \mathcal{F}_{EP}	56

5.2	Heurística com a \mathcal{F}_{ECP}	57
5.3	Experimentos	58
5.4	Resultados	59
6	MÉTODO EXATO	63
6.1	Separação das desigualdades de remoção de simetrias	63
6.2	Método de separação para as inequações blossom	63
6.3	Cardinalidade do conjunto de cores	66
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	67
	REFERÊNCIAS	69

1 INTRODUÇÃO

Em uma *rede de rádio em malha*, cada *nó* da rede envia (ou recebe) informações através de *enlaces* (ou *links*) de rádio estabelecidos com outros nós dentro de seu alcance de comunicação. Um dos problemas enfrentados nesse tipo de rede é a interferência que ocorre entre os enlaces de rádio de nós suficientemente próximos na rede (GOMES, 2009). Isso significa que apenas certas transmissões podem ser realizadas simultaneamente e que os nós devem operar de forma cooperativa para atingir um fluxo efetivo de transmissão na rede (BERMOND *et al.*, 2006). Uma maneira de evitar tais interferências consiste em utilizar um protocolo de comunicação onde a transmissão é feita por meio de repetições de uma sequência fixa de *rodadas*, sendo uma rodada definida por um conjunto de links sem interferência dois a dois (BERMOND *et al.*, 2006; KLASING *et al.*, 2008). Nesse contexto, BERMOND *et al.* (2006) estudam o problema de provimento de internet em áreas rurais na França. Através de uma rede de rádio, as residências e estabelecimentos de uma localidade devem transmitir dados para um nó específico (*gateway*), com uma antena central, criando um tráfego similar a um fluxo simples, gerado em vários nós, para um único sumidouro.

Motivados por essa aplicação, Klasing *et al.* (2008) definem o *problema de ponderação de rodadas* (PPR). A grosso modo, dada uma rede com uma função de demanda de fluxo a ser enviado de nós fontes a um sumidouro¹, por meio de um possível conjunto de rodadas (subconjuntos de links da rede), o problema consiste em encontrar um fluxo e uma ponderação de valor total mínimo para as rodadas que permitam o atendimento da demanda pré-estabelecida, ou seja, onde a soma dos pesos das rodadas contendo cada link seja no mínimo a quantidade de fluxo que passa nesse enlace. Sendo inteiro, o peso de uma rodada pode ser interpretado como a quantidade de vezes que ela é usada para a transmissão da demanda de fluxo. No caso do PPR, porém, os pesos podem ser fracionários, pois considera-se que a transmissão é feita continuamente ao longo do tempo, de modo que se determina o número médio de cada rodada por período.

Definido originalmente em (CAMPÊLO *et al.*, 2012), o *problema de coloração de fluxo* (PCF), foco deste trabalho, é inspirado no PPR. Ele pode ser visto como o PPR onde a rede é modelada por um grafo não direcionado, e o conjunto de possíveis rodadas é o conjunto de emparelhamentos² desse grafo. Nesse sentido, vamos pedir que cada aresta seja “coberta”

¹ Na definição geral pode haver vários nós de destino.

² Um emparelhamento é um subconjunto de arestas sem extremidade comum.

por tantos emparelhamentos quanto seja a quantidade de fluxo que por ela passa. Além de manter relação estreita com a aplicação acima citada, o PCF combina dois problemas clássicos de otimização amplamente explorados, fluxo e coloração de arestas, trazendo diversas questões teóricas interessantes que emergem dessa combinação.

Embora deixemos a formalização do problema para a Seção 2.5, apresentamos aqui uma descrição que pressupõe alguns conceitos básicos e omite certos detalhes, mas explicita melhor a relação com fluxo e coloração de arestas, bem como possibilita o entendimento do restante deste capítulo introdutório. Dado um grafo $G = (V, E)$ com um vértice destacado t (o *gateway*) e uma função de demanda de fluxo $b : V \setminus \{t\} \rightarrow \mathbb{N}$ sobre os demais vértices, uma solução viável para o PCF é composta por dois elementos básicos. Primeiro, um fluxo viável ϕ , que pode ser traduzido numa coleção de $b(v)$ caminhos (não necessariamente distintos) em G , de v para t , para cada $v \in V \setminus \{t\}$. Segundo, uma coloração própria das arestas do multigrafo $G_\phi = (V, E_\phi)$, onde E_ϕ é formado por cada aresta $e \in E$ com multiplicidade igual ao fluxo que nela passa, ou seja, a quantidade de caminhos da coleção contendo e . Em uma coloração própria, as arestas de mesma cor compõem um emparelhamento. O objetivo do problema é encontrar um fluxo que possa ser colorido com a menor quantidade de cores possível, a ser chamado *índice cromático de fluxo*.

Em Campêlo *et al.* (2015) é proposta uma generalização do PCF: o *problema de coloração de fluxo à distância d* (PCF $_d$). No PCF $_d$, duas arestas em que passa fluxo devem ter cores distintas se estão a uma distância menor que d , onde d é um parâmetro de entrada para o problema. Nessa generalização, pode-se notar que o PCF é equivalente ao PCF $_1$.

Um algoritmo polinomial para obter uma (boa) solução viável do PCF é apresentado em Campêlo *et al.* (2012). Esse algoritmo, chamado *2-por-2*, envia (e colore) o fluxo iterativamente, procurando, enquanto possível, encaminhar duas unidades de fluxo de tal forma que possa ser colorido com duas cores. Dessa maneira, define uma sequência de pares de origem, onde os vértices de cada par (não necessariamente distintos) devem enviar, simultaneamente, uma demanda de fluxo ao vértice de destino, usando dois caminhos internamente disjuntos em vértices. O Algoritmo 2-por-2 garante uma solução ótima para o problema em grafos 3-conexos e tem fator de aproximação $\frac{3}{2}$ para o índice cromático de fluxo em grafos 2-conexos arbitrários (CAMPÊLO *et al.*, 2012).

O PCF $_d$ é NP-difícil para grafos bipartidos, mesmo nos casos em que $d = 2$ e o grafo tem múltiplas origens, ou $d \geq 3$ e o grafo tem uma única origem (CAMPÊLO *et al.*,

2015). Já para grafos bipartidos ou 3-conexos, Campêlo *et al.* (2015) estabelecem o tempo de resolução do PCF como $O(|V|^2 + \alpha|V||E|)$, onde $\alpha = \alpha(|E|, |V|)$ é a inversa da função de Ackermann. Embora não esteja explícito em (CAMPÊLO *et al.*, 2015), pode-se concluir dos resultados que, nessas duas classes de grafos, o índice cromático de fluxo pode ser determinado em tempo $O(|V||E|)$. Apesar desses resultados positivos para grafos bipartidos ou 3-conexos, a complexidade do PCF ainda está em aberto para grafos gerais.

Este trabalho, tem como objetivo propor novas abordagem de resolução para o PCF. Para isso, desenvolvemos uma estratégia onde o fluxo e a coloração que compõem uma solução viável do problema são obtidos em etapas separadas, diferente da abordagem de Campêlo *et al.* (2012) e Campêlo *et al.* (2015), onde esses são construídos de forma simultânea. Dessa estratégia, extraímos um algoritmo exato para grafos bipartidos e $(\frac{5}{4} + \frac{1}{2\chi'_\Phi})$ -aproximativo para grafos gerais, onde χ'_Φ é o número ótimo de cores, reduzindo assim o fator de aproximação $3/2$ fornecido pelo algoritmo de Campêlo *et al.* (2012) para grafos 2-conexos. Tal desenvolvimento passa pela definição de um novo problema, relacionado ao PCF, a ser chamado *problema do fluxo de mínimo grau máximo*. Realizamos um estudo da complexidade deste problema e mostramos estreitas relações dele com o PCF. Além disso, propomos duas formulações de programação inteira originais para o PCF, além de uma terceira, diretamente adaptada de um modelo proposto para PPR por Gomes (2009). Realizamos um estudo teórico das três formulações matemáticas, comparando os limites gerados por suas relaxações lineares e derivamos desigualdades válidas para um dos modelos, e propomos formas de utilizá-las para obter métodos heurísticos e exatos para o problema.

O conteúdo dos próximos capítulos deste texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2, introduzimos os conceitos que são base para a compreensão deste trabalho e apresentamos uma definição formal do PCF. No Capítulo 3, introduzimos o problema de fluxo de mínimo grau máximo, estabelecemos sua relação com o PCF e mostramos como construir, a partir dessa relação, um método aproximativo para o PCF. No Capítulo 4, realizamos um estudo teórico dos modelos matemáticos propostos para o PCF. No Capítulo 5, descrevemos uma heurísticas para o PCF e apresentamos resultados computacionais a seu respeito. No Capítulo 6, sugerimos um método exato para o problema. Por fim, no Capítulo 7, apresentamos nossas conclusões a respeito deste trabalho e discutimos possíveis trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Neste capítulo, apresentaremos conceitos que são pré-requisito para o conteúdo presente nos capítulos seguintes.

2.1 Algoritmos e classes de problemas

A *função complexidade de tempo* de um algoritmo é uma função $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ que quantifica o número máximo de passos que o algoritmo levar em sua execução, expresso em termos do *tamanho da entrada*. Quando a entrada é uma instância de um problema, o tamanho da entrada é comumente chamado *tamanho da instância*, e tal função estima, em certa medida, o tempo que o algoritmo gasta para resolvê-lo.

Dadas duas funções $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, dizemos que $f(n) = O(g(n))$, se existem dois inteiros positivos c e n_0 tais que $f(n) \leq cg(n)$, para todo $n \geq n_0$. Se $f(n) = O(g(n))$, dizemos que $g(n)$ é um *limitante superior assintótico* para $f(n)$.

Seja d um inteiro não negativo. Um *polinômio* $p(n)$ de *grau* d é uma função $p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$, onde as constantes a_0, \dots, a_d são *coeficientes* do polinômio e $a_d \neq 0$. Um polinômio de grau d é assintoticamente positivo se, e somente se, $a_d > 0$. Se o polinômio $p(n)$ é assintoticamente positivo, é fácil ver que $p(n) = O(n^d)$. Um algoritmo é dito *polinomial*, se sua função de complexidade de tempo $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ é $f(n) = O(p(n))$ para algum polinômio $p(n)$, onde n é o tamanho da entrada.

O problema que tratamos neste trabalho é classificado como de otimização. Em um *problema de otimização*, cada solução viável tem um valor associado e desejamos encontrar uma solução viável de melhor valor (ou *solução ótima*), isto é, uma solução viável de valor máximo, quando temos um *problema de maximização*, ou uma solução viável de valor mínimo, quando temos um *problema de minimização*, como no nosso caso. Observe que um problema de maximização pode ser convertido em um problema de minimização e vice-versa simplesmente invertendo o sinal do valor de cada solução. Sendo assim, podemos sempre supor que o melhor valor é não negativo.

Um *algoritmo α -aproximativo* ou um *algoritmo com fator de aproximação α* para um problema de otimização é um algoritmo polinomial \mathcal{A} que, para uma instância I qualquer do problema, produz uma solução cujo valor $\mathcal{A}(I)$ pertence ao intervalo

$$[\min\{\lambda(I), \alpha\lambda(I)\}, \max\{\lambda(I), \alpha\lambda(I)\}],$$

onde $\lambda(I) > 0$ é o valor de uma solução ótima de I . Chamaremos α de *fator de aproximação* ou *garantia de aproximação* do algoritmo. Por convenção, $\alpha > 1$ para problemas de minimização e $\alpha < 1$ para problemas de maximização. Portanto, um algoritmo 2-aproximativo para um problema de minimização é um algoritmo polinomial que sempre retorna uma solução de valor no máximo o dobro do valor ótimo.

Em geral, para o caso de minimização, um algoritmo α -aproximativo satisfaz

$$\alpha \leq \sup_I \left\{ \frac{\mathcal{A}(I)}{\lambda(I)} \right\}.$$

Observe que essa medida de desempenho pode não ser a melhor quando, mesmo o algoritmo devolvendo sempre soluções de valor bem perto do ótimo, existem instâncias onde o valor ótimo se aproxima de zero, levando o fator α a ser alto. A partir dessa observação, costuma-se também adotar outra medida de desempenho. Dizemos que um algoritmo polinomial \mathcal{A} para um problema de minimização tem *fator de aproximação assintótico* α se satisfaz

$$\alpha \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_I \left\{ \frac{\mathcal{A}(I)}{\lambda(I)} : \lambda(I) = k \right\}.$$

Apesar de tratarmos de um problema de otimização, falamos pontualmente neste trabalho de *NP-completude* e, para compreender esse tema, precisamos entender também o que é um problema de decisão. Um *problema de decisão* é uma pergunta sobre os parâmetros de entrada do problema cuja resposta é *sim* ou *não*. Chamamos de P o conjunto de todos os problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial. Dessa forma, dizemos que um problema de decisão pertence à classe P , se existe um algoritmo polinomial que o resolve.

Um problema de decisão pertence à classe NP se, para cada instância cuja resposta é *sim*, existe um *certificado* de tamanho polinomial que pode ser usado para verificar, em tempo polinomial, que a resposta para essa instância é de fato *sim*. Um certificado pode ser considerado uma prova de que uma instância tem resposta *sim*.

Dados dois problemas de decisão A e B , dizemos que A é *polinomialmente redutível* à B , se existe um algoritmo polinomial que transforma uma instância x de A em uma instância $y(x)$ de B de tal forma que x é uma instância de A cuja resposta é *sim* se, e somente se, $y(x)$ é uma instância de B com resposta *sim*.

Um problema de decisão é *NP-difícil*, se todo problema de NP pode ser reduzido polinomialmente a esse problema. Se o problema é *NP-difícil* e pertence a NP , então ele é dito *NP-completo*. Alternativamente, um problema de decisão é *NP-Completo*, se está em NP e

qualquer outro problema já conhecido ser *NP*-Completo pode ser reduzido em tempo polinomial a ele.

Quando perguntamos se o valor ótimo de um problema de otimização é limitado (superiormente, no caso de minimização, ou inferiormente, no caso de maximização) por um certo valor k , temos nessa pergunta a *versão de decisão* para o referido problema de otimização. Se a versão de decisão de um problema de otimização é *NP*-difícil, então o problema de otimização também o é.

2.2 Teoria de poliedros

Dados $S = \{x^1, x^2, \dots, x^p\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, o vetor $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x^i$ é uma *combinação convexa* de S , se $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. A *envoltória convexa* de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada por $\text{conv}(S)$, é o conjunto de todas as combinações convexas de seus subconjuntos finitos. Um *politopo* é a envoltória convexa de um conjunto finito de pontos. Um subconjunto de \mathbb{R}^n é dito *convexo*, se é igual a sua envoltória convexa.

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo não vazio. Uma *direção de recessão* de C é um vetor $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $x + \lambda d \in C$, para todos $x \in C$ e $\lambda \geq 0$. O *cone de recessão* de C , denotado por $\text{rec}(C)$, é o conjunto de todas as direções de recessão de C junto com 0. Observe que $\text{rec}(C) = \{0\}$ quando C é limitado, ou seja, existe $L > 0$ tal que $\|x\| \leq L$, para todo $x \in C$. Em particular, $\text{rec}(C) = \{0\}$ quando C é um politopo.

Um *semiespaço* é um conjunto da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha^T x \leq \alpha_0\}$, para $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Um *poliedro* é um conjunto definido pela interseção de um número finito de semiespaços. Todo poliedro é um conjunto convexo.

Pelas definições de semiespaço e poliedro, temos então a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1. $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é poliedro se, e somente se, existem $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ tais que $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

A matriz (A, b) da Proposição 2.2.1 é dita uma representação do poliedro P . Quando há uma representação com coeficientes racionais, o poliedro é chamado racional. Um conhecido e importante teorema estabelece que a envoltória convexa dos pontos inteiros de um poliedro racional também é um poliedro.

Teorema 2.2.2 ((MEYER, 1974)). Se $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ é um poliedro racional não vazio, então $P_I = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$ é um poliedro racional. Mais ainda, se $P_I \neq \emptyset$, então $\text{rec}(P_I) = \text{rec}(P)$.

O *politopo dos emparelhamentos* de um grafo $G = (V, E)$, denotado por $P_{emp}(G)$, é a envoltória convexa dos vetores de incidência dos emparelhamentos de G , ou seja, do conjunto de pontos $\{x \in \mathbb{B}^{|E|} : \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \forall v \in V\}$.

Teorema 2.2.3. *Para um grafo $G = (V, E)$ qualquer, o poliedro $P_{emp}(G)$ é descrito pelo sistema*

$$x \in \mathbb{R}_+^{|E|}, \quad (2.1)$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \quad \forall v \in V, \quad (2.2)$$

$$\sum_{e \in E[U]} x_e \leq \frac{|U| - 1}{2}, \quad \forall U \subseteq V, |U| \geq 3 \text{ e ímpar}, \quad (2.3)$$

onde $E[U]$ é o conjunto de arestas de G com ambas as extremidades em U .

Uma demonstração para o teorema acima pode ser encontrada em Ferreira e Wakabayashi (1996, p. 77).

2.3 Otimização matemática

Um problema de otimização matemática consiste na minimização (ou maximização) de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *função objetivo*, em um conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, chamado *conjunto viável*. Normalmente, escrevemos

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in \Omega.$$

As expressões que definem o conjunto viável Ω são chamadas *restrições* do problema. Cada ponto $x \in \Omega$ é dito uma *solução viável*, e uma solução viável x^* tal que $f(x^*) \leq f(x)$, para todo $x \in \Omega$, é uma *solução ótima*. O *valor* de uma solução x é $f(x)$, enquanto o *valor (ótimo)* do problema é $f(x^*)$.

Quando a função objetivo é linear e o conjunto viável, um poliedro, temos um *problema de programação linear* (PPL), usualmente escrito como:

$$\min c^T x \text{ sujeito a } Ax \leq b, x \geq 0, \quad (2.4)$$

para vetores $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ e matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. As restrições $x \geq 0$ podem ser sempre consideradas, a partir de uma mudança de variáveis que leve o poliedro para o primeiro octante. Problemas de programação linear podem ser resolvidos em tempo polinomial.

O *dual* do PPL (2.4) é outro PPL, da forma:

$$\max b^T u \text{ sujeito a } A^T u \leq c, u \leq 0.$$

Observe que, no dual, as variáveis são $u \in \mathbb{R}^m$, existe uma dessas variáveis associada a cada restrição no PPL original e existe uma restrição relativa a cada variável do PPL original. Os algoritmos para resolver (2.4) em geral fornecem como subproduto a solução ótima do dual.

O Teorema Fundamental da Dualidade Linear (TFD) estabelece que pontos \bar{x} e \bar{u} são ótimos para um PPL e seu dual se, e somente se, são viáveis e possuem o mesmo valor para os respectivos problemas. Esse teorema sugere uma estratégia para resolver (2.4), conhecida como *geração de colunas*, especialmente útil quando há muitas variáveis. Primeiro, resolve-se um subproblema com apenas algumas variáveis, digamos x' (isso corresponde a fixar as demais variáveis, digamos x'' , em 0), chamado problema restrito. Encontram-se, assim, soluções ótimas \bar{x}' e \bar{u} para o problema restrito e seu dual. Caso $A^T \bar{u} \leq c$, pelo TFD, $(x', x'') = (\bar{x}', 0)$ e $u = \bar{u}$ são soluções ótimas para problema original e seu dual. Caso contrário, qualquer restrição dual violada por \bar{u} “gera” uma coluna a ser acrescentada ao problema restrito. Lembre que cada restrição do dual é definida por uma coluna (variável) do PPL. A identificação da restrição dual mais violada por \bar{u} define o *subproblema de geração de colunas*.

Acrescentando restrições de integralidade às variáveis de um PPL, obtemos um *problema de programação inteira puro* (PPI), ou seja,

$$\min c^T x \text{ sujeito a } Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n. \quad (2.5)$$

O PPL obtido descartando as restrições de integralidade $x \in \mathbb{Z}^n$ é chamado *relaxação linear*. Seu valor ótimo fornece um limite inferior para o PPI. Diferentemente de um PPL, um PPI é um problema NP-Difícil em geral.

Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ e $P_I = \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$. Pelo Teorema 2.2.2, temos que P_I é um poliedro. Mais ainda, pode-se mostrar que o PPI (2.5) é equivalente ao PPL:

$$\min c^T x \text{ sujeito a } x \in P_I.$$

Dessa forma, um PPI poderia ser resolvido a partir da determinação e resolução do seu PPL equivalente. Entretanto, a obtenção de P_I é um problema geralmente difícil. Alternativamente, uma estratégia para encontrar uma solução para (2.5) consiste em resolver uma sequência de problemas lineares

$$(\mathcal{P}_k) \min \{c^T x : x \in P_k\}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

onde

$$P = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supseteq P_I$$

e P_{k+1} não contém uma solução ótima x^k (vértice de P_k) obtida para problema (\mathcal{P}_k) , caso fracionária. Por outro lado, se $x^k \in \mathbb{Z}^n$, então x^k é uma solução do problema (2.5), e o processo se encerra. Em toda iteração, $c^T x^k$ é um limite inferior para o valor ótimo do PPI.

Usualmente, o conjunto P_{k+1} é definido a partir da determinação de uma desigualdade $\pi^T x \leq \pi_0$ que é satisfeita por todos os pontos viáveis (em $P \cap \mathbb{Z}^n$) mas violada por x^k . Dessa forma, fazemos $P_{k+1} = \{x \in P_k : \pi^T x \leq \pi_0\}$. A desigualdade $\pi^T x \leq \pi_0$ é dita um *plano de corte* (ela “corta” o ponto indesejado $x^k \in P \setminus P_l$), e essa abordagem é chamada *método dos planos de corte* (*cutting plane method*). A identificação do plano de corte define o *problema de separação*.

