



Dissertação de Mestrado  
em Ciência da Computação  
Universidade Federal do Ceará

# **Técnicas para Geração de Malhas de Quadriláteros Convexos e sua aplicação em Reservatórios Naturais**

Rafael Siqueira Telles Vieira  
rafastv@gmx.com

**Orientador:** Joaquim Bento Cavalcante Neto  
**Coorientador:** Creto Augusto Vidal

**Fortaleza, 21 de fevereiro de 2011**

**Rafael Siqueira Telles Vieira**

**Técnicas para Geração de Malhas de Quadriláteros Convexos  
e sua aplicação em Reservatórios Naturais**

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Computação da Universidade Federal do  
Ceará como requisito parcial para obtenção do  
título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador:  
Joaquim Bento Cavalcante Neto  
Coorientador:  
Creto Augusto Vidal

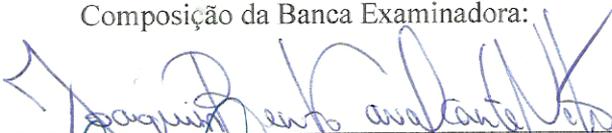
Fortaleza  
2011

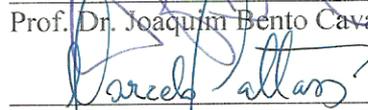
**TÉCNICAS PARA GERAÇÃO DE MALHAS DE QUADRILÁTEROS  
CONVEXOS E SUA APLICAÇÃO EM RESERVATÓRIOS NATURAIS**

Rafael Siqueira Telles Vieira

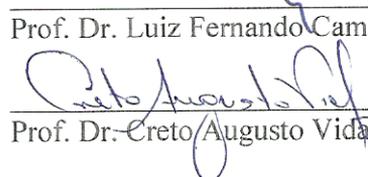
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como parte dos Requisitos para a obtenção do Grau de Mestre em Ciência da Computação.

Composição da Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Joaquim Bento Cavalcante Neto (DC/UFC)

  
Prof. Dr. Marcelo Gattass (PUC/RIO)

  
Prof. Dr. Luiz Fernando Campos Ramos Martha (PUC/RIO)

  
Prof. Dr. Creto Augusto Vidal (PUC/RIO)

Aprovada em 21 de fevereiro de 2011.

A todos os atuais e futuros estudiosos de malhas quadrilaterais.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter tido a oportunidade de desenvolver este trabalho. Sem o qual jamais teria encontrado forças e motivação para concluí-lo. Pelos momentos de dúvida, em que me animou a estudar mais. Pelos momentos de insegurança, em que me guiou a analisar o meu trabalho. Pelos momentos de fraqueza, em que renovou minhas forças pela fé.

Agradeço a minha noiva, Rossana, pela paciência e confiança em mim. Por todos os momentos que tive que a deixar sozinha para estudar. Pelas correções e apontamentos que ela fez a este trabalho. Pelas palavras de ânimo e carinho que me ofereceu quando precisei.

Agradeço aos meus pais, Clotilde e Carlos, pela educação na ciência e na vida que me presentearam. Por terem me oferecido as condições de terminar este trabalho. Pela vida e pelo ambiente seguro de um lar.

Agradeço aos meus irmãos, Ricardo, Carla e Carlos por terem oferecido por meio de exemplos de coragem e perseverança o caminho a seguir. Pelos momentos de descontração que aliviaram o cansaço.

Agradeço a todos os meus amigos, principalmente ao Ricardo Brasil e ao Gustavo Wilke, cujo apoio foi essencial. Pela sinceridade e honestidade tão singulares nestas pessoas e difíceis de encontrar. Pelos momentos de conversas longas sobre trivialidades e sobre o futuro que sempre ocorreram acompanhadas de objetividade.

Agradeço aos meus orientadores, Joaquim Bento e Creto Vidal, por todo o incentivo e oportunidades necessárias ao término deste trabalho. Por acreditarem no meu trabalho e me oferecerem a chance de escrever esta dissertação e cursar o mestrado. Pela viagem ao RJ e a possibilidade de desenvolver na PUC parte deste trabalho, tendo contato com outros pesquisadores e professores, como Marcelo Gattass e Luiz Fernando, que me auxiliaram nesta pesquisa através de novas perspectivas.

Agradeço, por fim, a todos os pesquisadores que distribuem seus artigos gratuitamente sob o formato digital o que facilitou enormemente a realização deste trabalho. Muitos deles estão citados nas referências. Pelo desenvolvimento desta pesquisa que só pode ser feita pelo trabalho conjunto de tantos outros estudiosos que mantêm a ciência livre do papel moeda.

A todos, o meu mais sincero e verdadeiro muito obrigado! Esta dissertação só foi possível graças a todos vocês.

*“Reason is the natural order of truth; but imagination is the organ of meaning”*  
C.S. Lewis<sup>1</sup>

*“Only the skilled can judge the skillfulness, but that is not the same as judging the value of the result”*  
C.S. Lewis<sup>2</sup>

---

1 A razão é a ordem natural da verdade; mas a imaginação é o órgão do significado (Tradução feita pelo autor).

2 Apenas os habilitados podem julgar habilidade, mas isto não é o mesmo que julgar o valor do resultado. (Tradução feita pelo autor).

## Resumo

Esta dissertação descreve quatro métodos implementados para realizar uma quadrilaterização convexa do espaço bidimensional que pode conter linhas poligonais ou buracos. Dois destes métodos, ponto médio e ortoquad, utilizam de elementos guia, o baricentro de uma região ou o locus de círculos máximos tangentes e internos a geometria, para produzir uma malha conforme o domínio. Os outros dois, triquad e quadrilaterização incremental, utilizam de uma triangulação explícita e implícita combinando elementos aos pares para realizar a geração da malha. Todas as técnicas são feitas por decomposição de regiões o que garante uma quadrilaterização final, já que o domínio é sempre segmentado a cada iteração. Estas técnicas são comparadas por um critério de geometria e topologia de forma a tornar evidentes suas vantagens e desvantagens assim como promover melhorias futuras. As técnicas são aplicadas a alguns exemplos, incluindo-se um reservatório natural, a fim de exibir seu funcionamento em um ambiente real ou próximo do mesmo, conforme as amostras utilizadas. Também se pretende apresentar ao longo deste trabalho os requisitos necessários, segundo a experiência deste autor com o tema, para o desenvolvimento de uma técnica de geração de malha quadrilateral.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geração de malhas, quadrilaterização, geometria computacional, reservatórios, modelagem do subsolo.

## **Abstract**

This work describes four methods implemented to achieve a convex quadrilaterization of the two-dimensional space that may have polygonal lines or holes. Two of these methods, midpoint and ortotriad make use of guide elements, the centroid of a region or the locus of maximum tangent circles inside a geometry, to produce a mesh for the domain. The other two methods, triquad and incremental quadrilateralization use an implicit and explicit triangulation while combining elements in pairs to generate a mesh. All these methods are made through domain decomposition which assure quadrilaterization at the end, since the domain is always partitioned at each iteration. These techniques are compared by a criterion of geometry and topology in order to make clear its advantages and disadvantages and as means of promoting future improvements. The techniques are applied to some samples, including a natural reservoir, in order to view its operation in a real environment or near reality according to the sample used. Also it intends to present throughout this work the requirements, according to the experience with the theme of this author, to develop a technique for quadrilateral mesh generation.

**KEYWORDS:** Mesh generation, quadrangulation, computational geometry, reservoir, seismic models.

## Lista de Algoritmos

Algoritmo 4.1:	Procedimento principal do ponto médio.....	72
Algoritmo 4.2:	Descrição do método maiorConcavo.....	73
Algoritmo 4.3:	Descrição do método subQuadPontoMedio.....	74
Algoritmo 4.4:	Descrição do método adicionaHolesRetas.....	77
Algoritmo 4.5:	Descrição do método de quadrilaterização.....	79
Algoritmo 4.6:	Descrição do método de quadrilaterização para triquad método I.....	89
Algoritmo 4.7:	Descrição do método de quadrilaterização para triquad método II.....	93
Algoritmo 4.8:	Descrição do método defineEixoMedio.....	102
Algoritmo 4.9:	Descrição do método interativo aproximaEixoMedio.....	103
Algoritmo 4.10:	Descrição do procedimento principal de ortoQuad.....	105
Algoritmo 4.11:	Descrição do método aplicaOrtoQuad.....	106
Algoritmo 4.12:	Descrição do método de quadrilaterização para o algoritmo ortoQuad.....	108
Algoritmo 4.13:	Descrição do método para adição de elemento Varignon.....	108
Algoritmo 4.14:	Descrição do método para adição de elemento boomerang.....	109
Algoritmo 4.15:	Procedimento principal de quadrilaterização Incremental.....	120
Algoritmo 4.16:	Descrição do método quadInc.....	123
Algoritmo 4.17:	Descrição do método tentaInserir4conexo.....	124
Algoritmo 4.18:	Descrição do método tentaInserir3conexoPar.....	125
Algoritmo 4.19:	Descrição do método procuraDiagonalPar.....	126