Outra abordagem para (2.5) consiste particionar o poliedro P em poliedros menores P'_1, \dots, P'_t tais que $P = \bigcup_{i=1}^t P'_i$ (e idealmente $P'_i \cap P'_j = \emptyset$, para $i \neq j$) e resolver os subproblemas

$$(\mathcal{P}'_k) \min\{c^T x : x \in P'_k\}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, t\}.$$

Note que o valor ótimo do problema original é dado pelo valor ótimo do subproblema com menor valor. Essa subdivisão pode ser feita recursivamente, até que o subproblema possa efetivamente ser resolvido ou descartado (quando sabemos que ele não será o subproblema de menor valor). Para descartar um subproblema podemos, por exemplo, comparar o valor ótimo de sua relaxação linear com o valor de uma solução viável. Caso este seja menor que ou igual àquele, o subproblema pode ser descartado. Esse método é chamado *branch-and-bound* e sua composição com planos de corte é conhecida como *branch-and-cut*.

Para maiores detalhes sobre métodos para programação linear e interior, sugerimos consultar referências como Wolsey (1998).

2.4 Teoria dos grafos

2.4.1 Grafos simples e multigrafos

Um *grafo simples* é um par $G = (V, E)$, onde $V \neq \emptyset$ é um conjunto finito e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de V . Os elementos de V e E são, respectivamente, chamados de *vértices* (ou *nós*) e *arestas* de G . Em certos casos, tratamos E como um multiconjunto, permitindo múltiplas ocorrências de uma mesma aresta uv em E (usualmente abreviamos $\{u, v\}$ para uv). Nesses casos, G é chamado *multigrafo*, dois múltiplos de uv são ditas arestas paralelas e chamamos *multiplicidade* de uv o número de múltiplos de uv em E . Denotamos a multiplicidade de uv por $\mu(u, v)$ (ou $\mu(e)$, se $uv = e$), e a *multiplicidade máxima* de uma aresta de um multigrafo G como $\mu(G) = \max_{e \in E} \mu(e)$. Note que, sob essas

definições, um grafo simples é um multigrafo, mas um multigrafo pode não ser um grafo simples. Neste trabalho, também utilizamos o termo *grafo* para nos referir a um grafo simples.

Dois vértices u e v são *adjacentes*, se $uv \in E$. Dada uma aresta $e = uv \in E$, dizemos que e *incide* nos vértices u e v e que os dois são *extremidades* de e . Também é dito que u é *vizinho* de v e vice-versa. Similarmente, duas arestas que incidem em um mesmo vértice são chamadas adjacentes ou vizinhas. Denotamos $\delta(v)$ como o multiconjunto de arestas que incidem em v e $N(v)$ como o multiconjunto de vértices vizinhos de v . O número de arestas incidentes em v é chamado *grau* de v , e denotamos por $\Delta(G) = \max_{v \in V} |\delta(v)|$ o *grau máximo* de G .

Um grafo simples em que cada dois vértices distintos são adjacentes é um *grafo completo*. Denotamos um grafo completo com n vértices por K_n . É fácil verificar que um K_n tem $(n^2 - n)/2$ arestas.

Um *caminho* é um grafo simples cujos vértices podem ser ordenados de tal forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos na ordenação. Denotamos como P_n um caminho com n vértices. Em um caminho, todos os vértices têm grau 2 com exceção das *extremidades* (o primeiro e o último vértice da ordenação) que têm grau 1. Denotamos P_{uv} um caminho com extremidades u e v e o chamamos um *uv-caminho*.

Um *ciclo* é um grafo simples formado por um caminho, com extremidades digamos u e v , adicionado da aresta uv . Observe que todos os vértices têm agora grau 2. Denotamos C_n um ciclo com n vértices. Um C_3 (ou equivalentemente K_3) também é comumente chamado de *triângulo*. Um multigrafo é *livre de triângulo*, se não tem um triângulo como subgrafo.

Um multigrafo $H = (U, A)$ é um *subgrafo* de um multigrafo $G = (V, E)$, se $U \subseteq V$ e $A \subseteq E$. Em particular, H é dito *subgrafo induzido* por U quando A é o conjunto de todas as arestas de G com ambas as extremidades em U . Nesse caso, denotamos A por $E[U]$ e H por $G[U]$.

2.4.2 Conectividade

Um multigrafo $G = (V, E)$ é *conexo*, se, para todo par de vértices distintos $u \in V$ e $v \in V$, existe um caminho, como subgrafo de G , em que u e v são extremidades. Um multigrafo não conexo é chamado *desconexo*. A *conectividade* de um multigrafo $G = (V, E)$, escrita como $\kappa(G)$, é o menor tamanho de um conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que $G[V \setminus S]$ é desconexo ou tem apenas um vértice. Dizemos que G é *k-conexo*, se sua conectividade é pelo menos k .

Um *conjunto desconectante* de um multigrafo conexo $G = (V, E)$ é um conjunto

$A \subseteq E$ tal que $H = (V, E \setminus A)$ é desconexo. Um multigrafo é *k-conexo em arestas*, se todo conjunto desconectante tem pelo menos k arestas. A *conectividade em arestas* de G , denotada por $\kappa'(G)$, é o tamanho do menor conjunto desconectante de G . Um *corte de arestas* de G é um conjunto de arestas da forma $[S, \bar{S}]$, onde S é um subconjunto próprio não vazio de V , $\bar{S} = V \setminus S$ e $[S, \bar{S}]$ é o multiconjunto de arestas de G que têm uma extremidade em S e outra em \bar{S} .

2.4.3 Multigrafos bipartidos

Se o conjunto de vértices de um multigrafo G pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos A e B de tal forma que cada aresta de G tem uma extremidade em A e outra em B , então G é um multigrafo *bipartido*.

Teorema 2.4.1. *Um multigrafo G é bipartido se, e somente se, todo ciclo em G tem tamanho par.*

Uma prova do Teorema 2.4.1 pode ser encontrada em (WILSON *et al.*, 1972, p. 33).

2.4.4 Coloração de arestas

Uma *coloração de arestas* de um multigrafo $G = (V, E)$ é um função $\sigma : E \rightarrow C$ que associa à cada aresta $e \in E$ uma cor $\sigma(e) \in C$, onde C é um conjunto de cores (as cores são comumente representadas por números). Uma coloração de arestas onde quaisquer duas arestas adjacentes possuem cores diferentes é uma *coloração própria de arestas*. Uma *k-coloração de arestas* é uma coloração própria de arestas com k cores distintas. O *índice cromático* de um multigrafo G , denotado por $\chi'(G)$, é o menor valor inteiro $k > 0$ tal que G admite uma k -coloração de arestas.

Seja σ uma k -coloração de arestas de um multigrafo $G = (V, E)$. Uma *classe de cor* é um conjunto de arestas $E_{\sigma a} = \{e \in E : \sigma(e) = a\}$, onde a é uma cor presente em σ . Um *emparelhamento* em G é um conjunto de arestas não adjacentes par-a-par. Como nenhum par de arestas adjacentes recebe a mesma cor em uma k -coloração (própria) de arestas, toda classe de cor dessa coloração é um emparelhamento. Portanto, repare que há uma correspondência um-para-um entre uma k -coloração de arestas de G e um particionamento (A_1, \dots, A_k) de E em k emparelhamentos.

A partir dessa observação, podemos formular o problema de coloração de arestas em

um multigrafo $G = (V, E)$ através do seguinte modelo de programação linear 0-1:

$$\chi'(G) = \min \left\{ \sum_{m \in \mathcal{M}} x_m : \sum_{m: e \in m} x_m = 1 \forall e \in E, x \in \{0, 1\}^{|\mathcal{M}|} \right\},$$

onde \mathcal{M} é o conjunto de todos os emparelhamentos de G e x_m indica se o emparelhamento $m \in \mathcal{M}$ será ou não usado com uma classe de cor. O valor da relaxação linear do modelo acima define o chamado *índice cromático fracionário* de G , denotado por $\chi^*(G)$, ou seja,

$$\chi^*(G) = \min \left\{ \sum_{m \in \mathcal{M}} x_m : \sum_{m: e \in m} x_m = 1 \forall e \in E, x \in [0, 1]^{|\mathcal{M}|} \right\}.$$

Note que $\Delta(G)$ é um limite inferior para $\chi'(G)$, pois todas as arestas incidentes em qualquer vértice devem receber cores distintas. Adicionalmente, como toda classe de cor é um emparelhamento e como todo emparelhamento de qualquer subgrafo induzido $G[U] = (U, E[U])$ tem no máximo $\lfloor |U|/2 \rfloor$ arestas, outro limite inferior para $\chi'(G)$ é $\lceil \rho(G) \rceil$, onde

$$\rho(G) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{|E[U]|}{\lfloor |U|/2 \rfloor} : U \subseteq V, |U| \geq 2 \right\}, & \text{se } |V| \geq 2, \\ 0, & \text{se } |V| \leq 1. \end{cases}$$

Na verdade, é conhecido que

$$\chi^*(G) = \max\{\Delta(G), \rho(G)\},$$

mostrando que o limite inferior dado pela relaxação linear que define $\chi^*(G)$ é exatamente o melhor entre os dois limites descritos acima. Veja, por exemplo, (STIEBITZ *et al.*, 2012, Apêndice B).

A clássica Conjectura de Goldberg pressupõe que esse limite inferior se distancia do ótimo em no máximo uma unidade.

Conjectura 2.4.1 ((GOLDBERG, 1973)). *Todo multigrafo G satisfaz*

$$\lceil \chi^*(G) \rceil = \max\{\Delta(G), \lceil \rho(G) \rceil\} \leq \chi'(G) \leq \max\{\Delta(G) + 1, \lceil \rho(G) \rceil\}.$$

Caso essa conjectura seja verdadeira, teríamos que

$$\lceil \chi^*(G) \rceil \leq \chi'(G) \leq \lfloor \chi^*(G) \rfloor + 1, \quad (2.6)$$

pois teríamos $\chi'(G) \leq \max\{\Delta(G) + 1, \lceil \rho(G) \rceil\} \leq \max\{\Delta(G), \lceil \rho(G) \rceil - 1\} + 1 \leq \max\{\Delta(G), \lfloor \rho(G) \rfloor\} + 1 = \lfloor \chi^*(G) \rfloor + 1$.

2.4.5 Fluxo em rede

Um *digrafo* é um par ordenado $D = (V, A)$, onde V é um conjunto de vértices e A é um conjunto de pares ordenados de V , chamada *conjunto de arcos*. Usualmente abreviaremos a escrita (u, v) de um arco para uv . Em analogia ao conceito de caminho para grafo simples, definimos *caminho direcionado* como um digrafo cujos vértices podem ser ordenados de tal forma que existe um arco uv se, e somente se, u e v são consecutivos na ordenação, com u antes de v . O primeiro e último vértices na ordem são a origem e o destino do caminho. Similarmente, um *ciclo orientado* é um digrafo simples formado por um caminho direcionado, com origem u e destino v , adicionado do arco vu .

Uma *rede* é um digrafo $D = (V, A)$ com uma função de capacidade $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ sobre os arcos. Em certos casos, associa-se também a uma rede uma *função de demanda* $b : V \rightarrow \mathbb{R}$, com $\sum_{v \in V} b(v) = 0$, sobre os vértices. Denotaremos por $N = (V, A, c, b)$ uma rede N definida por um digrafo $D = (V, A)$, uma função de capacidade c e uma função de demanda b . Omitiremos a função de capacidade sempre que ela definir capacidade ilimitada para todos os arcos da rede, ou a função de demanda quando a rede é instância para o problema de fluxo máximo, que será definido mais adiante.

Um *fluxo* em uma rede $D = (V, A, c, b)$ é uma função $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ sobre os arcos de D . Um fluxo ϕ em D é um *fluxo inteiro* se $\phi(u, v) \in \mathbb{Z}_+$, para todo $uv \in A$. Dado um vértice $v \in V$, dizemos que $\sum_{vu:vu \in A} \phi(v, u)$ é o *fluxo que sai* de v e $\sum_{uv:uv \in A} \phi(u, v)$ é o *fluxo que entra* em v . O *balanço de um fluxo* ϕ sobre um vértice $v \in V$, denotado por $b_\phi(v)$, é dado pelo fluxo que sai de v menos o fluxo que entra em v , ou seja,

$$b_\phi(v) = \sum_{vu:vu \in A} \phi(v, u) - \sum_{uv:uv \in A} \phi(u, v).$$

Um fluxo ϕ em D é *viável* se $\phi(i, j) \leq c(i, j)$, para todo $ij \in A$, e $b_\phi(v) = b(v)$, para todo $v \in V$.

Sejam s e t vértices distintos de uma rede $D = (V, A, c)$. Um *st-fluxo* ϕ em D é um fluxo viável com balanço $b_\phi(s) = -b_\phi(t) \geq 0$ e $b_\phi(v) = 0$, para todo $v \in V \setminus \{s, t\}$. Dizemos que $b_\phi(s)$ é o valor do *st-fluxo* ϕ . Um *st-fluxo máximo* é um *st-fluxo* de valor máximo. O problema de encontrar um *st-fluxo máximo* em uma rede com dois vértices especiais s (vértice de origem) e t (vértice de destino) é conhecido como o *problema de fluxo máximo*. Se for adicionada a restrição de que o *st-fluxo máximo* deve ser inteiro, então o balanço de s nesse fluxo é inteiro e, por consequência, o valor desse *st-fluxo máximo* também é inteiro.

2.5 Problema de coloração de fluxo

Seja $G = (V, E, b)$ um grafo conexo, ponderado em vértices, onde V é o conjunto de vértices, E é o conjunto de arestas e $b : V \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma *função de demanda* tal que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$. Destacamos um *vértice de destino* $t \in V$, consideramos $b(v) \geq 0$ para $v \in V - t$ e, consequentemente, $b(t) = -\sum_{v \in V-t} b(v)$. Chamamos $v \in V$ *vértice de origem* se $b(v) > 0$. A cada aresta $ij \in E$, associamos dois arcos antiparalelos (i, j) e (j, i) , gerando assim o conjunto $A_G = \{(i, j), (j, i) : ij \in E\}$ e a rede $D_G = (V, A_G, b)$. A partir disso, definimos o conjunto

$$\Phi(G) = \left\{ \phi : A_G \rightarrow \mathbb{Z}_+ \mid \sum_{(v,u) \in A_G} \phi(v,u) - \sum_{(u,v) \in A_G} \phi(u,v) = b(v), \forall v \in V \right\},$$

que compreende os fluxos inteiros viáveis em D_G . Por simplicidade, chamamos $\phi \in \Phi(G)$ *fluxo viável* de G . Cada fluxo $\phi \in \Phi(G)$ define um multigrafo $G_\phi = (V, E, \phi)$, onde uma aresta $e = ij \in E$, em G_ϕ , tem multiplicidade $\phi(i, j) + \phi(j, i)$ (se $\phi(i, j) + \phi(j, i) = 0$, então e não está em G_ϕ). Usaremos indistintamente $b(v)$ e b_v para representar a demanda de v , ou ainda $\phi(i, j)$ e ϕ_{ij} para o fluxo que passa no arco (i, j) .

O *problema de coloração de fluxo* (PCF) sobre G consiste em encontrar uma solução viável, composta por um fluxo viável $\phi \in \Phi(G)$ e uma coloração própria σ das arestas de G_ϕ , tal que σ tem o menor número de cores distintas, ou seja, tem exatamente

$$\chi'_\Phi(G) = \min_{\phi \in \Phi(G)} \chi'(G_\phi)$$

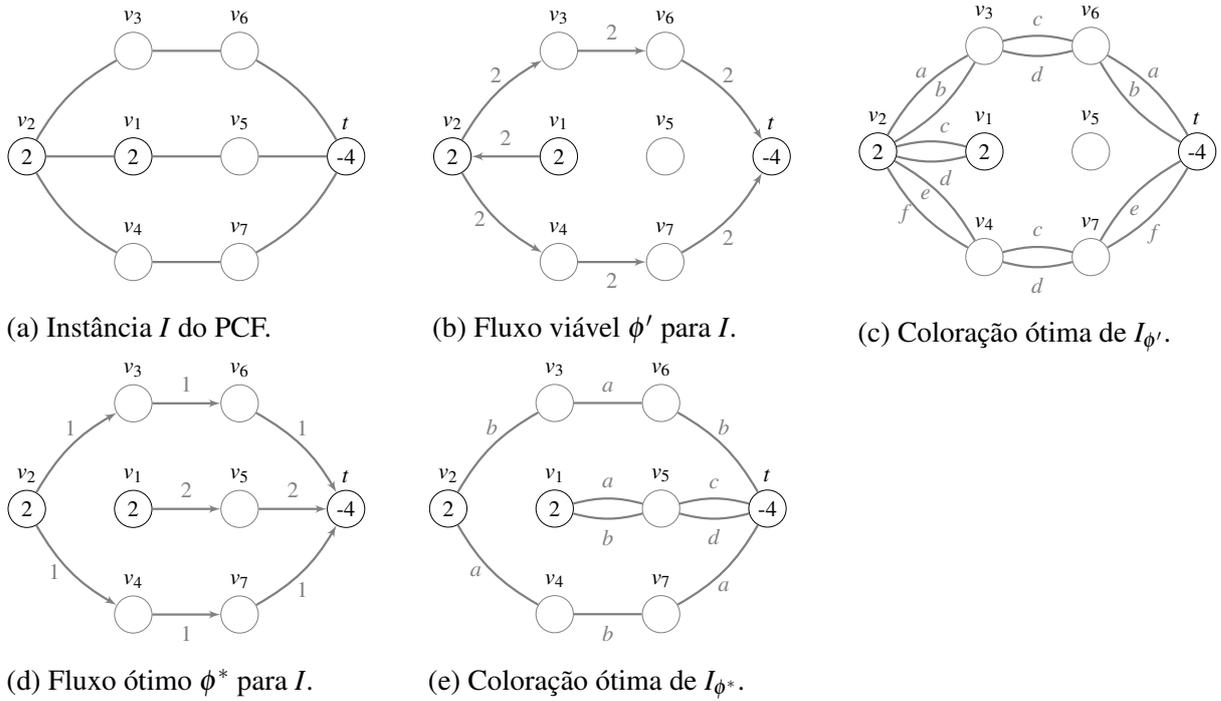
cores. Chamaremos $\chi'_\Phi(G)$ de *índice cromático de fluxo* e diremos que ϕ é um *fluxo ótimo* de G se $\phi \in \Phi_{\min}(G) = \{\phi \in \Phi(G) : \chi'(G_\phi) = \chi'_\Phi(G)\}$. Similarmente, define-se o *índice cromático fracionário de fluxo* de G como

$$\chi^{f*}_\Phi(G) = \min_{\phi \in \Phi(G)} \chi^{f*}(G_\phi).$$

Na Figura 1, são apresentadas duas soluções viáveis para uma instância do PCF, uma ótima e uma não ótima. A Figura 1a apresenta uma instância I para o problema. Observe que os vértices v_1 e v_2 têm demanda 2 e o vértice t tem demanda -4 (os demais vértices têm demanda nula), ou seja, v_1 e v_2 são vértices de origem e t é o vértice de destino de I . As Figuras 1b e 1d mostram respectivamente dois fluxos viáveis ϕ' e ϕ^* para I , onde o valor mais próximo de cada arco representa seu respectivo valor de fluxo. Nas Figuras 1c e 1e, temos os multigrafos derivados dos fluxos ϕ' e ϕ^* , respectivamente. Aqui, a coloração das arestas é representada pelas letras próximas de cada aresta. Apesar de terem número distinto de cores, as duas colorações de

arestas são próprias e mínimas em seus respectivos multigrafos. Em especial, a solução composta pelo fluxo da Figura 1d e a coloração da Figura 1e tem o menor número de cores possível para essa instância, ou seja, $\chi'(I_{\phi^*}) = \chi'_{\Phi}(I)$, portanto, essa solução é ótima para I levando o fluxo ϕ^* a ser também ótimo para a mesma.

Figura 1 – Exemplos de soluções viáveis para uma instância do PCF.



Fonte: produzida pelo autor.

3 MÉTODO APROXIMATIVO

Seja $G = (V, E, b)$ uma instância para o PCF e

$$B = \sum_{s \in S} b(s), \quad \text{onde } S = \{s \in V : b(s) > 0\}.$$

Neste capítulo, apresentaremos um algoritmo aproximativo para o PCF que fornece uma solução viável com até $\lfloor (5\chi'_{\Phi}(G) + 2)/4 \rfloor$ cores. Para isso, introduziremos uma nova abordagem que, diferente daquela empregada por esses autores, onde a coloração e o fluxo que compõem a solução são construídos simultaneamente, trata o problema em duas etapas: na primeira etapa, encontra para G um fluxo ϕ com $\Delta(G_{\phi})$ mínimo e G_{ϕ} livre de triângulo; na segunda, constrói uma coloração própria para as arestas de G_{ϕ} com até $\lfloor (5\chi'_{\Phi}(G) + 2)/4 \rfloor$ cores. Em especial, nos casos em que G é bipartido, o algoritmo é capaz de encontrar uma solução ótima para o problema.