## Lista de Figuras

Figura 1.1:	Triangulação de uma estrela com diagonais e quadrilaterização convexa com um vértice de Steiner.	21
Figura 1.2:	<i>Thumper Truck</i> .	22
Figura 1.3:	<i>Geophone</i> .	22
Figura 1.4:	Processo de captura do modelo do subsolo no oceano.	23
Figura 1.5:	Duas <i>airguns</i> usadas no processo de captura sísmica nos oceanos.	23
Figura 1.6:	Exemplo de dado sísmico.	24
Figura 1.7:	Da esquerda para direita: falha estrutural comum, falha estrutural: domo de sal, falha estrutural: anticline, falha estratigráfica. Da esquerda para direita: falha estrutural comum, falha estrutural: domo de sal, falha estrutural: anticline, falha estratigráfica.	25
Figura 2.1:	São necessários pelo menos $\lfloor 6/3 \rfloor$ vigilantes para guardar um hexágono qualquer.	28
Figura 2.2:	Inversão de arestas para poder unir triângulos aos pares.	29
Figura 2.3:	Exemplo de resultado do algoritmo de <i>onion peeling</i> : primeiro caso à esquerda e segundo caso à direita.	30
Figura 2.4:	Domínios para os quais não existe quadrilaterização convexa sem a adição de vértices (em vermelho).	32
Figura 3.1:	Exemplo de polígonos: (a) Fechado, e (b) Aberto.	34
Figura 3.2:	Exemplo de polígonos fechados: (a) Complexo, e (b) Simples.	35
Figura 3.3:	Definição de ângulo.	35
Figura 3.4:	Exemplo de quadrângulos: (a) Convexo, e (b) Côncavo.	36
Figura 3.5:	Exemplos de malhas: Natural à esquerda (uma colméia, retirando-se de uma lâmina conjunto de hexágonos que particionam o espaço), artificial à direita (a pavimentação de uma calçada, onde um conjunto de elementos curvilíneos particionam o espaço).	36
Figura 3.6:	Tipos de malha: (a) Estruturada (curvilínea), (b) Não-estruturada (Delaunay).	37
Figura 3.7:	Exemplo de uma <i>tab</i> .	38
Figura 3.8:	Exemplos (da esquerda para direita): uma boa <i>tab</i> , um par de lados que não forma uma <i>tab</i> e um par de <i>tabs</i> . Em vermelho têm-se <i>tabs</i> , em verde segmento inferior e em azul segmento superior.	38
Figura 3.9:	Existem três maneiras distintas para quadrilaterizar um hexágono convexo sem a adição de pontos de Steiner.	39
Figura 3.10:	Exemplo de fronteiras em azul: (a) Regiões em uma fronteira; e (b) Uma malha é construída em verde.	40
Figura 3.11:	Diagonais em um ciclo: (a) Diagonais pares; e (b) Diagonais ímpares.	43

Figura 3.12: Exemplo de quadrilátero 0-conexo.	44
Figura 3.13: Exemplo de quadrilátero 1-conexo.	45
Figura 3.14: Elemento 1-conexo e a formação de uma quadrilaterização convexa correspondente.	45
Figura 3.15: Solução de Blacker.	46
Figura 3.16: Exemplo de quadrilátero 2-conexo.	46
Figura 3.17: Escolha de uma diagonal ímpar: em azul e verde são dois ciclos de fronteira formados pela adição do elemento quadrilateral.	47
Figura 3.18: Construção de um quadrilátero 2-conexo.	47
Figura 3.19: Construção de um quadrilátero 3-conexo.	48
Figura 3.20: Exemplo de quadrilátero 3-conexo.	48
Figura 3.21: Exemplo de quadrilátero 3-conexo sem arestas no domínio.	49
Figura 3.22: Adição de quadrilátero 4-conexo ao ciclo da fronteira.	50
Figura 3.23: Exemplo de quadrilátero 4-conexo com duas arestas comuns ao domínio e sequenciais.	50
Figura 3.24: Exemplo de quadrilátero 4-conexo com duas arestas comuns ao domínio e opostas.	51
Figura 3.25: Exemplo de uma boa escolha de vértices de conexão, que divide a paridade do domínio por dois.	51
Figura 3.26: Exemplo de quadrilátero 4-conexo com uma aresta comum ao domínio.	52
Figura 3.27: Exemplo de quadrilátero 4-conexo sem arestas comuns ao domínio.	52
Figura 3.28: Adição de quadrilátero 4-conexo: (a) Ciclos ímpares; e (b) Ciclos pares.	54
Figura 3.29: Quadrilaterização por adição de quadrilátero 4-conexo: (a) Ciclos ímpares; e (b) Ciclos pares.	54
Figura 3.30: Exemplo de um quadrilátero não estrito.	55
Figura 3.31: Ciclos pares não garantem elementos convexos.	55
Figura 3.32: A esquerda um pentágono (ciclo ímpar): para quadrilaterizá-lo, adicionam-se pontos de Steiner, triângulos ou removem-se buracos de ciclo ímpar.	55
Figura 3.33: Triângulo de Varignon.	56
Figura 3.34: Construção de um triângulo de Varignon.	57
Figura 3.35: Adição de um triângulo interno por simetria angular.	57
Figura 3.36: Triângulo de Varignon, quadrilaterização final.	57
Figura 3.37: Preparando um quadrilátero côncavo para adição de um triângulo de Varignon.	58
Figura 3.38: Exemplo de quadrilátero boomerang.	59
Figura 3.39: Construção do elemento boomerang.	61
Figura 3.40: Exemplo de polígono à esquerda e sua malha Cartesiana correspondente à direita: linha pontilhada é mantida apenas para identificar regiões de extrapolação e perca.	62
Figura 3.41: Exemplo de domínio curvilíneo original e sua malha quadrilateral curvilínea	62

resultante.

Figura 3.42: Exemplos com PEBI: (a) Bissetor perpendicular (em vermelho) a distância de dois vértices (em verde), e (b) Domínio quadrilaterizado pelo uso de uma malha de Voronoi ou PEBI.	63
Figura 3.43: Exemplo de malha corner-point que pode possuir ângulos variados.	64
Figura 3.44: Exemplo de malha quad-dominant: ocorre a presença de triângulos.	64
Figura 3.45: Exemplo de quadrilaterização por metodologia indireta.	65
Figura 3.46: Exemplo de quadrilaterização por metodologia direta: adição de diagonais.	65
Figura 4.1: Ponto médio de um polígono convexo.	68
Figura 4.2: Ponto médio de um polígono côncavo.	68
Figura 4.3: Divisão de ângulos: a) bissetriz b) trissetriz.	69
Figura 4.4: Bissetriz (vermelho) e diagonal (verde). Sem pontos de Steiner divide-se a figura em dois domínios convexos.	70
Figura 4.5: Quadrilaterização de um domínio usando o baricentro em vermelho, diagonal e os pontos médios em verde.	71
Figura 4.6: Refinamento de uma região convexa por domínio convexo reduzido. Insere-se o próprio domínio em tamanho reduzido repetidas vezes.	71
Figura 4.7: Ângulo externo (verde) e interno (vermelho) para: (a) polígono, (b) vértice interno, (c) linha poligonal e (d) buraco.	72
Figura 4.8: Exemplo de um domínio que será quadrilaterizado pelo Algoritmo 4.1.	72
Figura 4.9: Método maiorConcavo retorna um vértice envolvido pelo círculo.	73
Figura 4.10: Divisão de um domínio em regiões convexas através da adição de diagonais pelo Algoritmo 4.3	75
Figura 4.11: Sentido anti-horário em verde e sentido horário em vermelho.	76
Figura 4.12: Adição de diagonais à esquerda e ângulos usados para verificar a validade dos ciclos à direita.	76
Figura 4.13: Algoritmo do tiro para verificar a posição do vértice em vermelho: verdadeiro à esquerda e falso a direita.	78
Figura 4.14: Exemplo de caso em que é necessário aplicar o método contaConcavos.	78
Figura 4.15: Quadrilaterização convexa do domínio exibido na Figura 4.8.	79
Figura 4.16: Quadrilaterização de regiões convexas pelo Algoritmo 4.5.	80
Figura 4.17: Refino de uma quadrilaterização convexa. (a) Duas iterações. (b) Três iterações.	81
Figura 4.18: Quadrilaterização de um triângulo qualquer.	82
Figura 4.19: Dois segmentos paralelos cortados por uma transversal pontilhada.	83
Figura 4.20: Quadrilaterização de triângulo usando um ponto interno qualquer.	83
Figura 4.21: O vértice em vermelho pode ser projetado por paralelismo a um dos dois lados adjacentes.	84
Figura 4.22: Triangulação de uma região convexa usando um vértice de referência.	85