3.1 Problema do fluxo de mínimo grau máximo

Introduziremos aqui um problema fortemente ligado ao PCF, a ser denominado *problema do fluxo de mínimo grau máximo* (MinGM), que consiste em determinar

$$\Delta_{\Phi}(G) = \min_{\phi \in \Phi(G)} \Delta(G_{\phi}).$$

Os valores de B , $\Delta_{\Phi}(G)$ e $\chi'_{\Phi}(G)$ relacionam-se como segue:

Proposição 3.1.1. *Sejam $G = (V, E, b)$ uma instância do PCF e $\phi^* \in \Phi(G)$ tal que $\chi'_{\Phi}(G) = \chi'(G_{\phi^*})$. Então*

$$B \leq \Delta_{\Phi}(G) \leq \Delta(G_{\phi^*}) \leq \chi'_{\Phi}(G) \leq \min\left\{\left\lfloor \frac{3}{2}\Delta_{\Phi}(G) \right\rfloor, 2B\right\} \leq \min\left\{\left\lfloor \frac{3}{2}\Delta(G_{\phi^*}) \right\rfloor, 2B\right\}.$$

Demonstração. Como para todo fluxo $\phi \in \Phi(G)$ o grau de t em G_{ϕ} é B , temos, pela definição de $\Delta_{\Phi}(G)$, que $\Delta_{\Phi}(G) \geq B$. Também pela definição seguem imediatamente as desigualdades $\Delta_{\Phi}(G) \leq \Delta(G_{\phi^*})$ e $\min\{\lfloor \frac{3}{2}\Delta_{\Phi}(G) \rfloor, 2B\} \leq \min\{\lfloor \frac{3}{2}\Delta(G_{\phi^*}) \rfloor, 2B\}$. Além disso, como é necessário pelo menos $\Delta(G_{\phi^*})$ cores para colorir G_{ϕ^*} , chegamos a $\chi'_{\Phi}(G) = \chi'(G_{\phi^*}) \geq \Delta(G_{\phi^*})$. Considere agora $\phi^{\diamond} \in \Phi(G)$ tal que $\Delta_{\Phi}(G) = \Delta(G_{\phi^{\diamond}})$. Pelo limite de Shannon (SHANNON, 1949), temos que $\chi'(G_{\phi^{\diamond}}) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta(G_{\phi^{\diamond}}) \rfloor$, levando a $\chi'_{\Phi}(G) \leq \chi'(G_{\phi^{\diamond}}) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta_{\Phi}(G) \rfloor$. Para finalizar, resta-nos mostrar que $\chi'_{\Phi}(G) \leq 2B$. Esse limite superior é trivialmente obtido com a seguinte solução viável. Para cada $s \in S$, envie $b(s)$ unidades de fluxo através de qualquer st -caminho e colora-o com até $2b(s)$ cores. \square

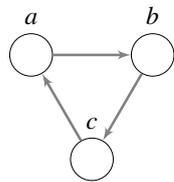
A última sentença da prova da Proposição 3.1.1 nos fornece um algoritmo para encontrar uma solução viável do PCF com até $2B$ cores. Também pela proposição, podemos inferir que o algoritmo é 2-aproximativo para grafos gerais, visto que B é um limite inferior para o valor ótimo. Com relação à complexidade, os st -caminhos em G , um para cada $s \in S$, podem ser determinados em tempo $O(|E|)$ com uma *busca em largura* (SCHRIJVER, 2003, p. 88). Dados os caminhos, o fluxo e a coloração podem ser construídos simultaneamente, atribuindo a cada aresta de um st -caminho determinado, com $s \in S$, $b(s)$ unidades de fluxo e colorindo, de forma alternada, com até $2b(s)$ cores, as arestas do caminho. Visto que são até $|V| - 1$ caminhos de tamanho até $|V| - 1$, então o tempo total é dado por $O(|E|) + O(|V|^2) = O(|V|^2)$.

A seguir mostraremos que podemos sempre admitir um multigrafo de mínimo grau máximo que seja livre de triângulo.

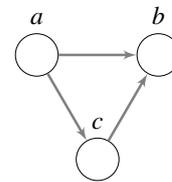
Proposição 3.1.2. *Sejam $G = (V, E, b)$ uma instância de PCF e $\phi^* \in \Phi(G)$ tal que $\Delta_\Phi(G) = \Delta(G_{\phi^*})$. Em tempo $O(|V|^3)$ é possível obter $\tilde{\phi} \in \Phi(G)$ tal que $\Delta_\Phi(G) = \Delta(G_{\tilde{\phi}})$ e $G_{\tilde{\phi}}$ é livre de triângulo.*

Demonstração. Se G_{ϕ^*} é livre de triângulo, trivialmente tomamos $\tilde{\phi} = \phi^*$. Do contrário, sejam a, b, c vértices de G_{ϕ^*} que formam um triângulo. Os arcos de A_G entre esses vértices pelos quais passa o fluxo ϕ^* induzem dois possíveis digrafos: (i) um circuito (ver Figura 2a) ou (ii) um digrafo acíclico (ver Figura 2b). Sem perda de generalidade, podemos admitir no primeiro caso que o circuito é orientado no sentido $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ e, no segundo, que a é fonte e b , sumidouro. Em

Figura 2 – Possíveis subdigrafos de (V, A_G) correspondentes a um triângulo a, b, c em G_{ϕ^*} .



(a) Circuito $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$.



(b) DAG com fonte a e sumidouro b .

Fonte: produzida pelo autor.

cada caso, podemos obter um novo fluxo $\phi' \in \Phi(G)$ tal que $\Delta_\Phi(G) = \Delta(G_{\phi'})$ e $G_{\phi'}$ não contém triângulo entre os vértices a, b, c , como segue:

- (i) Seja $k = \min\{\phi_{ab}^*, \phi_{bc}^*, \phi_{ca}^*\}$. Defina ϕ' reduzindo k unidades do fluxo ϕ^* no circuito e mantendo o mesmo fluxo nos demais arcos. Claramente, $\phi' \in \Phi(G)$ e, como o fluxo ϕ' é nulo em pelo menos um dos arcos do circuito, $G_{\phi'}$ não possui triângulo entre a, b e c .

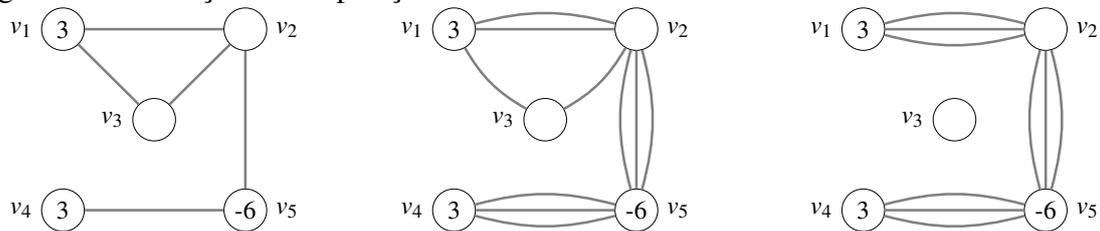
Além disso, a , b e c têm seus graus reduzidos de $2k$ em $G_{\phi'}$, com relação a G_{ϕ^*} , enquanto os demais vértices mantêm o mesmo grau. Logo, $\Delta(G_{\phi'}) \leq \Delta(G_{\phi^*})$ e, por conseguinte, $\Delta_{\Phi}(G) = \Delta(G_{\phi'})$.

- (ii) Seja $k = \min\{\phi_{ac}^*, \phi_{cb}^*\}$. Defina ϕ' a partir de ϕ^* , aumentando em k unidades o fluxo em (a, b) e diminuindo em k unidades aquele em (a, c) e (c, b) . Novamente, $\phi' \in \Phi(G)$ e, como $\phi'_{ac} = 0$ ou $\phi'_{cb} = 0$, $G_{\phi'}$ não possui triângulo entre a , b e c . Além disso, c tem seu grau reduzido de $2k$ em $G_{\phi'}$, com relação a G_{ϕ^*} , enquanto os demais vértices mantêm o mesmo grau. Logo, $\Delta(G_{\phi'}) \leq \Delta(G_{\phi^*})$ e, por conseguinte, $\Delta_{\Phi}(G) = \Delta(G_{\phi'})$.

A partir de ϕ' , repetindo o processo no máximo $\binom{|V|}{3} = O(|V|^3)$ chegamos a um um fluxo $\tilde{\phi}$ com as propriedades desejadas. \square

A Figura 3 ilustra o enunciado da Proposição 3.1.2. Na Figura 3a, temos uma instância de MinGM (e de PCF). As Figuras 3b e 3c apresentam os multigrafos associados a duas soluções ótimas, sendo que o primeiro possui triângulo e o segundo não.

Figura 3 – Ilustração da Proposição 3.1.2.



(a) Instância de MinGM. (b) Solução ótima com triângulo. (c) Solução ótima sem triângulo.

Fonte: produzida pelo autor.

A *cintura ímpar* de um multigrafo H , denotada por $g_o(H)$, é o tamanho do menor ciclo ímpar de H , sendo $g_o(H) = \infty$ quando H é bipartido. Goldberg (1984) estabelece que

$$\chi'(H) \leq \Delta(H) + 1 + \frac{\Delta(H) - 2}{g_o(H) - 1} = \frac{g_o(H)\Delta(H) + g_o(H) - 3}{g_o(H) - 1}. \quad (3.1)$$

Observe que, se H contém triângulo, o limite superior em (3.1) é exatamente o de Shannon, ou seja $(3/2)\Delta(H)$. Todavia, para multigrafos livres de triângulo, esse limite é melhor. Como consequência, podemos fortalecer o resultado da Proposição 3.1.1 como segue.

Lema 3.1.1. *Sejam $G = (V, E, b)$ uma instância do PCF e $\phi^* \in \Phi(G)$, com $\Delta(G_{\phi^*}) = \Delta_{\Phi}(G)$ e G_{ϕ^*} livre de triângulo. Então*

$$\chi'(G_{\phi^*}) \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1} \right\rfloor.$$

Demonstração. Visto que G_{ϕ^*} é livre de triângulo, temos que $g_o(G_{\phi^*}) \geq 5$. Além disso, temos também que $g_o(G_{\phi^*}) \geq g_o(G)$, pois alterar a multiplicidade das arestas de G não produz ciclos ímpares menores que aqueles por ventura existentes em G . Portanto, $g_o(G_{\phi^*}) \geq \max\{g_o(G), 5\}$. Note que, na Desigualdade (3.1), quanto menor $g_o(H)$, maior é o lado direito da inequação para um $\Delta(H)$ fixo. Dessa forma, aplicando a Desigualdade (3.1) para o menor $g_o(G_{\phi^*})$ possível, obtemos

$$\chi'(G_{\phi^*}) \leq \Delta(G_{\phi^*}) + 1 + \frac{\Delta(G_{\phi^*}) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1}.$$

Como $\Delta(G_{\phi^*}) = \Delta_{\Phi}(G)$ e $\chi'(G_{\phi^*})$ é um inteiro não negativo, então

$$\chi'(G_{\phi^*}) \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1} \right\rfloor.$$

□

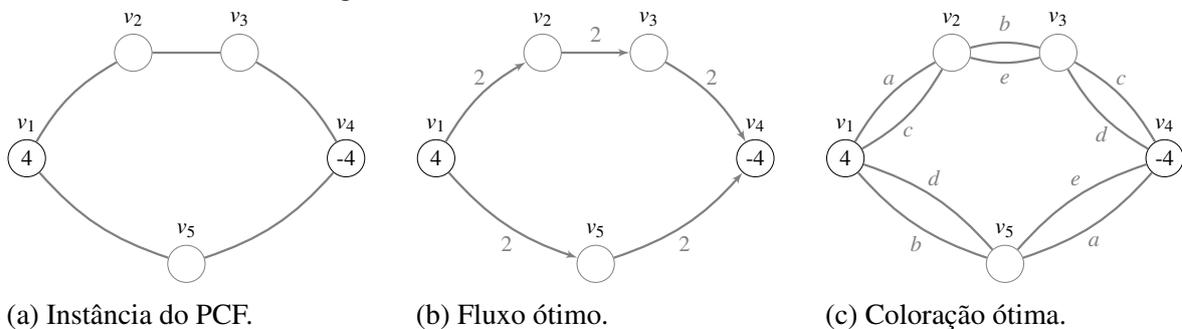
Pela definição de $\chi'_{\Phi}(G)$, é imediato ao Lema 3.1.1 o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3. *Se $G = (V, E, b)$ é uma instância do PCF, então*

$$\chi'_{\Phi}(G) \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1} \right\rfloor.$$

O Teorema 3.1.3 estabelece um limite superior, calculado em função de $\Delta_{\Phi}(G)$, mais apertado que os $\lfloor (3/2)\Delta_{\Phi}(G) \rfloor$ da Proposição 3.1.1. De fato, o maior valor desse limite é $\lfloor (5\Delta_{\Phi}(G) + 2)/4 \rfloor$, que ocorre quando $\max\{g_o(G), 5\} = 5$, e $(3/2)\Delta_{\Phi}(G) \geq (5\Delta_{\Phi}(G) + 2)/4$ sempre que $\Delta_{\Phi}(G) \geq 2$. Note que a única possibilidade de termos $\Delta_{\Phi}(G) = 1$ ocorre no caso trivial em que $B = 1$ e o único vértice fonte é adjacente a t .

Figura 4 – Exemplo de instância do PCF cujo valor ótimo atinge o limite superior do Teorema 3.1.3 na igualdade.



(a) Instância do PCF.

(b) Fluxo ótimo.

(c) Coloração ótima.

Fonte: produzida pelo autor.

O exemplo da Figura 4 ilustra um caso em que o limite do Teorema 3.1.3 (nesse exemplo $\lfloor (5\Delta_{\Phi}(G) + 2)/4 \rfloor$, pois $g_o(G) = 5$) é atingido, e ele é estritamente mais apertado

que o limite $\lfloor (3/2)\Delta_{\Phi}(G) \rfloor$. Para verificar que é de fato mais apertado, é suficiente mostrar que $\Delta_{\Phi}(G) = 4$, o que faria o primeiro limite igual a 5 e o segundo, a 6. Note, na Figura 4a, que v_1 e v_4 são, respectivamente, o único vértice de origem e único de destino e que $B = 4$. Logo, $\chi'_{\Phi}(G) \geq \Delta_{\Phi}(G) \geq 4$. Considerando o fluxo viável exibido na Figura 4b, concluímos que $\Delta_{\Phi}(G) = 4$. Além disso, a coloração desse fluxo com 5 cores, conforme Figura 4c, implica que $\chi'_{\Phi}(G) \leq 5$. Por outro lado, observe que qualquer outro fluxo viável levaria a um grau máximo maior ou igual a 6 e, conseqüentemente, a uma coloração com pelo menos 6 cores. Isso mostra que $\chi'_{\Phi}(G) = 5$, de modo que o limite do Teorema 3.1.3 é atingido.

3.2 Obtendo um multigrafo de mínimo grau máximo

Apresentaremos um algoritmo polinomial para resolver o MinGM. Para isso, criaremos, a partir de uma instância G do PCF (as instâncias do MinGM são as mesmas do PCF), uma instância G' (digrafo com arestas capacitadas) para o problema do fluxo máximo.

Dada uma instância $G = (V, E, b)$ do MinGM, seja $\Delta' \in \mathbb{Z}$ um valor entre B e $2B$ (incluindo os extremos). Faça $G' = (V', A', c')$ ser o digrafo onde $V' = V \cup \{v' : v \in V\} \cup \{s'\}$, $A' = \{(s', v) : v \in S\} \cup \{(v', v) : v \in V\} \cup \{(u, v') : (u, v) \in A_G\}$,

$$\forall uv \in A', c'(u, v) = \begin{cases} b(v), & \text{se } u = s', \\ \lfloor \frac{\Delta' - b(v)}{2} \rfloor, & \text{se } u = v', \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

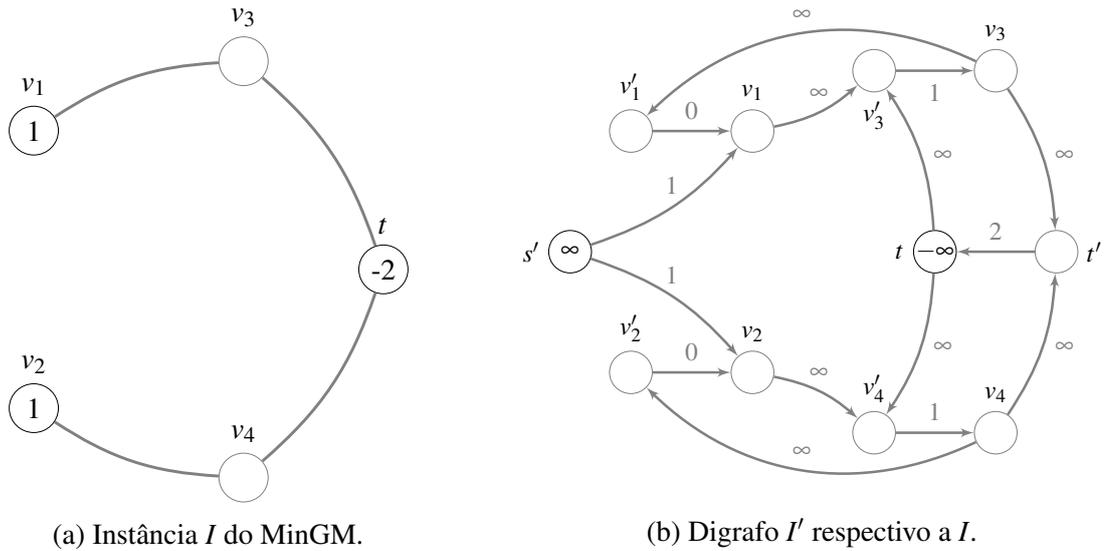
A exemplo, considere a Figura 5, onde é mostrada uma instância I para o MinGM e seu respectivo digrafo I' , com $\Delta' = 2$.

A Figura 5a apresenta uma instância I para o MinGM. Observe que os vértices v_1 e v_2 têm demanda 1 e o vértice t tem demanda -2 (os demais vértices têm demanda nula). Na Figura 5b é mostrado o digrafo I' , construído a partir de I e $\Delta' = 2$, onde o valor mais próximo de cada arco representa sua respectiva capacidade. Note que s' é o novo vértice de origem e t o de destino em I' .

Para uma instância G e seus respectivos G' e Δ' , considere o seguinte proposição:

Proposição 3.2.1. *Existe $\phi \in \Phi(G)$ com $\Delta(G_{\phi}) \leq \Delta'$ se e somente se G' tem $s't$ -fluxo máximo de valor B .*

Figura 5 – Exemplo de digrafo auxiliar para o MinGM.



Fonte: produzida pelo autor.

Demonstração. Suponha $\phi \in \Phi(G)$ com $\Delta(G_\phi) \leq \Delta'$. Note que as somas das capacidades dos arcos que saem de s' em G' é B , o que implica que um $s't$ -fluxo máximo em G' tem valor no máximo B . Portanto, basta mostrar, para a condição suficiente, que existe em G' um $s't$ -fluxo $\phi' : A' \rightarrow \mathbb{Z}_+$ de valor B que respeita as capacidades e a conservação de fluxo. Faça

$$\phi'(s', v) = b(v), \forall v \in S;$$

$$\phi'(u, v') = \phi(u, v), \forall (u, v) \in A_G;$$

$$\phi'(v', v) = \sum_{u \in N(v)} \phi(u, v), \forall v \in V.$$

Primeiramente, considere $v \in V - t$. Observe que, em ϕ' , a quantidade de fluxo que entra em v é a mesma que sai. De fato:

$$\phi'(v', v) (+\phi'(s', v), \text{ se } v \in S) = \sum_{u \in N(v)} \phi(u, v) (+b(v), \text{ se } v \in S) = \sum_{u \in N(v)} \phi(v, u) = \sum_{u \in N(v)} \phi'(v, u'),$$

onde a primeira e última igualdades saem da definição de ϕ' e a segunda, da conservação de fluxo em ϕ . O mesmo acontece para $w' \in \{u' : u \in V\}$:

$$\sum_{u \in N(w')} \phi'(u, w') = \sum_{u \in N(w)} \phi(u, w) = \phi'(w', w).$$

Em especial, para t , $\phi'(t', t) - \sum_{u \in N(t)} \phi'(t, u') = \sum_{u \in N(t)} \phi(u, t) - \sum_{u \in N(t)} \phi(t, u) = b(t) = -B$, e trivialmente para s' , temos $\sum_{u \in S} \phi'(s', u) = B$. Com isso, mostramos que ϕ' respeita a conservação de fluxo em G' . Para verificar o cumprimento das capacidades, suponha agora $v \in V$. Quando $v \in S$, vemos na definição de $\phi'(s', v)$ que o arco (s', v) tem sua capacidade $b(v)$ respeitada. Resta

então considerar $(v', v) \in A'$. Observe que o grau de v em G_ϕ , que é no máximo Δ' , é dado por $\sum_{u \in N(v)} \phi(u, v) + \sum_{u \in N(v)} \phi(v, u) \leq \Delta'$, o que pode ser reescrito como $b(v) + 2\sum_{u \in N(v)} \phi(u, v) = b(v) + 2\phi'(v', v) \leq \Delta'$. Reorganizando os termos obtemos $\phi'(v', v) \leq \frac{\Delta' - b(v)}{2}$, e como $\phi'(v', v) \in \mathbb{Z}_+$, então $\phi'(v', v) \leq \lfloor \frac{\Delta' - b(v)}{2} \rfloor$.

Para a implicação inversa, suponha agora que G' tem $s't$ -fluxo máximo ϕ' de valor B . Construiremos um fluxo $\phi \in \Phi(G)$ tal que $\Delta(G_\phi) \leq \Delta'$. Para este propósito, considere $\phi(u, v) = \phi'(u, v')$, $\forall uv \in A_G$. Suponha $v \in S$. Pela conservação de fluxo em ϕ' , temos $\sum_{u \in N(v)} \phi'(u, v') = \phi'(v', v)$ e $\sum_{u \in N(v)} \phi'(v, u') = \phi'(s', v) + \phi'(v', v)$. Portanto,

$$\sum_{u \in N(v)} \phi(v, u) - \sum_{u \in N(v)} \phi(u, v) = \sum_{u \in N(v)} \phi'(v, u') - \sum_{u \in N(v)} \phi'(u, v') = \phi'(s', v).$$

Como o valor de ϕ' é B , $\phi'(s', v) = c'(s', v) = b(v)$. Logo, ϕ respeita a conservação de fluxo em v . Quanto ao grau de v em G_ϕ , que é dado por $d_{G_\phi}(v) = \sum_{u \in N(v)} \phi(v, u) + \sum_{u \in N(v)} \phi(u, v)$, observe que

$$d_{G_\phi}(v) = \phi'(s', v) + \phi'(v', v) + \phi'(v', v) \leq b(v) + 2\lfloor \frac{\Delta' - b(v)}{2} \rfloor \leq b(v) + \Delta' - b(v) = \Delta'.$$

Consideramos agora $v \in V \setminus S$. Nesse caso, temos $\sum_{u \in N(v)} \phi'(u, v') = \phi'(v', v)$, $\sum_{u \in N(v)} \phi'(v, u') = \phi'(v', v)$ (se $v \neq t$) e $\sum_{u \in N(v)} \phi'(v, u') = \phi'(v', v) - B$ (se $v = t$). Como consequência, para $v \neq t$,

$$\sum_{u \in N(v)} \phi'(v, u') - \sum_{u \in N(v)} \phi'(u, v') = \phi'(v', v) - \phi'(v', v) = 0 = b(v).$$

E, para $v = t$,

$$\sum_{u \in N(v)} \phi'(v, u') - \sum_{u \in N(v)} \phi'(u, v') = \phi'(v', v) - B - \phi'(v', v) = -B = b(v).$$

Por fim, também nesse caso, o grau de v é no máximo Δ' , visto que, se $v \neq t$,

$$d_{G_\phi}(v) = \phi'(v', v) + \phi'(v', v) \leq 2\lfloor \frac{\Delta' - b(v)}{2} \rfloor \leq \Delta' - b(v) = \Delta',$$

e, se $v = t$,

$$d_{G_\phi}(v) = \phi'(v', v) - B + \phi'(v', v) \leq 2\lfloor \frac{\Delta' - b(v)}{2} \rfloor - B \leq \Delta' - b(v) - B = \Delta'.$$

□

A segunda parte da prova da Proposição 3.2.1 também nos fornece o fluxo de mínimo grau máximo, caso este grau seja conhecido.