Figura 4.23: Triquad, método 1, de um domínio par a esquerda e ímpar a direita.	85
Figura 4.24: Quadrilaterização de região convexa pelo uso de diagonais, para um domínio ímpar obtêm-se triângulos.	86
Figura 4.25: Triquad, método 2, de um domínio par a esquerda e ímpar a direita.	86
Figura 4.26: Domínio a ser quadrilaterizado convexamente pelos métodos I e II.	87
Figura 4.27: Divisão de um domínio em regiões convexas através da adição de diagonais pelo Algoritmo 4.3.	88
Figura 4.28: Elemento referência para quadrilaterização, método I.	89
Figura 4.29: Adição de diagonais às regiões convexas.	90
Figura 4.30: Quadrilaterização de regiões convexas pelo Algoritmo 4.6.	91
Figura 4.31: Quadrilaterização convexa final do domínio apresentado na Figura 4.26.	92
Figura 4.32: Elemento referência para quadrilaterização, método II.	94
Figura 4.33: Quadrilaterização convexa final do domínio apresentado na Figura 4.26.	94
Figura 4.34: Adição de diagonais às regiões convexas.	95
Figura 4.35: Quadrilaterização de regiões convexas pelo Algoritmo 4.7.	96
Figura 4.36: Projeção do centro de um círculo máximo, em dois segmentos quaisquer do polígono.	97
Figura 4.37: Disparam-se círculos através dos vértices na direção das bissetrizes que expandem até tangenciar o domínio.	98
Figura 4.38: Eixo médio em verde e raio disparado (em vermelho) por um vértice de um hexágono retangular.	98
Figura 4.39: O círculo é tangente à dois vértices (ângulos côncavos), não há a formação de ângulo reto.	99
Figura 4.40: Remoção de uma região quadrilateral côncava.	99
Figura 4.41: Exemplo de regiões, em verde, com vértices de ligação, em vermelho.	100
Figura 4.42: Inserção de um novo vértice em regiões com vértices de ligação. Novo vértice em vermelho.	100
Figura 4.43: Exemplo de uma quadrilaterização	101
Figura 4.44: Exemplo de uso de diagonal ímpar (vermelho) para quadrilaterizar uma região.	102
Figura 4.45: Início do método Ortoquad.	104
Figura 4.46: Posicionamento de círculos máximos com redução na quantidade de círculos.	105
Figura 4.47: Adicionam-se segmentos que ligam os centros dos círculos máximos aos seus pontos de tangência.	107
Figura 4.48: Modelos de referência para algoritmos de quadrilaterização.	107
Figura 4.49: Resultado final da quadrilaterização convexa pelo procedimento ortoQuad.	110
Figura 4.50: Refino da quadrilaterização convexa por meio de duas iterações do ponto médio.	111

Figura 4.51: Refino da quadrilaterização convexa por meio de duas iterações do domínio convexo reduzido	112
Figura 4.52: Inserção de quadriláteros.	114
Figura 4.53: Quadrilaterização convexa pela adição de quadriláteros n-conexo.	115
Figura 4.54: Resultado da união de dois quadriláteros.	116
Figura 4.55: Adição de elementos n-conexo em ordem de prioridade.	116
Figura 4.56: Loop infinito ao quadrilaterizar uma região convexamente por quadriláteros n-conexo com $n \geq 3$ .	117
Figura 4.57: Exemplo de seleção de vértice com ângulo convexo (vermelho): (a) Triângulo base ruim; e (b) Triângulo base bom.	118
Figura 4.58: Regras para formação de quadrilátero n-conexo.	118
Figura 4.59: Lançamento de diagonais baseado na paridade dos vértices.	118
Figura 4.60: Processo de construção de um elemento 3-conexo.	119
Figura 4.61: Domínio utilizado para o processo de quadrilaterização incremental.	120
Figura 4.62: Adição de elementos n-conexo convexos.	122
Figura 4.63: Quadrilaterização convexa final para um domínio através do processo de quadrilaterização incremental.	126
Figura 4.64: Refino de uma malha gerada por quadrilaterização incremental pelo uso do ponto médio.	127
Figura 5.1: Exemplo de domínio a ser quadrilaterizado convexamente.	131
Figura 5.2: Exemplo de malha convexa gerada pela técnica do ponto médio com três iterações no domínio apresentado na Figura 5.1.	135
Figura 5.3: Região ampliada da malha presente na Figura 5.2.	135
Figura 5.4: Exemplo de malha convexa gerada pela técnica triquad método I com três iterações no domínio apresentado na Figura 5.1.	136
Figura 5.5: Região ampliada da malha presente na Figura 5.4.	136
Figura 5.6: Exemplo de malha convexa gerada pela técnica triquad método II com três iterações no domínio apresentado na Figura 5.1.	137
Figura 5.7: Região ampliada da malha presente na Figura 5.6.	137
Figura 5.8: Exemplo de domínio a ser quadrilaterizado convexamente.	138
Figura 5.9: Exemplo de malha gerada pela técnica do ponto médio com duas iterações no domínio da Figura 5.8.	142
Figura 5.10: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método I com duas iterações no domínio da Figura 5.8.	142
Figura 5.11: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método II com duas iterações no domínio da Figura 5.8.	143
Figura 5.12: Domínio para ser quadrilaterizado convexamente.	144

Figura 5.13: Exemplo de malha gerada pela técnica do ponto médio com três iterações no domínio da Figura 5.12.	148
Figura 5.14: Exemplo de malha gerada pela técnica triquad método I com três iterações no domínio da Figura 5.12.	148
Figura 5.15: Exemplo de malha gerada pela técnica triquad método II com três iterações no domínio da Figura 5.12.	149
Figura 5.16: Exemplo de malha gerada pela técnica ortoquad com três iterações no domínio da Figura 5.12.	149
Figura 5.17: Domínio para ser quadrilaterizado convexamente.	150
Figura 5.18: Exemplo de malha gerada pela técnica do ponto médio com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.	155
Figura 5.19: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método I com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.	156
Figura 5.20: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método II com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.	156
Figura 5.21: Exemplo de malha gerada pela técnica de ortoquad com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.	157
Figura 5.22: Exemplo de malha gerada pela técnica de quadrilaterização incremental com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.	157

## Lista de Gráficos

Gráfico 5.1:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.2.....	133
Gráfico 5.2:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.4.....	134
Gráfico 5.3:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.6.....	134
Gráfico 5.4:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.9.....	140
Gráfico 5.5:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.10.....	141
Gráfico 5.6:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.11.....	141
Gráfico 5.7:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.13.....	146
Gráfico 5.8:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.14.....	146
Gráfico 5.9:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.15.....	147
Gráfico 5.10:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.16.....	147
Gráfico 5.11:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.18.....	153
Gráfico 5.12:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.19.....	153
Gráfico 5.13:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.20.....	154
Gráfico 5.14:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.21.....	154
Gráfico 5.15:	Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.22.....	155

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1: Quantidade de vértices intrusos adicionados para cada tipo de quadrilátero através de diagonais pares.	...53
Tabela 5.1: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.2, 5.4 e 5.6.	..133
Tabela 5.2: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.9, 5.10 e 5.11.	..140
Tabela 5.3: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16.	..145
Tabela 5.4: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22.	..152

# Sumário

Agradecimentos.....	5
Resumo.....	7
<i>Abstract</i> .....	8
Lista de Algoritmos.....	9
Lista de Figuras.....	10
Lista de Gráficos.....	16
Lista de Tabelas.....	17
1. Introdução.....	20
1.1 Contexto.....	22
1.2 Objetivos.....	26
2. Trabalhos Relacionados.....	27
2.1 Introdução.....	27
2.2 Desenvolvimento.....	27
2.3 Considerações Finais.....	33
3. Malhas de Quadriláteros.....	34
3.1 Definição.....	34
3.2 Requisitos.....	37
3.3 Classificação.....	61
3.4 Metodologia para geração de malha.....	64
3.4.1 Indireta.....	65
3.4.2 Direta.....	65
3.5 Considerações Finais.....	66
4. Estratégias para resolução.....	67
4.1 Ponto Médio.....	67
4.2 Triquad.....	82
4.3 Ortoquad.....	97
4.4 Quadrilaterização Incremental.....	113
4.5 Considerações Finais.....	128
5. Análise e Comparação dos Resultados.....	129
5.1 Exemplo 1: Palavras em um quadrilátero convexo.....	130
5.1.1 Descrição.....	130
5.1.2 Motivação.....	131