Corolário 3.2.1. *Seja ϕ' o $s't$ -fluxo máximo em G' com $\Delta' = \Delta_{\Phi}(G)$. Então $\phi \in \Phi(G)$ tal que $\phi(u, v) = \phi'(u, v')$, $\forall uv \in A_G$, satisfaz $\Delta(G_{\phi}) = \Delta_{\Phi}(G)$.*

Pelo Teorema do Fluxo Máximo e Corte Mínimo (FORD; FULKERSON, 1956; DANTZIG; FULKERSON, 2003), temos que G' tem fluxo máximo de valor inferior ou igual a B , independente de Δ' , posto que $\delta(s')$ define um corte de valor B em G' . Sendo assim, obtemos da Proposição 3.2.1 o seguinte resultado:

Corolário 3.2.2. *Um $s't$ -fluxo máximo em G' tem valor estritamente menor do que B , para todo $\Delta' < \Delta_{\Phi}(G)$, e exatamente B , para todo $\Delta' \geq \Delta_{\Phi}(G)$.*

Pelo Corolário 3.2.2, podemos então calcular $\Delta_{\Phi}(G)$ encontrando o menor Δ' tal que G' tem fluxo máximo B . Pela Proposição 3.1.1, sabemos que $B \leq \Delta_{\Phi}(G) \leq 2B$, de modo que é suficiente considerar Δ' nesse intervalo. Assim, um meio de calcular $\Delta_{\Phi}(G)$ seria fazer inicialmente $\Delta' = B$, resolver o fluxo máximo para G' e, se o valor do fluxo máximo for $< B$, fazer $B \leftarrow B + 1$ e repetir o procedimento até que o fluxo máximo tenha valor B . Visto que resolver o problema do fluxo máximo em G' pode ser feito em tempo $O(|V'||E'|)$ (ORLIN, 2013), a abordagem descrita leva tempo $O(|V'||E'|B)$ para calcular $\Delta_{\Phi}(G)$. Note que esse tempo é expresso em função do valor de B e não do tamanho de sua representação ($\log_2 B$, se supormos B em uma codificação binária). Dessa forma, como $B = 2^{\log_2 B}$, ou seja, o valor de B cresce de forma exponencial em função do número de dígitos em sua representação, o tempo de resolução dessa abordagem é dito pseudopolinomial (PAPADIMITRIOU, 2003, p. 203).

Podemos contornar esse problema e encontrar um algoritmo polinomial para o MinGM, se aplicarmos uma busca binária entre B e $2B$. Essa segunda estratégia, descrita de forma precisa no Algoritmo 1, reduz o tempo de resolução do MinGM para $O(|V'||E'| \log B)$. Veremos a seguir, na demonstração do Teorema 3.2.2, que, calculando o tempo de resolução em função do números de vértices e arestas do grafo original G (e não do digrafo correspondente G'), a complexidade assintótica ficará $O(|V||E| \log B)$.

Teorema 3.2.2. *Dado um grafo $G = (V, E, b)$ conexo, o Algoritmo 1 encontra um fluxo $\phi \in \Phi(G)$ tal que $\Delta(G_{\phi}) = \Delta_{\Phi}(G)$ em tempo $O(|V||E| \log B)$, onde $B = \sum_{s \in V: b(s) > 0} b(s)$.*

Demonstração. A construção de G' na Linha 3 do algoritmo leva tempo $O(|E| + |V|)$, se considerarmos que o número de arcos adicionados em G' é $|A_G| = 2|E|$ e que, além desses, também são adicionados os arcos das cópias dos vértices para eles mesmos e os arcos de s' para os

vértices de origem de G , totalizando $|E'| = 2|E| + |V| + |S|$, onde S é o conjunto de vértices de origem. No entanto, o tempo da Linha 3 é dominado pelo tempo gasto na Linha 4 do algoritmo, usado para computar um $s't$ -fluxo máximo: $O(|V'||E'|) = O(|V|(|E| + |V|)) = O(|V||E|)$ (lembre que G é conexo, ou seja, $|E| \geq |V| - 1$). Durante a execução do algoritmo, com exceção da base da recursão, ocorre uma chamada recursiva na Linha 12 ou na Linha 14, a depender o valor do fluxo máximo. Note que, a cada chamada, o espaço de busca é reduzido pela metade, de modo que o número de chamadas é de ordem $O(\log B)$. O algoritmo tem fim quando o tamanho do espaço de busca é unitário. Nesse momento, é executado o trecho entre as Linhas 7 e 9, que leva tempo $O(|E|)$. Dessa forma, o Algoritmo 1 leva tempo total $O((|E| + |V|) \log B) + O(|V||E| \log B) + O(|E|) = O(|V||E| \log B)$. Por fim, note que o Corolário 3.2.1 garante que obtemos o fluxo desejado, e o Corolário 3.2.2 garante o sucesso da busca binária, ou seja, o Δ' encontrado quando é executada a última recursão é o menor Δ' tal que o fluxo máximo tem valor B . \square

Algoritmo 1: MINGM

Entrada : $G = (V, E, b)$ conexo e um intervalo de busca $[i, f]$ (inicialmente $i = B$ e $f = 2B$)

Saída : Fluxo $\phi \in \Phi(G)$ com $\Delta(G_\phi) = \Delta_\Phi(G)$

```

1 início
2    $\Delta' \leftarrow \lfloor \frac{i+f}{2} \rfloor$ 
3    $G' \leftarrow \text{CONSTRUIR-}G'(G, \Delta')$ 
4    $\phi' \leftarrow \text{FLUXO-MAXIMO}(G')$ 
5    $\phi \leftarrow 0$ 
6   se  $i = f$  então
7     para  $uv \in A_G$  faça
8        $\phi(uv) \leftarrow \phi'(uv')$ 
9     fim
10  senão
11    se VALOR( $\phi'$ ) =  $B$  então
12       $\phi \leftarrow \text{MINGM}(G, [i, \Delta'])$ 
13    senão
14       $\phi \leftarrow \text{MINGM}(G, [\Delta' + 1, f])$ 
15    fim
16  fim
17  retorna  $\phi$ 
18 fim
```

3.3 Colorindo um multigrafo de mínimo grau máximo

Seja G uma instância do PCF e $\phi \in \Phi(G)$ tal que $\Delta(G_\phi) = \Delta_\Phi(G)$. Trataremos agora da coloração de G_ϕ . Dividiremos esse assunto em dois casos: quando G_ϕ é bipartido, onde falaremos de um algoritmo capaz de obter uma solução ótima do PCF em G ; e quando não o é, onde abordaremos uma estratégia para obter uma solução viável com até $\lfloor (5\chi'_\Phi(G) + 2)/4 \rfloor$ cores.

3.3.1 Grafos bipartidos

O Teorema de Kőnig sobre coloração de arestas diz que, para qualquer multigrafo bipartido G , $\chi'(G) = \Delta(G)$ (KÖNIG, 1916; SCHRIJVER, 1998). Segue desse teorema a seguinte propriedade para bipartidos:

Proposição 3.3.1. *Se G é bipartido, então $\chi'_\Phi(G) = \Delta_\Phi(G)$.*

Demonstração. Suponha G bipartido e $\phi \in \Phi(G)$ tal que $\Delta(G_\phi) = \Delta_\Phi(G)$. Observe que modificar a multiplicidade das arestas de E não produz ciclos ímpares. Portanto, G_ϕ também é bipartido. Dessa forma, temos

$$\chi'(G_\phi) = \Delta(G_\phi) = \Delta_\Phi(G) \leq \chi'_\Phi(G) \leq \chi'(G_\phi).$$

□

Esse resultado nos assegura uma estratégia, usando o Algoritmo 1, para encontrar de forma eficiente uma solução ótima do PCF em bipartidos.

Teorema 3.3.2. *Dado um grafo bipartido $G = (V, E, b)$ com $B = \sum_{s \in V: b(s) > 0} b(s)$, o índice cromático de fluxo de G , $\chi'_\Phi(G)$, pode ser obtido em tempo $O(|E||V| \log B)$. Além disso, uma solução (ϕ, σ) para o PCF pode ser obtida em tempo $O((|E| + B)|V| \log B)$, onde ϕ é um fluxo viável com $\Delta(G_\phi)$ mínimo e σ uma coloração própria das arestas de G_ϕ com $\chi'_\Phi(G)$ cores.*

Demonstração. A Proposição 3.3.1 e o Teorema de König nos garantem que, se $G = (V, E, b)$ é bipartido, ϕ um fluxo com $\Delta(G_\phi)$ mínimo e σ uma coloração de arestas própria mínima de G_ϕ , o par (ϕ, σ) é uma solução ótima para o PCF em G . Além disso, podemos calcular ϕ em tempo $O(|V||E| \log B)$ (Teorema 3.2.2) e obter uma coloração própria mínima para G_ϕ em tempo $O(|E_\phi| \log \Delta(G_\phi))$ (COLE *et al.*, 2001), onde E_ϕ é o multiconjunto de arestas de G_ϕ .

Quanto à complexidade de tempo para obtenção da coloração ótima, podemos limitar $\Delta(G_\phi)$ e $|E_\phi|$ em função do tamanho da instância $G = (V, E, b)$, como segue. Primeiro, observe que, pela Proposição 3.1.1, $\Delta(G_\phi) \leq 2B$. Dessa forma, temos que $\log \Delta(G_\phi) \leq \log 2B = \log B + \log 2 = O(\log B)$, ou seja, $\log \Delta(G_\phi) = O(\log B)$. Sobre a cardinalidade de E_ϕ , note que, em ϕ , cada uma das B unidades de fluxo sai de um vértice $s \in S$ para t através de um caminho (usando Orlin (2013), podemos admitir que ϕ não possui circulação de fluxo). Cada aresta do caminho contribui, então, em uma unidade para $|E_\phi|$, para cada unidade de fluxo que passa por esse caminho. Como um caminho de s para t tem até $|V| - 1$ arestas, temos então que $|E_\phi| \leq B(|V| - 1) = O(B|V|)$. Com isso, obtemos $|E_\phi| \log \Delta(G_\phi) = O(B|V| \log B)$.

Juntando as duas partes do procedimento, concluímos que o tempo para encontrar a solução ótima é $O((|E| + B)|V| \log B)$. \square

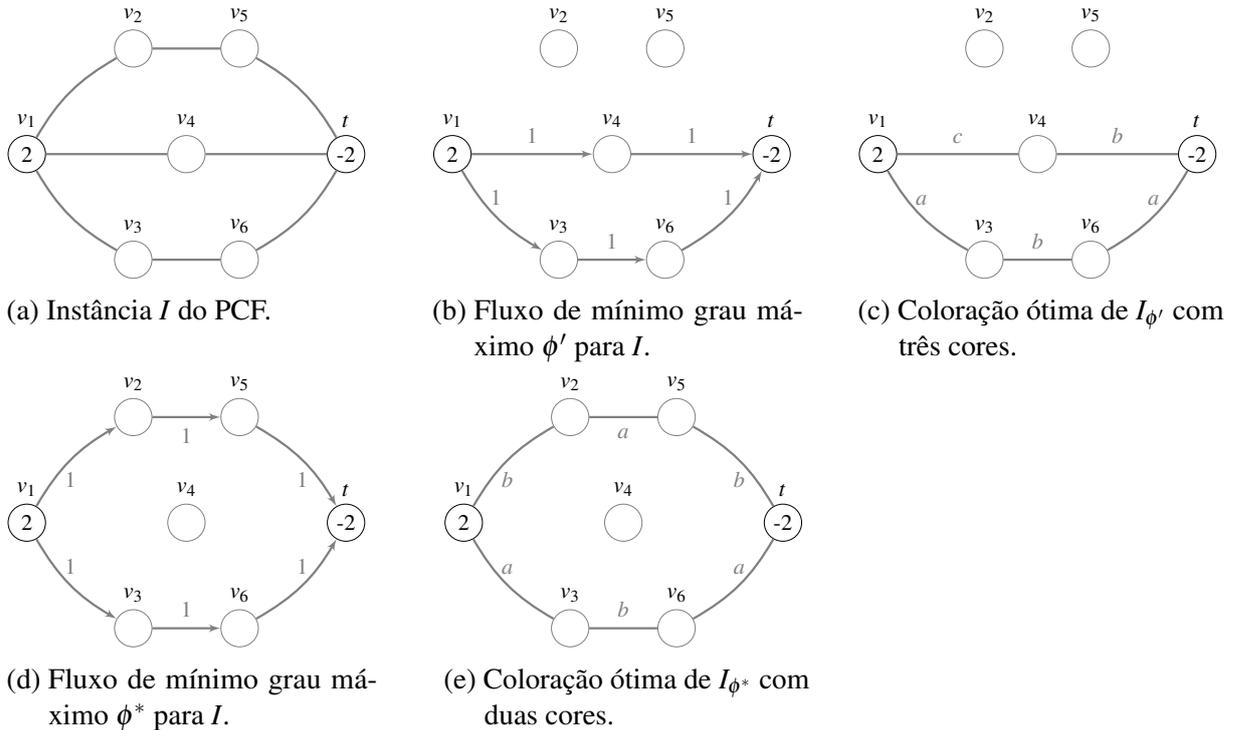
Lembre que a abordagem de Campêlo *et al.* (2015) para grafos bipartidos leva $O(|V||E|)$ para encontrar $\chi'_\Phi(G)$ e $O(|V|^2 + \alpha|V||E|)$ para obter uma solução ótima do PCF, onde $\alpha = \alpha(|E|, |V|)$ é a inversa da função de Ackermann. Sendo $B = O(1)$, o Teorema 3.3.2 estabelece complexidades similares. Caso contrário, a abordagem da literatura mostra-se assintoticamente melhor tanto no cálculo de $\chi'_\Phi(G)$ quanto na obtenção de uma solução ótima.

3.3.2 Grafos arbitrários

Sejam $G = (V, E, b)$ uma instância para o PCF e $\phi^* \in \Phi(G)$ um fluxo com $\Delta(G_{\phi^*}) = \Delta_\Phi(G)$ e G_{ϕ^*} livre de triângulo. Pelo Teorema 3.2.2 e Proposição 3.1.2, um fluxo com tais propriedades pode ser obtido em tempo polinomial. Por outro lado, não sabemos se existe um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração própria mínima σ^* para as arestas de G_{ϕ^*} . No entanto, mostraremos que, tratando esse problema com certos algoritmos aproximativos para coloração de arestas de multigrafos gerais, podemos obter de forma eficiente uma solução (ϕ^*, σ) para o PCF com garantia de aproximação de $\chi'_\Phi(G)$ similar à que daria (ϕ^*, σ^*) . Observe que não podemos assegurar ser ϕ^* um fluxo ótimo para o PCF (ver Figura 6). Portanto, mesmo obtendo uma coloração ótima para G_{ϕ^*} , ainda seria possível ter $\chi'_\Phi(G) < \chi'(G_{\phi^*})$.

A estratégia básica do nosso método aproximativo para o PCF é a seguinte. Considere um algoritmo aproximativo para coloração de arestas com fator de aproximação assintótico $\alpha \geq 1$, que, portanto, colore G_{ϕ^*} com até $\alpha \chi'(G_{\phi^*}) + \beta$ cores, para alguma constante β . Limitando superiormente $\chi'(G_{\phi^*})$ por $f(\Delta(G_{\phi^*}))$, onde f é uma função afim crescente (obtida por exemplo pelo limite de Goldberg (3.1)), temos que no máximo $\alpha f(\Delta(G_{\phi^*})) + \beta$ cores são usadas. Mais

Figura 6 – Exemplos de fluxos de mínimo grau máximo ótimo e não ótimo para o PCF.



Fonte: produzida pelo autor.

ainda, como $\Delta(G_{\phi^*}) = \Delta_{\Phi}(G) \leq \chi'_{\Phi}(G)$, podemos também expressar o limite máximo de cores como $\alpha f(\chi'_{\Phi}(G)) + \beta$, levando uma aproximação para o PCF. Além disso, quando a garantia de aproximação do algoritmo inicial já for dada em função do grau máximo, ou seja, ele usa até $\alpha \Delta(G_{\phi^*}) + \beta$ cores (o que levaria também ao limite $\alpha \chi'(G_{\phi^*}) + \beta$, pois $\Delta(H) \leq \chi'(H), \forall H$), obtemos diretamente a garantia de até $\alpha \chi'_{\Phi}(G) + \beta$ para o PCF.

Foi provado por Holyer (1981) que é NP-completo decidir se um grafo simples qualquer tem índice cromático ≤ 3 . Este resultado implica que, a menos que $P = NP$, não existe algoritmo polinomial para o problema de encontrar uma coloração própria das arestas de um multigrafo $H = (U, A)$ qualquer com fator de aproximação melhor do que $\frac{4}{3}$ (HOCHBAUM *et al.*, 1986). No entanto, permitindo um pequeno erro aditivo, garantias de aproximação melhores foram obtidas em vários trabalhos. Em particular, foram estabelecidas ao longo dos anos garantias da forma $\frac{m\chi'(H)+(m-3)}{m-1}$, para valores ímpares de m , sucessivamente maiores. Ver, por exemplo, Goldberg (1973) e Andersen (1975) para $m \in \{5, 7\}$, Goldberg (1977), Goldberg (1984) e Hochbaum *et al.* (1986) para $m = 9$, Nishizeki e Kashiwagi (1990) e Tashkinov (2000) para $m = 11$, Favrholt *et al.* (2006) para $m = 13$, Scheide (2010) para $m = 15$, Chen *et al.* (2018) para $m = 23$ e Chen e Jing (2018) para $m = 39$. Na verdade esses trabalhos apresentam provas, que se traduzem em algoritmos, mostrando como colorir um multigrafo H otimamente (com

$\chi'(H)$ cores) ou com até

$$\frac{m\Delta(H) + (m-3)}{m-1} = \Delta(H) + 1 + \frac{\Delta(H) - 2}{m-1} \quad (3.2)$$

cores. Por conveniência, chamaremos tais algoritmos de m -algoritmos.

A exemplo, vamos considerar o algoritmo de Hochbaum *et al.* (1986), associado a $m = 9$. Para um multigrafo $H = (U, A)$, ele apresenta complexidade $O(|A|(|U| + \Delta(H)))$. Assim, dado $G_{\phi^*} = (V, E_{\phi^*})$ como entrada, o algoritmo encontra em tempo $O(|E_{\phi^*}|(|V| + \Delta(G_{\phi^*})))$ uma coloração com até $\lfloor (9\chi'(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$ cores. Para isso, o algoritmo inicia com $\lfloor (9\Delta(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$ cores disponíveis e vai colorindo as arestas iterativamente. Ele tem a forte propriedade de que, se alguma cor for adicionada (além das iniciais), então a coloração produzida é ótima. Por outro lado, se nenhuma cor a mais é adicionada, o valor da solução é no máximo $\lfloor (9\Delta(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$. Em outras palavras, a coloração obtida tem $\chi'(G_{\phi^*})$ cores, quando $\chi'(G_{\phi^*}) > \lfloor (9\Delta(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$, ou até $\lfloor (9\Delta(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$ cores, caso contrário. Posto que $\Delta(G_{\phi^*}) = \Delta_{\Phi}(G)$ e G_{ϕ^*} é livre de triângulo, o Lema 3.1.1 nos permite expressar o limite de cores em função de $\Delta_{\Phi}(G)$ nos dois casos. Usaremos esse fato na demonstração do seguinte resultado de aproximação.

Teorema 3.3.3. *Dada uma instância $G = (V, E, b)$ para o PCF, uma solução viável (ϕ, σ) pode ser obtida em tempo $O(|V|^3 + |V|B^2 + |V||E|\log B)$, onde ϕ é um fluxo viável com $\Delta(G_{\phi})$ mínimo e G_{ϕ} livre de triângulo, e σ é uma coloração própria das arestas de G_{ϕ} com até $\lfloor (5\chi'_{\Phi}(G) + 2) / 4 \rfloor$ cores, sendo $B = \sum_{s \in V: b(s) > 0} b(s)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.2, podemos obter $\phi \in \Phi(G)$ com $\Delta(G_{\phi})$ mínimo e G_{ϕ} livre de triângulo em tempo $O(|V||E|\log B) + O(|V|^3)$ utilizando o Algoritmo 1 em conjunto com o algoritmo da Proposição 3.1.2. Aplicando o mencionado algoritmo de (HOCHBAUM *et al.*, 1986), obtemos uma coloração de arestas σ , de G_{ϕ} , em tempo $O(|E_{\phi}|(|V| + \Delta(G_{\phi})))$, onde E_{ϕ} é o multiconjunto de arestas de G_{ϕ} . Seja $|\sigma|$ o número de cores em σ . Se $\chi'(G_{\phi}) \leq \lfloor (9\Delta(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$, então $|\sigma| \leq \lfloor (9\Delta(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$. Visto que $\Delta(G_{\phi^*}) = \Delta_{\Phi}(G)$, claramente

$$|\sigma| \leq \lfloor (9\Delta_{\Phi}(G) + 6)/8 \rfloor. \quad (3.3)$$

No caso contrário, quando $\chi'(G_{\phi}) > \lfloor (9\Delta(G_{\phi^*}) + 6)/8 \rfloor$, então σ tem exatamente $\chi'(G_{\phi})$ cores. Pelo Lema 3.1.1, temos que

$$|\sigma| = \chi'(G_{\phi}) \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1} \right\rfloor. \quad (3.4)$$

Em ambos os casos, chegamos a

$$|\sigma| \leq \lfloor (5\Delta_{\Phi}(G) + 2)/4 \rfloor,$$

onde no segundo a desigualdade é obtida substituindo, em (3.4), $\max\{g_o(G), 5\}$ por 5, que é o menor valor possível para $\max\{g_o(G), 5\}$. Concluimos então que, nos dois casos possíveis, o número de cores de σ é no máximo $\lfloor (5\Delta_{\Phi}(G) + 2)/4 \rfloor \leq \lfloor (5\chi'_{\Phi}(G) + 2)/4 \rfloor$.