5.1.3	Resultados.....	132
5.2	Exemplo 2: Reservatório.....	138
5.2.1	Descrição.....	138
5.2.2	Motivação.....	139
5.2.3	Resultados.....	139
5.3	Exemplo 3: Cadeira.....	143
5.3.1	Descrição.....	143
5.3.2	Motivação.....	144
5.3.3	Resultados.....	144
5.4	Exemplo 4: Árvore de natal.....	150
5.4.1	Descrição.....	150
5.4.2	Motivação.....	151
5.4.3	Resultados.....	151
5.5	Considerações Finais.....	158
6.	Conclusão.....	159
6.1	Ponto Médio.....	159
6.2	Triquad.....	160
6.3	Ortoquad.....	160
6.4	Quadrilaterização Incremental.....	161
6.5	Trabalhos Futuros.....	162
	Bibliografia.....	163

# 1. Introdução

Nesta dissertação serão apresentadas quatro técnicas para geração de malhas quadrilaterais convexas no espaço bidimensional. Além disso, também traz os princípios necessários para geração de uma malha de quadriláteros de forma que qualquer pesquisador familiar ou não com tal geração possa ter as ferramentas necessárias para o desenvolvimento de sua própria técnica. Estes conceitos estão fragmentados ao longo de diversos trabalhos científicos e este autor tentou reunir os mais relevantes para solucionar o problema.

Essa dissertação começa com uma breve introdução do trabalho realizado, com a apresentação dos conceitos necessários para se construir uma malha e compreender o problema que é proposto. Em seguida, é oferecida uma revisão bibliográfica contendo os trabalhos de outros autores que foram usados para o desenvolvimento desta dissertação.

É importante esclarecer e reforçar desde já que o trabalho limitou-se ao processo de tesselação em duas dimensões e, embora os quadriláteros possuam equivalentes em dimensões superiores, uma quadrilaterização convexa de qualidade em 2D ainda é um assunto pouco explorado devido a sua complexidade, e encontrar uma quadrilaterização convexa mínima é um problema NP-difícil se buracos são permitidos (54, 64). As técnicas de quadrilaterização existentes normalmente exigem uma triangulação, mas nem toda triangulação garante uma quadrilaterização posterior. São poucos os métodos que garantem uma quadrilaterização convexa, isto é, sem elementos côncavos, dentre os métodos que produzem uma quadrilaterização de forma direta, sem uma triangulação.

São propostas então quatro técnicas de tesselação do espaço bidimensional, as quais serão postas em comparação e análise segundo critérios de topologia e geometria. Como não existe uma regra para realizar tal comparação e análise, ou um conjunto de técnicas reconhecidas para este fim, espera-se que os métodos propostos sejam adequados e sugere-se que outros pesquisadores aperfeiçoem as técnicas existentes ou desenvolvam sua própria metodologia.

O trabalho encerra-se com a aplicação das técnicas propostas em exemplos reais ou próximos da realidade para geração de malhas quadrilaterais em reservatórios naturais com a presença de falhas estruturais e estratigráficas que são um dos desafios mais atuais ao lidar com modelagem do subsolo.

Embora já existam diversas técnicas de quadrilaterização, a maioria possui limitações e não podem ser aplicadas de forma genérica sem modificações significativas ao algoritmo original. Todas as técnicas modificadas ou desenvolvidas neste trabalho, portanto, buscam ser o mais abrangente possível. São oferecidas ainda propostas para melhorias futuras a serem realizadas nas técnicas exibidas. O

anexo A descreve um novo método de construção do Eixo Médio. O método foi desenvolvido por este autor em sua busca por um método de quadrilaterização livre de testes de intersecção de elementos.

Quando se trabalha com triângulos como elemento base para geração de malhas, é possível ter certo grau de descuido na geração da malha, pois desde que sejam adicionadas diagonais que não se cruzem e internas ao domínio obtem-se uma triangulação. O normal, contudo, é usar algum critério de forma a obter uma triangulação de qualidade. Na geração de malhas de quadriláteros isso não é facilmente conseguido, pois só a adição de diagonais não garante uma quadrilaterização, pois normalmente é preciso inserir vértices novos no domínio, chamados de vértices de Steiner. Sem adotar um critério de qualidade e inserindo novos vértices a quadrilaterização pode não ser alcançada. Além disso, no caso de uma quadrilaterização convexa, dependendo dos quadriláteros utilizados, pode-se chegar a um *loop* (ciclo de repetição) infinito. A Figura 1.1 apresenta um exemplo de triangulação e quadrilaterização convexa de um domínio. Não há como quadrilaterizar convexamente a estrela (Figura 1.1) sem a inserção de um ponto de Steiner.