Quanto ao tempo para calcular σ , note que $|E_{\phi}| = O(|V|B)$ (mostramos isso na Subseção 3.3.1) e que, pela Proposição 3.1.1, $\Delta(G_{\phi}) \leq 2B$, implicando $\Delta(G_{\phi}) = O(B)$. Dessa forma, temos que $|E_{\phi}|(|V| + \Delta(G_{\phi})) = O(|V|B(|V| + B)) = O(|V|B^2 + |V|^2B)$. Somando o tempo de encontrar ϕ com o de obter σ , temos como resultado $O(|V|B^2 + |V|^2B) + O(|V||E| \log B) + O(|V|^3)$. Repare que, se $|V| > B$, $|V|B^2 + |V|^2B + |V|^3 = O(|V|^3)$ e que, caso contrário, $|V|B^2 + |V|^2B + |V|^3 = O(|V|B^2)$. Isso implica que $|V|B^2 + |V|^2B + |V|^3 = O(|V|^3 + |V|B^2)$. Portanto, o algoritmo calcula (ϕ, σ) em tempo $O(|V|^3 + |V|B^2 + |V||E| \log B)$. \square

O algoritmo aproximativo descrito na prova do Teorema 3.3.3, que emprega o algoritmo de Hochbaum *et al.* (1986), já fornece garantia de aproximação melhor do que aquela dada pelo algoritmo de Campêlo *et al.* (2012), cujo fator de aproximação é $3/2$. No entanto, o tempo de computação do algoritmo fornecido por Campêlo *et al.* (2012) é assintoticamente melhor do que aquele do nosso algoritmo.

Existem algumas possibilidades para melhorar a análise do fator de aproximação do nosso método bem como de sua complexidade computacional. Quanto ao primeiro aspecto, uma alternativa seria substituir o algoritmo de Hochbaum *et al.* (1986) por outro m -algoritmo, com $m > 9$. Por exemplo, o de Nishizeki e Kashiwagi (1990), onde $m = 11$, apresenta a mesma complexidade computacional, mas garantia de aproximação $\lfloor (11\chi'(H) + 8)/10 \rfloor$ para coloração de arestas. Todavia, repare que, para grafos de cintura ímpar arbitrária, mesmo com o uso de algoritmos associados a maiores valores de m , a análise da aproximação é dominada pelo caso em que se colore o grafo otimamente (desigualdade (3.4)), levando ao mesmo fator de aproximação do Teorema 3.3.3.

Por outro lado, pode-se realizar a análise da aproximação considerando a cintura ímpar de G . Sendo $g_o(G) \geq m \geq 5$, a desigualdade (3.4) para a coloração obtida σ torna-se

$$|\sigma| \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1} \right\rfloor \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{m - 1} \right\rfloor,$$

pois $\max\{g_o(G), 5\} = g_o(G) \geq m$, enquanto (3.3) agora é dada por

$$|\sigma| \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{m - 1} \right\rfloor,$$

conforme (3.2). Como $\Delta_{\Phi}(G) \leq \chi'_{\Phi}(G)$, concluímos nos dois casos que

$$|\sigma| \leq \left\lfloor \frac{m\chi'_{\Phi}(G) + (m-3)}{m-1} \right\rfloor.$$

Obtemos assim um fator assintótico de $39/38$, quando $g_o(G) \geq 39$.

Para o caso de cintura arbitrária, uma outra alternativa é usar o algoritmo aproximativo apresentado em McDonald (2011) para colorir as arestas de um multigrafo H otimamente ou com até

$$\Delta(H) + 1 + \frac{\Delta(H) - 3}{g_o(H) + 1}.$$

Nesse caso, como $g_o(G_{\phi^*}) \geq \max\{g_o(G), 5\}$, a desigualdade (3.3) será substituída por

$$|\sigma| \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 3}{\max\{g_o(G), 5\} + 11} \right\rfloor \leq \left\lfloor \Delta_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\Delta_{\Phi}(G) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1} \right\rfloor,$$

Então, junto com a desigualdade (3.4) e $\Delta_{\Phi}(G) \leq \chi'_{\Phi}(G)$, concluímos nos dois casos que

$$|\sigma| \leq \left\lfloor \chi'_{\Phi}(G) + 1 + \frac{\chi'_{\Phi}(G) - 2}{\max\{g_o(G), 5\} - 1} \right\rfloor.$$

Com isso, chegamos a um fator de aproximação assintótico de $\frac{\max\{g_o(G), 5\}}{\max\{g_o(G), 5\} - 1}$. Observe que esse valor é tanto melhor quanto maior a cintura ímpar de G , sendo 1 no limite para grafos bipartidos.

Com respeito à complexidade do método apresentado, a seguinte discussão é relevante. Sanders e Steurer argumentam em (SANDERS; STEURER, 2008) que o algoritmo apresentado em (HOCHBAUM *et al.*, 1986) para coloração de arestas em multigrafos gerais tem execução em tempo polinomial no número $|E|$ de arestas, mas, codificando a multiplicidade das arestas de forma binária, $|E|$ pode ser exponencial em relação ao tamanho da entrada, o que torna o tempo do algoritmo pseudopolinomial em função do número de bits necessários para descrever o multigrafo. No mesmo trabalho, Sanders e Steurer sugerem um algoritmo que colore um multigrafo H com até $\chi'(H) + \sqrt{9\chi'(H)/2}$ cores e que tem tempo de execução dado por um polinômio sobre o número de vértices e o logaritmo da multiplicidade máxima das arestas do multigrafo, o que garante um algoritmo polinomial, mesmo quando a multiplicidade das arestas tem codificação binária. No entanto, a aplicação direta desse algoritmo para colorir o multigrafo de mínimo grau máximo não garante o mesmo fator de aproximação do índice cromático de fluxo obtido com a aplicação do algoritmo de (HOCHBAUM *et al.*, 1986). Isso se deve ao fato de que o fator de aproximação em (SANDERS; STEURER, 2008) é calculado em função do índice cromático fracionário, e não temos garantias de que o índice cromático fracionário de um

multigrafo de mínimo grau máximo seja menor ou igual ao índice cromático fracionário de um multigrafo de um fluxo ótimo.

Na literatura, há também outros trabalhos que apresentam outros algoritmos aproximativos para coloração de arestas de um multigrafo cuja complexidade depende do número de vértices e do logaritmo da multiplicidade máxima (STIEBITZ *et al.*, 2012). Esses seriam pontos de partida para conseguir reduzir a complexidade do método aqui apresentado.

4 FORMULAÇÕES

Neste capítulo, apresentamos as formulações matemáticas que desenvolvemos ou adaptamos para o PCF. Para este propósito, considere uma instância $G = (V, E, b)$ do PCF. Definimos um conjunto de cores C tal que $|C| \geq \chi'_\Phi(G)$. Para cada aresta $(i, j) \in E$, criamos dois arcos (i, j) e (j, i) . Tais arcos constituem o conjunto A_G , apresentado no Capítulo 2.5, e são utilizados para representar o fluxo sobre as arestas. Definimos também S como o conjunto de todos os vértices de origem de G . Utilizamos a notação $\delta(v)$ e $N(v)$ para representar, respectivamente, o conjunto de arestas incidentes em $v \in V$ e o conjunto vértices vizinhos de $v \in V$.

4.1 Formulação Aresta-Cor

A primeira formulação apresentada neste capítulo foi inicialmente proposta em nosso trabalho (MATIAS; CAMPÊLO, 2018). Ela será aqui referenciada como *Formulação Aresta-Cor* ou, abreviadamente, \mathcal{F}_{AC} . Listamos abaixo as variáveis utilizadas, acompanhadas de suas respectivas interpretações e, em seguida, uma descrição matemática da \mathcal{F}_{AC} :

- $x_{ec} \in \mathbb{B}$, com valor 1 se a aresta $e \in E$ recebe a cor $c \in C$ e 0 caso contrário;
- $y_{uv} \in \mathbb{Z}_+$, cujo valor representa a quantidade de fluxo que passa no arco $uv \in A_G$;
- $z_c \in \mathbb{B}$, com valor 1 se a cor $c \in C$ é utilizada e 0 caso contrário.

$$\min \quad \sum_{c \in C} z_c \quad (4.1)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_{ec} \leq z_c, \quad \forall v \in V, \quad \forall c \in C, \quad (4.2)$$

$$\sum_{c \in C} x_{ec} \geq y_{uv} + y_{vu}, \quad \forall e = uv \in E, \quad (4.3)$$

$$\sum_{i \in N(v)} (y_{vi} - y_{iv}) = b_v, \quad \forall v \in V, \quad (4.4)$$

$$x \in \mathbb{B}^{|E| \times |C|}, y \in \mathbb{Z}_+^{2|E|}, z \in \mathbb{B}^{|C|}. \quad (4.5)$$

A Restrição (4.2) determina que no máximo uma das arestas incidentes em um vértice v pode ter a cor c , caso ela seja escolhida. A Restrição (4.3) limita inferiormente o número de cores associadas a uma aresta como a soma do fluxo que passa nos arcos a ela associados. A Restrição (4.4) define um fluxo viável, garantindo que toda a oferta de fluxo seja

enviada para o vértice de destino.

Com respeito à corretude de \mathcal{F}_{AC} , destacamos a validade da Restrição (4.3), no sentido de que podemos considerar $y_{uv} + y_{vu}$ o fluxo que passa na aresta $e = uv$. Mostramos abaixo que, para toda solução viável de \mathcal{F}_{AC} , há uma solução viável de igual valor onde y_{uv} ou y_{vu} é zero.

Proposição 4.1.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ viável para \mathcal{F}_{AC} . Então existe $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ viável para \mathcal{F}_{AC} tal que $\hat{y}_{uv} \cdot \hat{y}_{vu} = 0$, para todo $uv \in E$.*

Demonstração. Seja $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ satisfazendo (4.2)-(4.5). Admita que existe $e = uv \in E$ tal que $\bar{y}_{uv} > 0$ e $\bar{y}_{vu} > 0$, do contrário é suficiente tomar $\hat{y} = \bar{y}$. Seja $\delta = \min\{\bar{y}_{uv}, \bar{y}_{vu}\} > 0$. Defina \hat{y} tal que $\hat{y}_{uv} = \bar{y}_{uv} - \delta \in \mathbb{Z}_+$, $\hat{y}_{vu} = \bar{y}_{vu} - \delta \in \mathbb{Z}_+$ e todas as demais componentes são iguais as correspondentes em \bar{y} . Temos que \hat{y}_{uv} ou \hat{y}_{vu} é zero. Além disso, note que $\bar{y}_{vi} - \bar{y}_{iv} = \hat{y}_{vi} - \hat{y}_{iv}$ e $\bar{y}_{vi} + \bar{y}_{iv} \geq \hat{y}_{vi} + \hat{y}_{iv}$, para todo $iv \in E$. Então, assim como $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, também $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (4.2)-(4.5). Repetindo esse processo a partir de $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, chegamos a uma solução com a propriedade desejada. \square

4.1.1 Eliminação de simetrias

A formulação \mathcal{F}_{AC} permite soluções simétricas, ou seja, diferentes soluções viáveis que representam uma mesma solução de uma instância do problema. Na descrição de \mathcal{F}_{AC} , considere que as arestas são rotuladas de 1 a m ($m = |E|$) e as cores são rotuladas de 1 a q ($q = |C|$). Assim, uma solução viável de \mathcal{F}_{AC} , pode ser representada por um conjunto de subconjuntos de arestas $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_q\}$, onde $\mathcal{M}_c = \{e \in \{1, \dots, m\} : x_{ec} = 1\}$ compreende as arestas com a cor c . Se permutarmos os rótulos das cores (ou equivalentemente, os elementos dos conjuntos), obtemos uma outra representação da mesma solução. Uma forma de reduzir tais simetrias é restringir as representações de uma solução para que $\min(\mathcal{M}_1) \leq \min(\mathcal{M}_2) \leq \dots \leq \min(\mathcal{M}_q)$, onde $\min(\mathcal{M}_c)$ é o menor elemento em \mathcal{M}_c ($\min(\mathcal{M}_c) = +\infty$, se $\mathcal{M}_c = \emptyset$), para $c \in \{1, \dots, q\}$. A desigualdade que produz esse efeito é:

$$\sum_{a=1}^e x_{ac-1} \geq x_{ec}, \quad \text{para } e \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{para } c \in \{2, \dots, q\}. \quad (4.6)$$

Proposição 4.1.2. *Seja (x, y, z) solução viável para \mathcal{F}_{AC} e $\mathcal{M}_c = \{e \in \{1, \dots, m\} : x_{ec} = 1\}$, $\forall c \in \{1, \dots, q\}$. Então $\sum_{a=1}^e x_{ac-1} \geq x_{ec}$, $\forall e \in \{1, \dots, m\}$, $\forall c \in \{2, \dots, q\}$ se e somente se $\min(\mathcal{M}_1) \leq \min(\mathcal{M}_2) \leq \dots \leq \min(\mathcal{M}_q)$.*

Demonstração. Seja $c \in \{2, \dots, q\}$. Suponha que a desigualdade $\sum_{a=1}^e x_{ac-1} \geq x_{ec}$ é repetida $\forall e \in \{1, \dots, m\}$. Mostraremos que $\min(\mathcal{M}_{c-1}) \leq \min(\mathcal{M}_c)$, observando dois casos:

- se $\mathcal{M}_{c-1} = \emptyset$, então $\sum_{a=1}^e x_{ac-1} = 0, \forall e \in \{1, \dots, m\}$. Logo $x_{ec} = 0, \forall e \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, $\mathcal{M}_c = \emptyset$.
- Se $\mathcal{M}_{c-1} \neq \emptyset$, então $\sum_{a=1}^e x_{ac-1} = 0, \forall e \in \{1, \dots, \min(\mathcal{M}_{c-1}) - 1\}$. Logo, a desigualdade nos dá que $x_{ec} = 0, \forall e \in \{1, \dots, \min(\mathcal{M}_{c-1}) - 1\}$. Em outras palavras, $\min(\mathcal{M}_c) \geq \min(\mathcal{M}_{c-1})$.

Suponha agora que $\min(\mathcal{M}_1) \leq \min(\mathcal{M}_2) \leq \dots \leq \min(\mathcal{M}_k) < +\infty$ e que $\mathcal{M}_c = \emptyset, \forall c \in \{k+1, \dots, q\}$. Tome $e \in \{1, \dots, m\}$. Note que a desigualdade é trivialmente satisfeita para $c \in \{k+1, \dots, q\}$, pois $x_{ec} = 0$. Então considere $c \in \{2, \dots, k\}$. Novamente vamos analisar dois casos:

- se $\sum_{a=1}^e x_{ac-1} \geq 1$, então a desigualdade é claramente satisfeita, pois $x_{ec} \in \{0, 1\}$.
- se $\sum_{a=1}^e x_{ac-1} = 0$, temos que $\min(\mathcal{M}_{c-1}) > e$. Visto que $\min(\mathcal{M}_c) \geq \min(\mathcal{M}_{c-1})$, então $x_{ec} = 0$, e nesse caso a desigualdade também é satisfeita.

□

4.1.2 Adaptação das desigualdades blossom

A \mathcal{F}_{AC} tem estreitas relações com a formulação de emparelhamentos (ver por exemplo (FERREIRA; WAKABAYASHI, 1996, p. 79)). De fato, se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é uma solução viável na \mathcal{F}_{AC} para uma instância $G = (V, E, b)$, então, para cada $c \in C$, o conjunto de desigualdades relativo a c em (4.2) garante que $\mathcal{M}_c = \{e \in E : \bar{x}_{ec} = 1\}$ é um emparelhamento de G . Este fato implica a possibilidade de aplicação das *inequações blossom* à \mathcal{F}_{AC} . Tal aplicação resulta no conjunto de desigualdades expresso na Proposição 4.1.3.

Proposição 4.1.3. *Se $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é uma solução viável da \mathcal{F}_{AC} para uma instância $G = (V, E, b)$, então*

$$\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec} \leq \frac{|U| - 1}{2} \bar{z}_c, \quad \forall U \subseteq V, |U| \geq 3 \text{ e ímpar}, \quad \forall c \in C, \quad (4.7)$$

onde $E[U]$ é o conjunto de arestas de G com ambas as extremidades em U .

Demonstração. Suponha $G = (V, E, b)$ uma instância do PCF, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ uma solução viável para G na \mathcal{F}_{AC} , $c \in C$ e $U \subseteq V$, $|U| \geq 3$ e ímpar. Temos que $\{e \in E[U] : \bar{x}_{ec} = 1\}$ é um emparelhamento, pois é subconjunto do emparelhamento $\mathcal{M}_c = \{e \in E : \bar{x}_{ec} = 1\}$. Além disso, o número de

vértices nos quais as arestas de um emparelhamento incidem deve ser duas vezes o número de arestas do emparelhamento, pois cada aresta incide em dois vértices e em cada vértice incide apenas uma aresta. Dessa forma, $2(\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec}) \leq |U|$. Visto que $2(\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec})$ é par e $|U|$ é ímpar (note que $\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec}$ é inteiro não negativo), então $2(\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec}) \leq |U| - 1$. Portanto, $\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec} \leq (|U| - 1)/2$. Se $\bar{z}_c = 1$, obtemos então a desigualdade em (4.7) relativa a c e U . Se $\bar{z}_c = 0$, então $\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec} = 0$ por (4.2), e assim a referida desigualdade é trivialmente satisfeita. \square

Caracterizamos a seguir o politopo associado às restrições (4.2) e (4.5) da \mathcal{F}_{AC} usando as desigualdades (4.7), ou melhor, mostramos que (4.7) junto com (4.2) são as únicas desigualdades não triviais necessárias para a descrição do politopo associado àquelas desigualdades de \mathcal{F}_{AC} . Para isso, usamos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.1.1. *Seja $P = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq b'\}$ um poliedro racional com $\text{rec}(P) = \{0\}$. Considere $X = \{x \in \mathbb{Z}^n : A'x \leq b'\}$ e $Z = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{B} : A'x \leq b'y\}$. Se $\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, então $\text{conv}(Z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1] : Ax \leq by\}$.*

Demonstração. Como $\text{rec}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq 0\} = \{0\}$, temos que $Z = \{(x, 1) : x \in X\} \cup \{0, 0\}$. Suponha que $\text{conv}(X) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Defina $\bar{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1] : Ax \leq by\}$.

Seja $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{conv}(Z)$. Então existe subconjunto finito $\{x^i : i \in I\} \subset X$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i \in I} \alpha_i (x^i, 1) + (1 - \sum_{i \in I} \alpha_i)(0, 0)$, com $\sum_{i \in I} \alpha_i \leq 1$ e $\alpha_i \geq 0$, para todo $i \in I$. Logo, $0 \leq \bar{y} = \sum_{i \in I} \alpha_i \leq 1$ e $\bar{x} = \sum_{i \in I} \alpha_i x^i$. Se $\bar{y} = 0$, então $\bar{x} = 0$ e, trivialmente, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$. Se $\bar{y} > 0$, então $\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i}{\bar{y}} x^i$. Logo, $\frac{\bar{x}}{\bar{y}} \in \text{conv}(X)$, ou seja, $A \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \leq b$, mostrando que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$.

Seja agora $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{Z}$. Temos que $0 \leq \bar{y} \leq 1$ e $A\bar{x} \leq b\bar{y}$. Se $\bar{y} = 0$, então $A\bar{x} \leq 0$, isto é, $\bar{x} \in \text{rec}(\text{conv}(X))$. Como $\text{rec}(\text{conv}(X)) = \text{rec}(P) = \{0\}$ (SCHRIJVER, 1986), segue que $\bar{x} = 0$ e, portanto, $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \subset \text{conv}(Z)$. Se $\bar{y} > 0$, temos que $A \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \leq b$, ou seja, $\frac{\bar{x}}{\bar{y}} \in \text{conv}(X)$. Então existe subconjunto finito $\{x^i : i \in I\} \subset X$ tal que $\bar{x} = \sum_{i \in I} \alpha_i x^i$, com $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ e $\alpha_i \geq 0$, para todo $i \in I$. Para cada $i \in I$, defina $\beta_i = \alpha_i \bar{y} \geq 0$ e note que $\sum_{i \in I} \beta_i = \bar{y} \leq 1$. Mais ainda $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i \in I} \beta_i (x^i, 1) + (1 - \sum_{i \in I} \beta_i)(0, 0)$. Logo $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{conv}(Z)$. \square

Proposição 4.1.4. *Seja $Z = \{(x, z) \in \mathbb{B}^{|E||C|} \times \mathbb{B}^{|C|} : (x, z) \text{ satisfaz (4.2)}\}$. Então $\text{conv}(Z) = \{(x, z) \in [0, 1]^{|E||C|} \times [0, 1]^{|C|} : (x, z) \text{ satisfaz (4.2), (4.7)}\}$*

Demonstração. Seja $c \in C$. Defina $Z_c = \{(x_{*c}, z_c) \in \mathbb{B}^{|E|} \times \mathbb{B} : \sum_{e \in \delta(v)} x_{ec} \leq z_c, \forall v \in V\}$ e $X_c = \{x_{*c} \in \mathbb{B}^{|E|} : (x_{*c}, 1) \in Z_c\}$. Note que $\text{conv}(X_c)$ é o politopo de emparelhamentos de G

(FERREIRA; WAKABAYASHI, 1996). Segue então do Teorema 2.2.3 que

$$\text{conv}(X_c) = \{x_{*c} \in \mathbb{R}_+^{|E|} : \sum_{e \in \delta(v)} x_{ec} \leq 1, \forall v \in V, \sum_{e \in E[U]} x_{ec} \leq \frac{|U|-1}{2}, \forall U \subseteq V, |U| \geq 3 \text{ e ímpar}\}.$$

Pelo Lema 4.1.1,

$$\text{conv}(Z_c) = \{(x_{*c}, z_c) \in \mathbb{R}_+^{|E|} \times [0, 1] : \sum_{e \in \delta(v)} x_{ec} \leq z_c, \forall v \in V, \sum_{e \in E[U]} x_{ec} \leq \frac{|U|-1}{2} z_c, \forall U \subseteq V, |U| \geq 3 \text{ e ímpar}\}.$$

Note que $Z = \prod_{c \in C} Z_c$ e, portanto, $\text{conv}(Z) = \prod_{c \in C} \text{conv}(Z_c)$. Logo, o resultado segue. \square

4.2 Formulação de Emparelhamentos Ponderados

Como em uma coloração própria de arestas duas arestas adjacentes devem ter cores distintas, então uma classe de cor dessa coloração é um emparelhamento no grafo. Assim, no PCF, o fluxo deve ser coberto por emparelhamentos ponderados, ou melhor, precisamos atribuir pesos aos emparelhamentos de modo que a soma dos pesos dos emparelhamentos contendo uma aresta seja pelo menos o fluxo que passa por ela. Essa visão do problema nos leva a uma segunda formulação, a ser chamada aqui *Formulação de Emparelhamentos Ponderados* ou, abreviadamente, \mathcal{F}_{EP} .

Seja M o conjunto de todos os possíveis emparelhamentos de G . Faça $\ell_e^m = 1$ se o emparelhamento $m \in M$ contém a aresta $e \in E$, 0 do contrário. Utilizamos as seguintes variáveis:

- $w_m \in \mathbb{Z}_+$, representando o peso do emparelhamento $m \in M$;
- $y_{uv} \in \mathbb{Z}_+$, cujo valor representa a quantidade de fluxo que passa no arco $uv \in A_G$.

Segue, portanto, uma definição matemática para a \mathcal{F}_{EP} .

$$\min \quad \sum_{m \in M} w_m \quad (4.8)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{m \in M} \ell_e^m w_m \geq y_{uv} + y_{vu}, \quad \forall e = uv \in E, \quad (4.9)$$

$$\sum_{i \in N(v)} (y_{vi} - y_{iv}) = b(v), \quad \forall v \in V, \quad (4.10)$$

$$w \in \mathbb{Z}_+^{|M|}, y \in \mathbb{Z}_+^{2|E|}. \quad (4.11)$$

Destacamos que \mathcal{F}_{EP} é derivada da formulação proposta em (GOMES, 2009) para o PPR, com a adição das restrições de integridade (4.11) para as variáveis. A variável w_m determina o peso atribuído ao emparelhamento $m \in M$. A Restrição (4.9) determina que a soma

dos pesos dos emparelhamentos que contém uma aresta $e \in E$ é pelo menos a soma do fluxo que passa em seus arcos. A Restrição (4.10) estabelece o fluxo (similarmente à formulação anterior).

4.2.1 Subproblema para \mathcal{F}_{EP}

O número elevado de variáveis, o que é uma consequência da cardinalidade do conjunto M , torna a \mathcal{F}_{EP} de difícil resolução se suas colunas forem tratadas de forma explícita, ou seja, se iniciarmos a sua resolução com todas as colunas da formulação. Uma maneira de contornar esse problema é utilizar inicialmente um subconjunto das colunas e, conforme necessário, adicionar as demais colunas até que o problema seja resolvido. Esse processo é conhecido na literatura como geração de colunas (WOLSEY, 1998, p. 185). As colunas a serem adicionadas ao problema restrito podem ser elencadas através da resolução do subproblema de \mathcal{F}_{EP} , que será descrito mais a frente. Note que tratamos de forma implícita apenas as colunas referentes às variáveis w . As variáveis y são todas elas consideradas no problema restrito.

Seja μ_e a variável dual associada à restrição referente a $e \in E$ em (4.9) na relaxação linear do problema restrito. Observe que $\mu \geq 0$ e que a coluna referente à variável w_m em \mathcal{F}_{EP} é o vetor de incidência do emparelhamento $m \in M$. Dessa forma, o subproblema de geração de colunas (*pricing problem*) para \mathcal{F}_{EP} é:

$$\max_{m \in M} \sum_{e \in E} \mu_e \ell_e^m. \quad (4.12)$$

O Problema (4.12) é conhecido na literatura como o *problema do emparelhamento de peso máximo* (PEPM) e sabemos que pode ser resolvido em tempo polinomial (EDMONDS, 1965). Dado um emparelhamento m' , ótimo para o PEPM, adicionamos a coluna referente à variável $w_{m'}$ ao problema restrito, se $\sum_{e \in E} \mu_e \ell_e^{m'} > 1$.

4.2.2 Comparação teórica entre \mathcal{F}_{AC} e \mathcal{F}_{EP}

Nesta subseção, provaremos que a relaxação linear de \mathcal{F}_{EP} é estritamente mais forte que a relaxação linear de \mathcal{F}_{AC} . Para tal, definimos $RL(\mathcal{F}, I)$ como o valor ótimo da relaxação linear de uma formulação \mathcal{F} para uma instância I do PCF.

Proposição 4.2.1. $RL(\mathcal{F}_{EP}, I) \geq RL(\mathcal{F}_{AC}, I)$ para toda instância I do PCF.

Demonstração. Suponha (w', y') uma solução viável ótima da relaxação linear de \mathcal{F}_{EP} para uma instância I , e C um conjunto de cores tal que $\chi'_\Phi(I) \leq |C|$. Construiremos, a partir de (w', y') ,

uma solução viável para I na relaxação linear de \mathcal{F}_{AC} , com valor igual a $RL(\mathcal{F}_{EP}, I)$, provando assim que $RL(\mathcal{F}_{AC}, I) \leq RL(\mathcal{F}_{EP}, I)$. Para tal, defina:

- $\hat{z}_c = \frac{1}{|C|} \sum_{m \in M} w'_m, \forall c \in C$;
- $\hat{x}_{ec} = \frac{1}{|C|} \sum_{m \in M} \ell_e^m w'_m, \forall e \in E, \forall c \in C$;
- $\hat{y} = y'$.

Mostraremos primeiramente que $(\hat{z}, \hat{x}, \hat{y})$ é viável para a relaxação linear de \mathcal{F}_{AC} . Como $\sum_{m \in M} w'_m \leq \chi'_\Phi(I) \leq |C|$, o limite superior (unitário) das variáveis x e z é respeitado. Considere agora a Restrição (4.2) de \mathcal{F}_{AC} relativa a $v \in V, c \in C$:

$$\sum_{e \in \delta(v)} \hat{x}_{ec} = \sum_{e \in \delta(v)} \left(\frac{1}{|C|} \sum_{m \in M} \ell_e^m w'_m \right) = \frac{1}{|C|} \sum_{m \in M} w'_m \left(\sum_{e \in \delta(v)} \ell_e^m \right).$$

Visto que as arestas de $\delta(v)$ são vizinhas, temos que $\sum_{e \in \delta(v)} \ell_e^m \leq 1$ para todo $m \in M$. Logo,

$$\sum_{e \in \delta(v)} \hat{x}_{ec} \leq \frac{1}{|C|} \sum_{m \in M} w'_m = \hat{z}_c.$$

Suponha agora $e = ij \in E$. Temos para a Restrição (4.3):

$$\sum_{c \in C} \hat{x}_{ec} = \sum_{c \in C} \left(\frac{1}{|C|} \sum_{m \in M} \ell_e^m w'_m \right) = \frac{|C|}{|C|} \sum_{m \in M} \ell_e^m w'_m = \sum_{m \in M} \ell_e^m w'_m \geq y'_{ij} + y'_{ji} = \hat{y}_{ij} + \hat{y}_{ji},$$

onde a desigualdade segue de (4.9).

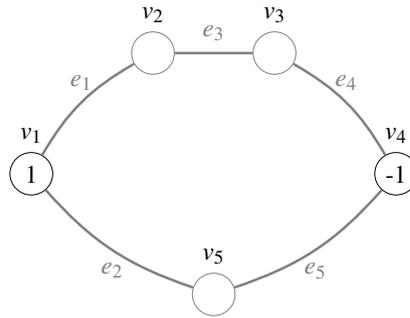
Note ainda que a Restrição (4.4) é trivialmente satisfeita devido a $\hat{y} = y'$. Logo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ é viável para a relaxação linear de \mathcal{F}_{AC} . Por fim, temos que as duas soluções têm mesmo valor:

$$\sum_{c \in C} \hat{z}_c = \sum_{c \in C} \left(\frac{1}{|C|} \sum_{m \in M} w'_m \right) = \frac{|C|}{|C|} \sum_{m \in M} w'_m = \sum_{m \in M} w'_m.$$

□

Para mostrarmos que a desigualdade na Proposição 4.2.1 pode ser estrita, exibimos um exemplo. Seja $G^* = (V, E, b)$, onde $V = \{v_1, \dots, v_5\}$, $E = \{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_5), e_3 = (v_2, v_3), e_4 = (v_3, v_4), e_5 = (v_4, v_5)\}$, $b(v_1) = 1, b(v_4) = -1$ e $b(v_i) = 0, \forall i \in \{2, 3, 5\}$. Na Figura 7, temos uma representação gráfica de G^* .

Proposição 4.2.2. $RL(\mathcal{F}_{EP}, G^*) > RL(\mathcal{F}_{AC}, G^*)$.

Figura 7 – Instância G^* para o PCF.

Fonte: produzida pelo autor.

Demonstração. Suponha μ e γ as variáveis duais respectivamente associadas às Restrições (4.9) e (4.10) da \mathcal{F}_{EP} e note que a seguinte formulação é seu dual:

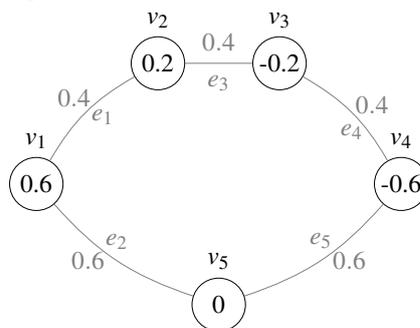
$$\max \quad \sum_{e \in E} b(v) \gamma_v \quad (4.13)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{e \in E} \ell_e^m \mu_e \leq 1, \quad \forall m \in M, \quad (4.14)$$

$$\gamma_u \leq \gamma_v + \mu_e, \quad \gamma_v \leq \gamma_u + \mu_e, \quad \forall e = uv \in E, \quad (4.15)$$

$$\mu \geq 0, \gamma \text{ livre.} \quad (4.16)$$

Considere então a seguinte solução viável do modelo dual da \mathcal{F}_{EP} : $\mu_{e_1} = 0.4, \mu_{e_2} = 0.6, \mu_{e_3} = 0.4, \mu_{e_4} = 0.4, \mu_{e_5} = 0.6$ e $\gamma_{v_1} = 0.6, \gamma_{v_2} = 0.2, \gamma_{v_3} = -0.2, \gamma_{v_4} = -0.6, \gamma_{v_5} = 0$. A Figura 8 mostra essa solução no grafo G^* . Para verificar sua viabilidade, note que um emparelhamento em G^* é composto por no máximo duas arestas, e apenas as variáveis μ relativas às arestas (adjacentes) e_2 e e_5 somam mais que 1. Logo, (4.14) é satisfeita. Adicionalmente, (4.15) equivale a $\mu_e \geq |\gamma_u - \gamma_v|, \forall e = uv \in E$. Na Figura 8, é fácil constatar que essas desigualdades são satisfeitas. Note também que essa solução dual viável tem valor 1.2, mostrando que $RL(\mathcal{F}_{EP}, G^*) \geq 1.2$.

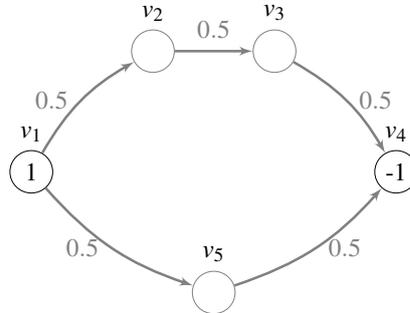
Figura 8 – Solução dual viável para \mathcal{F}_{EP} .

Fonte: produzida pelo autor.

Por outro lado, podemos construir uma solução de valor menor que 1.2 para a \mathcal{F}_{AC} ,

com a coloração $x_{e_{ic_1}} = 0.5, \forall i \in \{1, \dots, 5\}$, $z_{c_1} = 1$, e o fluxo viável representado graficamente na Figura 9.

Figura 9 – Fluxo viável para G^* .



Fonte: produzida pelo autor.

Claramente, trata-se de um fluxo viável com seus arcos cobertos pela coloração, e a soma das variáveis x relativas às arestas incidentes em cada vértice tem valor 1, para todo vértice. Portanto, trata-se de uma solução viável, e o valor dessa solução, que é 1, nos garante que:

$$RL(\mathcal{F}_{AC}, G^*) \leq 1 < 1.2 \leq RL(\mathcal{F}_{EP}, G^*).$$

□

A partir das Proposições 4.2.1 e 4.2.2, temos então o Corolário 4.2.1.

Corolário 4.2.1. *A relaxação linear da \mathcal{F}_{EP} é estritamente mais forte que a relaxação linear da \mathcal{F}_{AC} .*

4.3 Formulação de Emparelhamentos e Caminhos Ponderados

Sejam M o conjunto de todos os possíveis emparelhamentos de G e P_S o conjunto de todos os caminhos em G com extremidades $s - t$, onde $s \in S$ e t é o vértice de destino de G . Considere as variáveis listadas abaixo e suas devidas interpretações:

- $w_m \in \mathbb{Z}_+$, representa o peso do emparelhamento $m \in M$;
- $r_p \in \mathbb{Z}_+$, representa a quantidade de fluxo que passa no caminho $p \in P_S$.

Além das variáveis, considere também os seguintes parâmetros:

- $\ell_e^m = 1$ se o emparelhamento $m \in M$ contém a aresta $e \in E$, 0 do contrário;
- $j_e^p = 1$ se o caminho $p \in P_S$ contém a aresta $e \in E$, 0 do contrário;
- $k_{st}^p = 1$ se o caminho $p \in P_S$ tem extremidades s e t , 0 do contrário.

Uma outra forma de representar um fluxo inteiro viável consiste em escolher um conjunto de st -caminhos ($s \in S$) e atribuir-lhes pesos inteiros não negativos. O peso de um caminho $p \in P_S$, a ser expresso pela variável $r_p \in \mathbb{Z}_+$, representa a quantidade de fluxo que passa por p . Dessa forma, a soma dos pesos dos caminhos que saem de um vértice de origem $s \in S$ deve ser pelo menos $b(s)$. Essa ideia é base para a próxima formulação: a *Formulação de Emparelhamentos e Caminhos Ponderados* (\mathcal{F}_{ECP}), cuja descrição matemática temos a seguir.

$$\min \quad \sum_{m \in M} w_m \quad (4.17)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{m \in M} \ell_e^m w_m \geq \sum_{p \in P_S} j_e^p r_p, \quad \forall e \in E, \quad (4.18)$$

$$\sum_{p \in P_S} k_{st}^p r_p \geq b(s), \quad \forall s \in S, \quad (4.19)$$

$$w \in \mathbb{Z}_+^{|M|}, r \in \mathbb{Z}_+^{|P_S|}. \quad (4.20)$$

A Restrição (4.18) estabelece que a soma dos pesos dos emparelhamentos que contêm uma aresta $e \in E$ deve ser pelo menos a soma dos pesos dos caminhos aos quais ela pertence. A Restrição (4.19) determina que a soma dos pesos dos caminhos que têm como extremidade um vértice de origem $s \in S$ é pelo menos a oferta de s , garantindo que todo fluxo é enviado à t .

4.3.1 Subproblemas para \mathcal{F}_{ECP}

Assim como a \mathcal{F}_{EP} , a \mathcal{F}_{ECP} demanda um processo de geração de colunas para a resolução de sua relaxação linear. No entanto, agora haverá dois subproblemas: um para gerar as colunas relativas à variável w e outro para as colunas associadas à variável r . O primeiro deles é exatamente um problema de emparelhamento de peso máximo, PEPM, já abordado na Seção 4.2. Trataremos então a partir de agora do subproblema referente às colunas da variável r .

Sejam $\mu_e \geq 0$ e $\lambda_s \geq 0$ as variáveis duais associadas, respectivamente, à restrição em (4.18) relativa a $e \in E$ e à restrição em (4.19) referente a $s \in S$. O segundo subproblema pode ser descrito da seguinte forma:

$$\min_{p \in P_S} \sum_{e \in E} \mu_e j_e^p - \sum_{s \in S} \lambda_s k_{st}^p. \quad (4.21)$$

O Problema (4.21) pode ser resolvido a partir da determinação de um caminho mínimo p_s de t para cada vértice $s \in S$, no grafo G ponderado em arestas por $\mu_e \geq 0, \forall e \in E$, o que pode ser feito em tempo polinomial com o *Algoritmo de Dijkstra* (DIJKSTRA, 1959).

Então, uma solução de (4.21) é dada por p_{s^*} com s^* em $\operatorname{argmin}\{\mu(p_s) - \lambda_s : s \in S\}$, onde $\mu(p_s) = \sum_{e \in E} \mu_e j_e^{p_s}$ é o custo do caminho mínimo p_s . Caso $\mu(p_{s^*}) - \lambda_{s^*} < 0$, a coluna relativa a $r_{p_{s^*}}$ deve ser acrescentada ao problema restrito corrente. Na verdade, podem ser acrescentadas as colunas referentes a todo $s \in S$ tal que $\mu(p_s) - \lambda_s < 0$.

4.3.2 Comparação teórica entre \mathcal{F}_{EP} e \mathcal{F}_{ECP}

Nesta subseção, provaremos que a relaxação linear da \mathcal{F}_{ECP} tem mesmo valor ótimo que a relação linear da \mathcal{F}_{EP} . A prova será construída a partir de um resultado, expresso no Teorema 4.3.1, sobre decomposição de fluxo (BANG-JENSEN; BESSY, 2014; AHUJA *et al.*, 1988).

Seja $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função sobre os arcos de um digrafo $D = (V, A)$. Dizemos que ϕ é um *fluxo de caminho* sobre um caminho direcionado P em D (resp. *fluxo de ciclo* sobre um ciclo direcionado C em D), se existe $k > 0$ tal que $\phi(u, v) = k$, para todo arco $(u, v) \in A$ em P (resp. C), e $\phi(u, v) = 0$, para todo arco $(u, v) \in A$ que não está em P (resp. C). Por conveniência, denotaremos o valor k desse fluxo ϕ por $|\phi|$.

Teorema 4.3.1. *Todo fluxo viável ϕ em uma rede $D = (V, A, b)$, com função de demanda $b : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$, é a soma de até $|V| + |A|$ fluxos de caminho e de ciclo. Além disso, dados os conjuntos de fluxos de caminho \mathcal{P} e de ciclo \mathcal{C} cuja soma representa um fluxo viável ϕ de D , todo caminho direcionado P de um fluxo de caminho de \mathcal{P} começa em um vértice com demanda > 0 e termina em um vértice com demanda < 0 .*

Podemos destacar no Teorema 4.3.1 que, dada uma decomposição de um fluxo ϕ em fluxos de caminho e de ciclo, a transmissão da demanda dos vértices de origem aos vértices de destino está representada pelos fluxos de caminho da decomposição. Por outro lado, um fluxo de ciclo dessa decomposição representa uma possível circulação de fluxo em ϕ , o que é, a grosso modo, o envio de fluxo de um vértice para ele mesmo através de um ciclo. Portanto, numa decomposição de um fluxo viável do PCF, apenas os fluxos de caminho dessa decomposição são necessários na solução do problema, podendo ser descartados os fluxos de ciclo. Este fato é base para a Proposição 4.3.2, que apresentamos após o seguinte lema:

Lema 4.3.1. *Existe, para toda instância G do PCF, uma solução ótima (w', r') na relaxação linear da \mathcal{F}_{ECP} tal que $\sum_{p \in \mathcal{P}_s} k_{st}^p r'_p = b(s), \forall s \in S$.*

Demonstração. Suponha (w', r') uma solução ótima para uma instância G na formulação \mathcal{F}_{ECP} tal que $\sum_{p \in P_S} k_{st}^p r'_p > b(s)$, para algum $s \in S$. Suponha s' tal vértice de origem. A partir de r' , é possível gerar um vetor $r^* \geq 0$, decrementando as componentes de r' indexadas por $s't$ -caminhos, até satisfazer $\sum_{p \in P_S} k_{s't}^p r_p^* = b(s')$. Com isso, a Restrição (4.19) se mantém satisfeita para (w', r^*) , pois $\sum_{p \in P_S} k_{st}^p r'_p = \sum_{p \in P_S} k_{st}^p r_p^*, \forall s \in S \setminus \{s'\}$. Já a Restrição (4.18) é claramente satisfeita, visto que $\sum_{p \in P_S} j_e^p r'_p \geq \sum_{p \in P_S} j_e^p r_p^*, \forall e \in E$. Logo, (w', r^*) é viável para a relaxação linear da \mathcal{F}_{ECP} e, consequentemente, ótima para essa relaxação. Podemos repetir esse processo até encontrar uma solução que satisfaça a Restrição (4.19) na igualdade. \square

Proposição 4.3.2. *Se $G = (V, E, b)$ é conexo, então $RL(\mathcal{F}_{EP}, G) = RL(\mathcal{F}_{ECP}, G)$.*

Demonstração. Suponha G uma instância para o PCF e (\hat{w}, \hat{y}) uma solução ótima para a relação linear da \mathcal{F}_{EP} em G . Lembre que \hat{y} descreve um fluxo viável na rede (V, A_G, b) . Pelo Teorema 4.3.1, sabemos que existe uma decomposição para o fluxo representado por \hat{y} em fluxos de caminho e de ciclo. Suponha \mathcal{P} o conjunto dos fluxos de caminho de uma decomposição do fluxo em \hat{y} . Denote por p_ϕ o caminho em G sobre o qual escoo o fluxo de caminho $\phi \in \mathcal{P}$. Pelo Teorema 4.3.1, $p_\phi \in P_S$. Considere a seguinte solução para G na \mathcal{F}_{ECP} :

- $w' = \hat{w}$
- $\forall p \in P_S, r'_p = \begin{cases} |\phi|, & \text{se } p = p_\phi \text{ para algum } \phi \in \mathcal{P} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Então, visto que a transmissão do fluxo de um vértice de origem $s \in S$ ao vértice de destino t na decomposição se dá pelos fluxos de caminho, temos que

$$\sum_{p \in P_S} k_{st}^p r'_p = \sum_{\phi \in \mathcal{P}} k_{st}^{p_\phi} |\phi| = \sum_{i \in N(s)} (\hat{y}_{si} - \hat{y}_{is}) = b(s),$$

onde a última igualdade decorre de (4.10). Além disso, como o total de fluxo em um arco é no mínimo a soma dos fluxos de caminhos nos caminhos que contêm esse arco, segue que:

$$\sum_{p \in P_S} j_e^p r'_p = \sum_{\phi \in \mathcal{P}} j_e^{p_\phi} |\phi| \leq \hat{y}_{uv} + \hat{y}_{vu} \leq \sum_{m \in M} \ell_e^m w_m, \quad \forall e = uv \in E,$$

onde a última desigualdade deve-se a (4.9). As duas expressões destacadas acima mostram que (w', r') satisfaz a Restrição (4.18) e a Restrição (4.19). Logo, $(w', r') \geq 0$ é viável para a relaxação linear da \mathcal{F}_{ECP} . Por fim, observe que as duas soluções têm o mesmo valor ($\sum_{m \in M} \hat{w} = \sum_{m \in M} w'$). Consequentemente,

$$RL(\mathcal{F}_{ECP}, G) \leq RL(\mathcal{F}_{EP}, G).$$

Para mostrar a desigualdade inversa, usamos o Lema 4.3.1. Ele estabelece que existe uma solução, ótima para a relaxação linear da \mathcal{F}_{ECP} para G , satisfazendo a Restrição (4.19) na igualdade. Suponha então (w', r') tal solução. Considere os seguintes valores para as variáveis da \mathcal{F}_{EP} e note que eles claramente satisfazem as restrições de não negatividade da relaxação:

- $\hat{w} = w'$;
- $\hat{y}_{uv} = \sum_{p \in P_S} a_{uv}^p r'_p, \forall (u, v) \in A_G$,

onde $a_{uv}^p = 1$ se, ao direcionar o caminho $p \in P_S$ em direção a t , ele contém o arco uv ; 0, caso contrário. Observe que $j_e^p = a_{uv}^p + a_{vu}^p$, para todos $e = uv \in E$ e $p \in P_S$.

Suponha $e = uv \in E$ e considere a Restrição (4.9) da \mathcal{F}_{EP} . Temos que:

$$\sum_{m \in M} \ell_e^m \hat{w}_m = \sum_{m \in M} \ell_e^m w'_m \geq \sum_{p \in P_S} j_e^p r'_p = \sum_{p \in P_S} (a_{uv}^p + a_{vu}^p) r'_p = \hat{y}_{uv} + \hat{y}_{vu},$$

onde a desigualdade deve-se à (4.18).

Suponha agora $v \in V$ e considere a Restrição (4.10). Temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N(v)} (\hat{y}_{vk} - \hat{y}_{kv}) &= \sum_{k \in N(v)} \left(\sum_{p \in P_S} a_{vk}^p r'_p - \sum_{p \in P_S} a_{kv}^p r'_p \right) = \\ &= \sum_{k \in N(v)} \sum_{p \in P_S} (a_{vk}^p - a_{kv}^p) r'_p = \sum_{p \in P_S} r'_p \sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^p - a_{kv}^p). \end{aligned}$$

Note que $\sum_{k \in N(v)} a_{vk}^p$ (resp. $\sum_{k \in N(v)} a_{kv}^p$) é o número de arcos que saem em v (resp. entram em v) ao direcionarmos o caminho $p \in P_S$ em direção a t . Então, $\sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^p - a_{kv}^p)$ é igual a 0, se v não é extremidade de p ; 1, se v é o vértice de origem que é extremidade em p ; -1 , se $v = t$.

Analisaremos agora três casos:

- $v \in S$: pela observação acima, concluímos que $\sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^p - a_{kv}^p) = k_{vt}^p$. Então,

$$\sum_{k \in N(v)} (\hat{y}_{vk} - \hat{y}_{kv}) = \sum_{p \in P_S} r'_p \sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^{pt} - a_{kv}^{pt}) = \sum_{p \in P_S} k_{vt}^p r'_p = b(v),$$

onde a última igualdade decorre do Lema 4.3.1.

- $v \notin S \cup \{t\}$: como v não é extremidade de p , temos $\sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^p - a_{kv}^p) = 0$, de onde segue

$$\sum_{k \in N(v)} (\hat{y}_{vk} - \hat{y}_{kv}) = \sum_{p \in P_S} r'_p \sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^{pt} - a_{kv}^{pt}) = 0 = b(v).$$

- $v = t$: nesse caso, $\sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^p - a_{kv}^p) = -1$ e, posto que $\sum_{s \in S} k_{st}^p = 1 \forall p \in P_S$, chegamos a

$$\sum_{k \in N(v)} (\hat{y}_{vk} - \hat{y}_{kv}) = \sum_{p \in P_S} r'_p \sum_{k \in N(v)} (a_{vk}^{pt} - a_{kv}^{pt}) = - \sum_{p \in P_S} r'_p = - \sum_{s \in S} \sum_{p \in P_S} k_{st}^p r'_p = - \sum_{s \in S} b(s) = b(t).$$

Em qualquer caso, obtemos que (\hat{w}, \hat{y}) é viável para a \mathcal{F}_{EP} . Por fim, note que claramente as duas soluções têm o mesmo valor e, por consequência,

$$RL(\mathcal{F}_{ECP}, G) \geq RL(\mathcal{F}_{EP}, G).$$

□

5 HEURÍSTICA

A heurística apresentada neste capítulo, que utiliza uma das duas formulações exponenciais apresentadas no Capítulo 4 (\mathcal{F}_{EP} ou \mathcal{F}_{ECP}), é composta por duas etapas de resolução. Na primeira, aplicamos o método de geração de colunas para resolver a relaxação linear de uma das duas formulações exponenciais do FCP. Ao final da primeira etapa, temos então um subconjunto das colunas do problema original. A segunda etapa consiste em encontrar uma solução ótima inteira para o problema parcial determinado pelo subconjunto das colunas geradas na primeira etapa. Essa solução pode ser obtida utilizando o método de *branch-and-cut* sobre o problema parcial adicionado de restrições de integralidade. Note que uma solução do problema parcial é uma solução viável para o PCF e o valor dessa solução é um limite superior para o ótimo do problema.

A heurística varia de maneira significativa em seu primeiro passo, a depender da formulação utilizada. Já o segundo passo se mantém o mesmo, independente da formulação. Trataremos agora de como a heurística funciona com cada uma das duas formulações.

5.1 Heurística com a \mathcal{F}_{EP}

Para aplicar o método de geração de colunas à \mathcal{F}_{EP} , precisamos primeiramente de um subconjunto das colunas que torne viável sua relaxação linear. Aqui todas as variáveis y estão presentes no problema parcial inicial, restando então definir quais variáveis w devem também estar. Para isso, considere $|E|$ colunas, cada coluna referente a um emparelhamento contendo apenas uma aresta (cada aresta define um emparelhamento), onde E é o conjunto de arestas da instância a ser resolvida. O modelo definido por essas colunas (junto com aquelas das variáveis y) admite solução viável, pois qualquer que seja o fluxo em um arco, temos um emparelhamento que possa cobri-lo. Resolvemos, aplicando o método simplex, o problema com esse subconjunto de colunas e verificamos se há alguma coluna que, adicionada ao problema parcial, melhora o valor da solução atual. Essa verificação pode ser feita resolvendo o subproblema da \mathcal{F}_{EP} , descrito na Subseção 4.2.1. Resolvido o subproblema, se o valor ótimo obtido for menor ou igual a 1, então não há nenhuma coluna que, ao ser adicionada ao problema parcial, possa reduzir o valor ótimo do mesmo, portanto, temos uma solução ótima da relaxação linear; caso contrário, a solução ótima do subproblema define a nova coluna a ser adicionada. Acrescentada uma nova coluna, o processo se repete, até que não haja nenhuma coluna a ser adicionada. Finalizada

a primeira etapa e adicionadas as restrições de integralidade ao problema parcial, o problema de programação inteira gerado pode ser resolvido com o método de *branch-and-cut*. Observe que sua solução ótima não é necessariamente uma solução ótima para o PCF, posto que outras colunas poderiam ser necessárias para chegar à otimalidade.

Seja f o valor da solução ótima da relaxação linear e $i \geq f$ o valor da solução ótima do problema parcial inteiro. Como a função objetivo da \mathcal{F}_{EP} tem apenas coeficientes inteiros, qualquer solução da formulação tem valor inteiro. Dessa forma, se $i - f < 1$, então i é o valor ótimo do problema inteiro completo, visto que $i \in \mathbb{Z}_+$ e que, nesse caso, não há nenhum inteiro no intervalo $[f, i)$.

5.2 Heurística com a \mathcal{F}_{ECP}

Considere agora a utilização da \mathcal{F}_{ECP} na primeira etapa da heurística. Aqui também precisamos de um subconjunto das colunas que gere um modelo parcial inicial admitindo uma solução viável para a relaxação linear. Para as variáveis w , basta repetir a estratégia adotada quando utilizamos a \mathcal{F}_{EP} . Com relação às variáveis r , note que podemos enviar toda a demanda de um vértice de origem s ($b(s)$, no caso) através de um único *st*-caminho. Com um caminho para cada par origem-destino, podemos então enviar toda a demanda necessária. Resta-nos obter tais caminhos. Para isso, podemos resolver o próprio subproblema gerador das colunas associadas a r (ver Subseção 4.3.1), dando os seguintes pesos às arestas e aos vértices de origem: $\mu_e = 1, \forall e \in E$, e $\lambda_s = 0, \forall s \in S$, onde S é o conjunto de vértices de origem.

Com a \mathcal{F}_{ECP} , o procedimento de geração de colunas se diferencia em dois pontos: a escolha das colunas associadas às variáveis r que devem ser adicionadas em cada iteração; e a condição de parada do método. Escolhemos tais colunas resolvendo o subproblema para a geração das colunas das variáveis r , descrito na Subseção 4.3.1. Naquela subseção, são apresentados dois critérios de escolha: adicionar sempre a coluna de menor valor negativo ou adicionar todas que tenham valor negativo. A fim de reduzir o número de iterações da primeira etapa, e assim possivelmente reduzir o tempo de resolução, utilizamos o segundo critério para realizar os experimentos descritos mais adiante. Quanto à escolha das colunas relacionadas às variáveis w , o método segue a mesma estratégia de quando utilizada a \mathcal{F}_{EP} . O procedimento de geração de colunas para quando nenhum dos dois subproblemas fornece novas colunas a serem acrescentadas ao problema parcial.

Assim como acontece quando utilizamos a \mathcal{F}_{EP} , a solução viável do PCF é encon-

trada resolvendo, com o método *branch-and-cut*, o problema parcial adicionado de restrições de integralidade em todas as variáveis. Além disso, também sabemos que a solução encontrada é ótima quando a diferença entre os valores ótimos da primeira e da segunda etapa é estritamente menor do que um.

5.3 Experimentos

Avaliamos o desempenho da heurística proposta observando a qualidade das soluções viáveis que ela encontra e o tempo gasto para obter essas soluções. Para essa avaliação, implementamos a heurística utilizando a linguagem de programação C++ em conjunto com o *solver CPLEX*, na versão 12.6.0, usado para resolver os problemas lineares relaxados e inteiros. Utilizamos um computador com sistema operacional *Ubuntu 14.04 LTS 64 bits*, processador *Intel Core i7-3770* com 8 núcleos de *3.40 GHz* e memória *RAM* de *16 GB*. Realizamos experimentos nos seguintes casos: quando a heurística é executada com a \mathcal{F}_{EP} e quando é executada com a \mathcal{F}_{ECP} .

Motivados pelos resultados de complexidade computacional do PCF (CAMPÊLO *et al.*, 2015) e dada a indisponibilidade de instâncias de teste para o PPR, geramos três conjuntos de instâncias para os experimentos: grafos 3-conexos, bipartidos e grafos nem bipartidos nem 3-conexos. Para gerar grafos 3-conexos, iniciamos de um grafo completo e iterativamente sorteamos uma aresta para ser removida, o que de fato ocorrerá se sua remoção não baixar a conectividade do grafo para 2. O algoritmo para quando a densidade de arestas desejada é atingida. Encontramos dificuldades em obter essas instâncias devido ao tempo gasto pelo procedimento. Conseguimos reduzir o tempo de geração, exigindo apenas que a conectividade entre cada vértice de origem e o vértice de destino seja mantida ≥ 3 . Essa condição é suficiente para que o algoritmo em (CAMPÊLO *et al.*, 2012) encontre uma solução ótima em tempo polinomial, pois ele demanda que haja pelo menos três caminhos internamente disjuntos entre cada vértice de origem e o vértice de destino.

Para gerar os grafos bipartidos, iniciamos também de um grafo completo. Atribuímos pesos aleatórios às arestas e aplicamos um algoritmo de árvore geradora. A árvore encontrada pelo algoritmo é nosso grafo inicial. Observe que esse grafo é bipartido e conexo. Adicionamos então, aleatoriamente, arestas entre vértices de partições distintas até que a densidade de arestas desejada seja atingida.

Para gerar o terceiro tipo de grafo, tentamos sempre manter a conectividade entre

os vértices de origem e de destino no máximo 2. Além disso, garantimos que o grafo não seja bipartido. Assim como na geração de grafos bipartidos, partimos de uma árvore. Adicionamos inicialmente uma aresta entre dois vértices de uma mesma partição escolhidos aleatoriamente (garantindo ciclo ímpar). Em seguida, acrescentamos arestas, mantendo a conectividade no máximo 2 entre os vértices de origem e destino, até atingir a densidade de arestas desejada. Observe que, como partimos de um grafo conexo, novos ciclos ímpares devem aparecer, sempre que uma aresta adicionada tiver como extremidades dois vértices de mesma partição.

Para a geração das instâncias, utilizamos a linguagem de programação *Python* com auxílio da biblioteca *Igraph*. Criamos cinco instâncias para cada combinação dos seguintes parâmetros: tipo de grafo (os três tipos), número de vértices (150 e 300), densidade de arestas (5%, 7% e 10%), proporção de vértices de origem (2%, 4% e 6%) e intervalo de oferta dos vértices (de 1 a 25 e de 1 a 50), onde a oferta é definida de forma aleatória dentro de seu intervalo. Com isso, foram geradas 180 instâncias para cada tipo de grafo, totalizando 540 instâncias.

5.4 Resultados

As tabelas abaixo apresentam resultados a respeito do desempenho da heurística com cada uma das duas formulações. Em cada tabela, as linhas estão divididas em 3 grandes grupos, cada um associado a um dos 3 tipos de grafo de teste. As linhas referentes aos grafos com conectividade ≥ 3 entre os vértices de origem e de destino, apresentam, para as instâncias dessa classe de grafo, as seguintes informações:

- o tempo médio gasto pelo problema mestre (Coluna 4), subproblema (Coluna 5), tempo total da geração de colunas (Coluna 6) e problema inteiro parcial (Colunas 10);
- a proporção média de soluções provadas ótimas (Coluna 11);
- o número médio de colunas iniciais (Coluna 7) e geradas pela heurística (Coluna 8);
- o número médio de iterações (Coluna 9).

Cada linha agrupa as informações das instâncias com mesmo número de vértices e densidade de arestas, exibidos nas Colunas 2 e 3, respectivamente. As linhas referentes aos grafos bipartidos e aos grafos não bipartidos e não 3-conexos apresentam, de maneira semelhante ao dos 3-conexos, os resultados para suas respectivas classes de grafos. Finalmente, a última linha da tabela resume tais informações para todas as instâncias. As cifras relativas a tempo usam sempre segundo como medida.

A Tabela 1 apresenta os resultados dos experimentos com versão da heurística que

usa a \mathcal{F}_{EC} , enquanto a Tabela 2 é a correspondente com a \mathcal{F}_{ECP} .

Nos casos de teste em que a heurística utiliza a \mathcal{F}_{EC} , considerando todas as instâncias, o procedimento de geração de colunas gerou, em média, aproximadamente 28 colunas a partir da quantidade média de 6164 colunas iniciais (contando as colunas iniciais referentes às variáveis y). Seja i o valor ótimo encontrado pelo problema parcial inteiro e f o valor da solução ótima da geração de colunas. Em todas as instâncias, ou obtivemos $i = f$ ou $i = f + 1$. Em particular, os casos em que $i = f + 1$, que são os que a heurística não conseguiu provar que a solução é ótima, não ocorreram quando a soma das demandas dos vértices de origem era par. Os tempos mínimo e máximo da geração de colunas foram, respectivamente, 0,096 e 14,3 segundos. Na resolução do problema parcial inteiro, em apenas 0,74% das instâncias, o *branch-and-cut* explorou mais de um nó e, quando o fez, não explorou mais de 10 nós. Nessa etapa do método, os tempos mínimo e máximo foram respectivamente 0,018 e 1,139 segundos. O tempo médio da segunda etapa da heurística, foi aproximadamente 8,4 vezes menor em comparação ao tempo médio da primeira etapa.

Na Tabela 1 podemos ver que, apenas para os grafos não bipartidos e com conectividade ≤ 2 entre os vértices de origem e o vértice de destino (a terceira classe de grafos da tabela), houve casos em que a solução encontrada não foi provada ótima pela heurística baseada na \mathcal{F}_{EP} . Apesar disso, nessa mesma classe de grafos, a heurística encontrou uma solução ótima em 93,33% dos casos. Note que a soma do tempo médio de resolução do problema mestre e do subproblema é sempre inferior ao tempo médio total do processo de geração de colunas (o mesmo ocorre quando utilizamos a \mathcal{F}_{ECP}). Essa diferença se deve ao tempo gasto em procedimentos executados dentro da geração de colunas que não estão inseridos em nenhum desses dois problemas.

Passamos agora aos resultados obtidos nos experimentos com a \mathcal{F}_{ECP} . Considerando todos grafos, o procedimento de geração de colunas gerou em média 107 colunas, a partir da quantidade média de 2064 colunas iniciais. Novamente, em todas as instâncias, ou obtivemos $i = f$ ou $i = f + 1$ (aqui também ocorreu sempre o primeiro caso quando a soma das demandas era par). Os tempos mínimo e máximo da geração de colunas foram, respectivamente, 0,025 e 2,865 segundos. Na resolução do problema parcial inteiro, em apenas uma das instâncias o *branch-and-cut* explorou mais de um nó. Nesse caso em particular, foram explorados 869 mil nós em 395,639 segundos, tempo máximo de uma instância nessa etapa. O tempo mínimo foi em torno de 0,002 segundos. O tempo médio de resolução da primeira etapa foi aproximadamente

Tabela 1 – Experimentos com a formulação de emparelhamentos ponderados.

Tipo de grafo	Núm. de vértices	Den. de arestas	Tempo médio (GC)			Colunas (GC)		It. (GC)	T. médio (inteiro)	Encontrou sol. ótima
			Mestre	Subpro.	Total	Iniciais	Geradas			
<i>Conectividade</i> ≥ 3	150	5%	0,065	0,450	0,524	1675	16	17	0,256	100%
		7%	0,124	0,647	0,786	2347	20	21	0,279	100%
		10%	0,489	1,049	1,566	3352	25	26	0,299	100%
	300	5%	0,881	1,444	2,367	6727	27	28	0,358	100%
		7%	1,471	2,316	3,865	9418	35	36	0,322	100%
		10%	4,206	5,071	9,468	13456	46	47	0,547	100%
<i>Bipartido</i>	150	5%	0,055	0,141	0,203	1678	15	16	0,232	100%
		7%	0,090	0,225	0,327	2350	19	20	0,287	100%
		10%	0,414	0,400	0,840	3355	25	26	0,229	100%
	300	5%	0,688	0,488	1,214	6730	26	27	0,316	100%
		7%	1,246	0,893	2,214	9421	34	35	0,285	100%
		10%	2,967	1,964	5,097	13459	45	46	0,455	100%
<i>Conectividade</i> ≤ 2 e <i>não bipartido</i>	150	5%	0,062	0,436	0,506	1678	16	17	0,219	93,33%
		7%	0,106	0,655	0,776	2350	20	21	0,260	93,33%
		10%	0,481	1,096	1,609	3355	25	26	0,248	93,33%
	300	5%	0,850	1,366	2,263	6730	27	28	0,374	90,00%
		7%	2,208	3,250	5,578	9421	35	36	0,444	96,67%
		10%	5,026	5,776	11,031	13459	46	47	0,557	93,33%
Todos			1,191	1,537	2,791	6164	28	29	0,331	97,78%

Fonte: produzida pelo autor.

2,7 vezes mais rápido que o tempo médio da segunda.

Na Tabela 2, o percentual de soluções ótimas encontradas pela heurística com a \mathcal{F}_{ECP} na terceira classe de grafos foi similar àquele observado quando da utilização da \mathcal{F}_{EP} . Além desse tipo de grafos, a heurística também falhou em encontrar o ótimo para um caso de teste de grafos bipartidos. Em particular, para grafos bipartidos, o percentual de soluções ótimas encontradas foi de 99,44%.

Tabela 2 – Experimentos com a formulação de emparelhamentos e caminhos ponderados.

Tipo de grafo	Núm. de vértices	Den. de arestas	Tempo médio (GC)			Colunas (GC)		It. (GC)	T. médio (inteiro)	Encontrou sol. ótima
			Mestre	Subpro.	Total	Iniciais	Geradas			
<i>Conectividade</i> ≥ 3	150	5%	0,004	0,035	0,042	565	46	10	0,014	100%
		7%	0,005	0,047	0,057	789	57	11	0,008	100%
		10%	0,008	0,091	0,107	1124	72	13	0,012	100%
	300	5%	0,012	0,143	0,166	2255	110	11	0,012	100%
		7%	0,063	0,218	0,298	3152	139	14	0,028	100%
		10%	0,107	0,427	0,565	4498	193	18	0,039	100%
<i>Bipartido</i>	150	5%	0,005	0,041	0,050	566	44	9	0,012	100%
		7%	0,006	0,052	0,063	790	56	11	0,011	96,67%
		10%	0,010	0,109	0,129	1125	74	13	0,014	100%
	300	5%	0,014	0,172	0,200	2256	105	11	0,021	100%
		7%	0,070	0,241	0,331	3153	162	15	0,030	100%
		10%	0,135	0,538	0,715	4499	212	18	0,047	100%
<i>Conectividade</i> ≤ 2 e <i>não bipartido</i>	150	5%	0,008	0,066	0,079	566	51	10	0,018	93,33%
		7%	0,011	0,106	0,127	790	60	12	0,022	93,33%
		10%	0,017	0,174	0,206	1125	79	14	0,038	93,33%
	300	5%	0,021	0,231	0,270	2256	120	14	0,029	90,00%
		7%	0,066	0,222	0,308	3153	140	14	0,029	96,67%
		10%	0,270	0,970	1,314	4499	199	19	13,285	93,33%
Todos			0,046	0,216	0,279	2064	107	13	0,759	97,59%

Fonte: produzida pelo autor.

Comparando o tempo médio total gasto pela heurística com cada formulação, podemos ver que com a \mathcal{F}_{ECP} o tempo médio para obter uma solução (1,038 segundos) foi menor que o tempo médio gasto com a \mathcal{F}_{EP} (3,122 segundos).

Observando a Coluna 8 das duas tabelas, podemos notar que, conforme testamos grafos com mais vértices e com maior densidade de arestas, o número médio de colunas geradas cresce. Esse comportamento é semelhante nas três classes de grafos.

6 MÉTODO EXATO

Abordaremos agora a utilização da \mathcal{F}_{AC} e das desigualdades (4.6) e (4.7) para a construção de um método de resolução *branch-and-cut* para o PCF. O método segue a descrição genérica do *branch-and-cut* com exceção da etapa de cortes, onde tratamos de adicionar desigualdades (4.6) e (4.7) violadas (se houver) pelas soluções obtidas com a relaxação linear da \mathcal{F}_{AC} . Para a escolha de tais desigualdades, sugerimos dois algoritmos de separação, um para cada uma das classes de desigualdades.

6.1 Separação das desigualdades de remoção de simetrias

Reescrevemos abaixo as desigualdades de eliminação de simetrias (4.6):

$$\sum_{a=1}^e x_{ac-1} \geq x_{ec}, \quad \text{para } e \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{para } c \in \{2, \dots, t\}, \quad (6.1)$$

onde $m = |E|$ e $t = |C| \geq \chi'_{\Phi}(G)$. Considere que as arestas de $G = (V, E, b)$ são rotuladas de 1 a m e as cores em C são rotuladas de 1 a t .

Consideramos o problema de separação de uma solução $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{mt} \times \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^t$ viável para a relaxação linear da \mathcal{F}_{AC} em relação às restrições (6.1). Como esse conjunto de restrições tem tamanho polinomial, sua violação por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ pode ser verificada polinomialmente por inspeção. O cálculo de todos os somatórios em (6.1), separadamente, consome tempo $O(m^2t)$. Entretanto, podemos reduzir essa complexidade, calculando o somatório referente a e e $c - 1$ a partir daquele associado a $e - 1$ e $c - 1$, levando a um tempo total $O(mt)$. Além disso, para $c \in C$ tal que $\bar{z}_c = 0$, as desigualdades em (6.1) relativas a c são trivialmente satisfeitas, visto que $\bar{x}_{ec} = 0$, para todo $e \in E$, devido a (4.2). Tais observações geram o Algoritmo 2 para identificação das desigualdades (6.1) violadas.

6.2 Método de separação para as inequações blossom

Falaremos agora do método de separação para as desigualdades (4.7). Primeiramente, note que o número de desigualdades da classe (4.7) é exponencial em função do número de vértices (da ordem de $2^{|V|}$), o que torna mais complexo qualquer método de separação para essas desigualdades. O procedimento que iremos propor aqui é uma adaptação direta daquele usado para a separação das desigualdades blossom, que definem o politopo de emparelhamentos.

Algoritmo 2: REMOÇÃO SIMETRIAS

Entrada : Solução relaxada $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ da \mathcal{F}_{AC}
Saída : Desigualdades (6.1) violadas

```

1 início
2   para  $c = 2, \dots, t$  faça
3     se  $\bar{z}_c > 0$  então
4       soma  $\leftarrow 0$ 
5       para  $e = 1, \dots, m$  faça
6         soma  $\leftarrow$  soma +  $\bar{x}_{ec-1}$ 
7         se soma  $< \bar{x}_{ec}$  então
8           Desigualdade  $\sum_{a=1}^e x_{ac-1} \geq x_{ec}$  violada
9         fim
10      fim
11    fim
12  fim
13 fim

```

Em (FERREIRA; WAKABAYASHI, 1996, p. 83), é descrito um método de separação, desenvolvido por Padberg e Rao (1982), que verifica a violação das inequações (6.4) (inequações de blossom) do sistema linear abaixo:

$$\lambda_e \geq 0, \quad \forall e \in E, \quad (6.2)$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} \lambda_e \leq 1, \quad \forall v \in V, \quad (6.3)$$

$$\sum_{e \in E[U]} \lambda_e \leq \frac{(|U| - 1)}{2}, \quad \forall U \subseteq V, |U| \geq 3 \text{ e ímpar}, \quad (6.4)$$

onde V e E são, respectivamente, os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo simples G qualquer. Observe que os pontos inteiros que satisfazem esse sistema descrevem os possíveis emparelhamentos de G .

Como demonstrado em (FERREIRA; WAKABAYASHI, 1996), as desigualdades (6.4) são equivalentes a:

$$\sum_{e \in \delta(U)} \lambda_e + \sum_{v \in U} \rho_v \geq 1, \quad \forall U \subseteq V, |U| \geq 3 \text{ e ímpar}, \quad (6.5)$$

onde

$$\rho_v = 1 - \sum_{e \in \delta(v)} \lambda_e, \quad \forall v \in V, \quad (6.6)$$

ou seja, ρ_v é variável de folga de (6.3), e $\delta(U)$ são todas as arestas de G que têm exatamente uma extremidade em U , ou seja, as arestas do corte $[U, V \setminus U]$ de G . Para verificar este fato,

somamos as desigualdades (6.3) referentes a $U \subseteq V$ adicionadas de suas respectivas variáveis de folga ρ_v e obtemos

$$\sum_{v \in U} \sum_{e \in \delta(v)} \lambda_e + \sum_{v \in U} \rho_v = |U|.$$

Note que a igualdade acima soma λ_e uma vez para todo $e \in \delta(U)$ e duas vezes para todo $e \in E[U]$. Portanto, ela equivale a

$$\sum_{e \in \delta(U)} \lambda_e + 2 \sum_{e \in E[U]} \lambda_e + \sum_{v \in U} \rho_v = |U| \Rightarrow \sum_{e \in E[U]} \lambda_e = \frac{|U| - \sum_{e \in \delta(U)} \lambda_e - \sum_{v \in U} \rho_v}{2}.$$

Substituindo $\sum_{e \in E[U]} \lambda_e$ em (6.4) pelo seu equivalente acima, temos que

$$\frac{|U| - \sum_{e \in \delta(U)} \lambda_e - \sum_{v \in U} \rho_v}{2} \leq \frac{(|U| - 1)}{2} \Rightarrow \sum_{e \in \delta(U)} \lambda_e + \sum_{v \in U} \rho_v \geq 1.$$

Dessa forma, o resultado segue.

Dado $\bar{\lambda}$ satisfazendo (6.2) e (6.3) e determinando $\bar{\rho}$ através de (6.6) com $\lambda = \bar{\lambda}$, para verificar a existência de $U \subseteq V$ cuja desigualdade em (6.4) é violada por $\bar{\lambda}$, construímos, a partir do grafo original G , um grafo $G^* = (V^*, E^*)$, com $V^* = V \cup \{s^*\}$ e $E^* = E \cup \{vs^* : v \in V\}$, e definimos uma função de capacidade $c^* : E^* \rightarrow \mathbb{R}_+$, com $c^*(e) = \bar{\lambda}_e, \forall e \in E$, e $c^*(vs^*) = \bar{\rho}_v, \forall v \in V$. Com isso, basta encontrar em G^* um corte ímpar $\delta(W)$ de capacidade mínima tal que $s^* \notin W$, onde $\delta(W)$ é um corte ímpar de G^* se $W \subseteq V^*$ tem cardinalidade ímpar. Se a capacidade de tal corte é < 1 , então W viola (6.5) e, portanto, viola também (6.4); caso contrário $\bar{\lambda}$ satisfaz (6.4) (FERREIRA; WAKABAYASHI, 1996). O problema de encontrar um corte ímpar de capacidade mínima pode ser resolvido em tempo polinomial (PADBERG; RAO, 1982).

Considere agora uma solução $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ viável para a relaxação linear da \mathcal{F}_{AC} em uma instância $G = (V, E, b)$ do PCF. Seja $c \in C$. Então, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ satisfaz:

$$\bar{x}_{ec} \geq 0, \quad \forall e \in E, \quad (6.7)$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} \bar{x}_{ec} \leq \bar{z}_c, \quad \forall v \in V. \quad (6.8)$$

Queremos verificar se

$$\sum_{e \in E[U]} \bar{x}_{ec} \leq \frac{(|U| - 1)}{2} \bar{z}_c, \quad \forall U \subseteq V, |U| \geq 3 \text{ e ímpar}. \quad (6.9)$$

Note que, devido a (6.7)-(6.8), essas desigualdades são trivialmente satisfeitas quando $\bar{z}_c = 0$. Então, admitimos a partir de agora que $\bar{z}_c > 0$. Dividindo todas as desigualdades (6.7)-(6.9) por

\bar{z}_c , obtemos um sistema similar a (6.2)-(6.4). Portanto, nosso algoritmo de separação para (4.7) consiste em verificar, para cada $c \in C$ com $\bar{z}_c > 0$, a existência de um corte ímpar de capacidade < 1 no grafo G^* , construído como anteriormente, mas agora a partir de uma solução $\bar{\lambda}_e = \bar{x}_{ec}/\bar{z}_c$ $\forall e \in E$. Caso exista um tal corte $\delta(W)$, a desigualdade em (4.7) associada a $U = W$ e $c \in C$ está violada por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Do contrário, todas as desigualdades em (4.7) relativas a c estão satisfeitas.

6.3 Cardinalidade do conjunto de cores

Com relação ao número de variáveis da \mathcal{F}_{AC} , é fácil ver que este é dado por $|E||C| + |C| + 2|E|$, para uma instância $G = (V, E, b)$, o que é uma função da cardinalidade do conjunto de cores. Visto que o valor ótimo do PCF é o número de cores utilizadas em uma solução ótima, a cardinalidade de C pode ser então definida por um limite superior para $\chi'_\Phi(G)$. Assim, encontrar um limite superior mais apertado para $\chi'_\Phi(G)$ reduz o número de variáveis e, por consequência, pode melhorar o desempenho do método de resolução. Um limite superior trivial para o problema, como visto na Proposição 3.1.1, é $2B$. No entanto, podemos obter limites mais apertados com o algoritmo aproximativo de (CAMPÊLO *et al.*, 2012), com a heurística do Capítulo 5, ou mesmo calculando $\Delta_\Phi(G)$ com o Algoritmo 1 para obter o limite do Corolário 3.1.3.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho, propomos um novo algoritmo aproximativo para o PCF que melhora a garantia de aproximação dada pelo algoritmo de Campêlo *et al.* (2012). Para isso, definimos um novo problema, o MinGM, a ser solucionado em uma das etapas do nosso algoritmo, e provamos poder ser resolvido em tempo polinomial. Desenvolvemos duas novas formulações para o PCF, adaptamos levemente uma terceira e fizemos um estudo teórico com as formulações. Propomos também uma nova heurística para o problema que pode ser implementada com qualquer uma das duas formulações exponenciais do PCF. Implementamos a heurística e realizamos experimentos computacionais, avaliando o seu desempenho quando cada uma dessas duas formulações é usada como base. Por fim, apresentamos algoritmos de separação para duas desigualdades da \mathcal{F}_{AC} , os quais podem ser utilizados para compor um algoritmo *branch-and-cut* para o PCF.

A heurística que propomos se mostrou bastante eficiente em obter soluções viáveis para as instâncias dos experimentos. Além disso, as soluções encontradas estavam a no máximo uma unidade do valor ótimo. Esse fato reforça os resultados apresentados por Campêlo *et al.* (2012), mostrando que o índice cromático de fluxo está a no máximo uma unidade do piso do índice cromático fracionário de fluxo para grafos 2-conexos sob certas condições da função de demanda. Observe que tais resultados seguem a clássica Conjectura de Goldberg, que estima essa mesma distância unitária entre o índice cromático e o piso do índice cromático fracionário de um multigrafo arbitrário (GOLDBERG, 1973). Na verdade, essa diferença seria consequência da Conjectura de Goldberg em toda instância para a qual exista um fluxo que seja ótimo tanto para o índice cromático de fluxo quanto para o índice cromático fracionário de fluxo.

Destacamos o excelente desempenho da heurística quando utilizada a formulação de emparelhamentos e caminhos ponderados. Mesmo com um caso de teste que levou mais de 6 minutos para ser resolvido, essa versão da heurística demorou em média 1,04 segundos para encontrar uma solução viável, sendo pelo menos três vezes mais rápida que quando utilizada a formulação de emparelhamentos ponderados. Essa diferença se acentua se desconsiderarmos essa instância discrepante, levando aquela versão a ser 10 vezes mais rápida em média. Adicionalmente, quando restringimos nossa comparação do tempo aos grafos de conectividade ≥ 3 origem-destino, a superioridade observada também se eleva, tornando tal versão em média 15 vezes mais rápida.

Quanto aos demais métodos de resolução, propomos como trabalhos futuros avaliar o desempenho do método exato sugerido com as duas desigualdades válidas propostas e verificar

como ele se comporta com as diferentes possibilidades de limites superiores para o número de cores, o que afeta a dimensão do modelo. Propomos também estudar o comportamento do método aproximativo aqui proposto em classes específicas de grafos e verificar na literatura algoritmos de coloração de arestas para multigrafos que, quando aplicados na etapa de coloração do algoritmo aproximativo, mantenha ou aprimore a garantia de aproximação aqui obtida e melhore o tempo de execução geral do algoritmo.

Do ponto de vista teórico, podemos citar três pontos para pesquisa. O primeiro ponto é estabelecer relações mais fortes entre um fluxo ótimo para o MinGM e um fluxo ótimo para o PCF, especialmente quando o multigrafo gerado pelo fluxo é colorido exatamente por um m -algoritmo. O segundo é estudar a relação de $\Delta_{\Phi}(G)$, $\chi'_{\Phi}(G)$ e $\chi^{*}_{\Phi}(G)$ com o índice cromático e o índice cromático fracionário de G_{ϕ} , permitindo que ϕ seja fluxo não inteiro. O último ponto é determinar se todo multigrafo pode ser gerado por um fluxo viável. Em caso negativo, analisar as propriedades dos que podem ser gerados. Esse estudo pode ainda ser estendido para multigrafos derivados de fluxos ótimos para o PCF.

REFERÊNCIAS

- AHUJA, R. K.; MAGNANTI, T. L.; ORLIN, J. B. Network flows. Cambridge, Mass.: Alfred P. Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology, 1988.
- ANDERSEN, L. D. On edge-colourings of graphs. **Mathematica Scandinavica**, v. 40, p. 161–175, 1975.
- BANG-JENSEN, J.; BESSY, S. (arc-) disjoint flows in networks. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 526, p. 28–40, 2014.
- BERMOND, J.-C.; GALTIER, J.; KLASING, R.; MORALES, N.; PERENNES, S. Hardness and approximation of gathering in static radio networks. **Parallel Processing Letters**, v. 16, n. 02, p. 165–183, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0129626406002551>>.
- CAMPÊLO, M.; CORRÊA, R.; HUIBAN, C.; RODRIGUES, C. D. The flow coloring problem. In: **Congresso Latino-Iberoamericano de Investigacion Operativa (CLAIO)**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 3256–3267.
- CAMPÊLO, M.; HUIBAN, C.; RODRIGUES, C. D.; SAMPAIO, R. M. On the complexity of the flow coloring problem. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 197, p. 75–92, 2015.
- CHEN, G.; GAO, Y.; KIM, R.; POSTLE, L.; SHAN, S. Chromatic index determined by fractional chromatic index. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 131, p. 85 – 108, 2018.
- CHEN, G.; JING, G. Structural properties of edge-chromatic critical graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, 2018. ArXiv:1709.04568v2 [math.CO] 19 Sep 2018.
- COLE, R.; OST, K.; SCHIRRA, S. Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \log D)$ time. **Combinatorica**, Springer, v. 21, n. 1, p. 5–12, 2001.
- DANTZIG, G.; FULKERSON, D. R. On the max flow min cut theorem of networks. **Linear inequalities and related systems**, v. 38, p. 225–231, 2003.
- DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. **Numerische mathematik**, Springer, v. 1, n. 1, p. 269–271, 1959.
- EDMONDS, J. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices. **Journal of research of the National Bureau of Standards B**, v. 69, n. 125-130, p. 55–56, 1965.
- FAVRHOLDT, L. M.; STIEBITZ, M.; TOFT, B. **Graph Edge Coloring: Vizing’s Theorem and Goldberg’s Conjecture**. [S.l.], 2006. Techn. rep. DMF-2006-10-003, IMADA-PP-2006-20.
- FERREIRA, C. E.; WAKABAYASHI, Y. **Combinatória poliédrica e planos-de-corte faciais**. [S.l.]: UNICAMP - Instituto de Computação, 1996.
- FORD, L. R.; FULKERSON, D. R. Maximal flow through a network. **Canadian journal of Mathematics**, v. 8, n. 3, p. 399–404, 1956.
- GOLDBERG, M. K. On multigraphs of almost maximal chromatic class. **Diskret Analiz**, v. 23, p. 3–7, 1973. In Russian.

- GOLDBERG, M. K. Structure of multigraphs with restriction on the chromatic class. **Diskret Analiz**, v. 30, p. 3–12, 1977. In Russian.
- GOLDBERG, M. K. Edge-coloring of multigraphs: Recoloring technique. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 8, n. 1, p. 123–137, 1984.
- GOMES, C. **Radio mesh networks and the round weighting problem**. Tese (Doutorado) — Université Nice Sophia Antipolis, 2009.
- HOCHBAUM, D. S.; NISHIZEKI, T.; SHMOYS, D. B. A better than “best possible” algorithm to edge color multigraphs. **Journal of Algorithms**, Academic Press, v. 7, n. 1, p. 79–104, 1986.
- HOLYER, I. The np-completeness of edge-coloring. **SIAM Journal on computing**, SIAM, v. 10, n. 4, p. 718–720, 1981.
- KLASING, R.; MORALES, N.; PÉRENNES, S. On the complexity of bandwidth allocation in radio networks. **Theoretical Computer Science**, v. 406, n. 3, p. 225 – 239, 2008. ISSN 0304-3975. Algorithmic Aspects of Global Computing.
- KÖNIG, D. Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok elméletére. **Matematikai Természettudományi Értesítő**, v. 34, p. 104–119, 1916. German Translation: Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, 77: 453-465, 1916. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/158740>>.
- MATIAS, J.; CAMPÊLO, M. Método exato para o problema de coloração de fluxo. In: **Congresso Latino-Iberoamericano de Investigacion Operativa (CLAIO)**. [S.l.: s.n.], 2018.
- MCDONALD, J. M. On a theorem of goldberg. **Journal of Graph Theory**, v. 68, n. 1, p. 8–21, 2011.
- MEYER, R. R. On the existence of optimal solutions to integer and mixed-integer programming problems. **Mathematical Programming**, v. 7, n. 1, p. 223–235, 1974.
- NISHIZEKI, T.; KASHIWAGI, K. On the 1.1 edge-coloring of multigraphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, v. 3, n. 3, p. 391–410, 1990.
- ORLIN, J. B. Max flows in $o(nm)$ time, or better. In: **Proceedings of the Forty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing**. [S.l.: s.n.], 2013. (STOC '13), p. 765–774.
- PADBERG, M. W.; RAO, M. R. Odd minimum cut-sets and b-matchings. **Mathematics of Operations Research**, INFORMS, v. 7, n. 1, p. 67–80, 1982.
- PAPADIMITRIOU, C. H. **Computational complexity**. [S.l.]: John Wiley and Sons Ltd., 2003.
- SANDERS, P.; STEURER, D. An asymptotic approximation scheme for multigraph edge coloring. **ACM Transactions on Algorithms (TALG)**, ACM, v. 4, n. 2, p. 21, 2008.
- SCHEIDE, D. Graph edge colouring: Tashkinov trees and goldberg’s conjecture. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, v. 100, n. 1, p. 68 – 96, 2010.
- SCHRIJVER, A. **Theory of Linear and Integer Programming**. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- SCHRIJVER, A. Bipartite edge coloring in $O(\Delta m)$ time. **SIAM Journal on Computing**, SIAM, v. 28, n. 3, p. 841–846, 1998.

SCHRIJVER, A. **Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 24.

SHANNON, C. E. A theorem on coloring the lines of a network. **Studies in Applied Mathematics**, Wiley Online Library, v. 28, n. 1-4, p. 148–152, 1949.

STIEBITZ, M.; SCHEIDE, D.; TOFT, B.; FAVRHOLDT, L. M. **Graph Edge Coloring: Vizing's Theorem and Goldberg's Conjecture**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. v. 75.

TASHKINOV, V. A. On an algorithm for the edge coloring of multigraphs. **Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii**, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian . . . , v. 7, n. 3, p. 72–85, 2000.

WILSON, R. J.; WILSON, R. J.; WILSON, R. J.; WILSON, R. J. **Introduction to graph theory**. [S.l.]: Longman London, 1972. v. 107.

WOLSEY, L. A. **Integer Programming. Series in Discrete Mathematics and Optimization**. [S.l.]: Wiley-Interscience New Jersey, 1998.