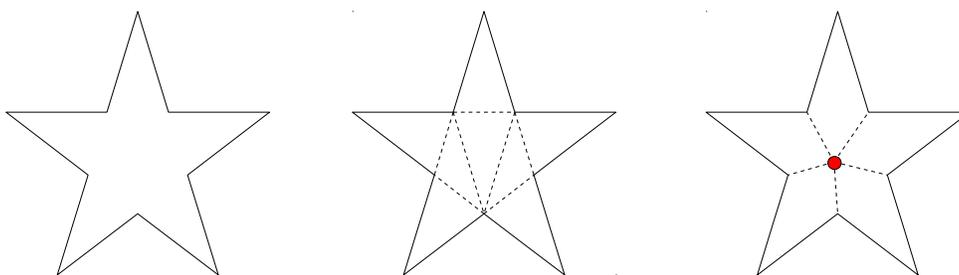


Figura 1.1: Triangulação de uma estrela com diagonais e quadrilaterização convexa com um vértice de Steiner.

Espera-se que este trabalho torne evidente e clara esta diferença essencial entre triangulação e quadrilaterização, mas que também apresente os requisitos necessários para clarificar o processo de formação de uma malha quadrilateral.

## 1.1 Contexto

Um dos objetivos desse trabalho, além do desenvolvimento de técnicas de geração de malhas quadrilaterais, é a sua aplicação a problemas de reservatórios. Por isso, após o desenvolvimento das técnicas, é realizado um teste com um exemplo real e um virtual de reservatório. É essencial descrever o contexto em que os testes de construção de malha se realizarão para que seja possível fornecer algum conhecimento ao leitor sobre o assunto e uma visão de sua utilidade. Esta abordagem não é única, mas exemplifica as fórmulas e os algoritmos apresentados nesta dissertação.



Figura 1.2: thumper truck.



Figura 1.3: geophone.

Para coletar dados do subsolo terrestre, antigamente, usava-se dinamite, mas hoje em dia, um dos métodos atuais utilizados é o caminhão batedor - *thumper truck* (Figura 1.2) posicionado estrategicamente na região a ser mapeada, eleva um grande peso a uma altura de 2.7 à 3.04 m e em seguida derruba-o no chão uma ou mais vezes, o que causa ondas de som (sísmicas) que percorrem o subsolo terrestre. Ao longo da região que irá ser modelada no computador são distribuídos *geophones* (Figura 1.3), pequenos sensores capazes de captar energia sísmica e armazená-la quando é refletida de volta à superfície ao se colidir com algum elemento do subsolo. Também existe um processo similar para a coleta de dados sísmicos nos oceanos em navios com armas de ar comprimido (Figura 1.5). Tais armas produzem uma explosão a qual resulta em ondas sonoras que percorrerão o subsolo marinho e posteriormente serão captadas pelos *hydrophones* (Figura 1.4).

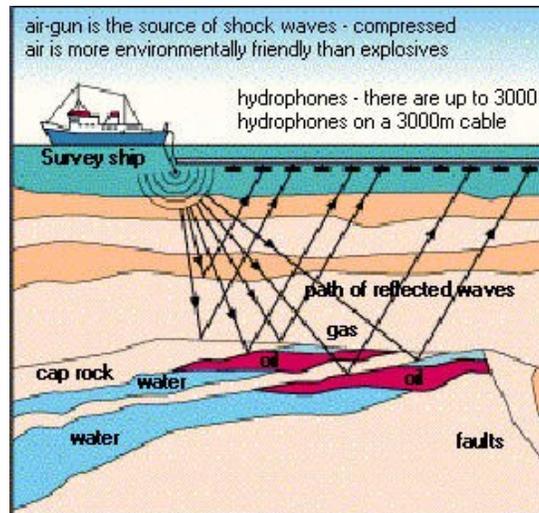
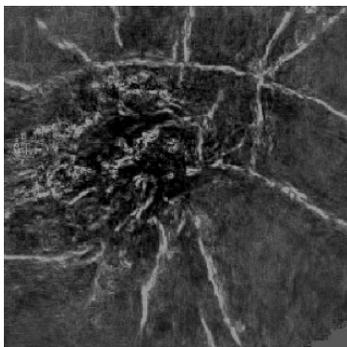


Figura 1.4: Processo de captura do modelo do subsolo no oceano.



Figura 1.5: Duas airguns usadas no processo de captura sísmica nos oceanos.

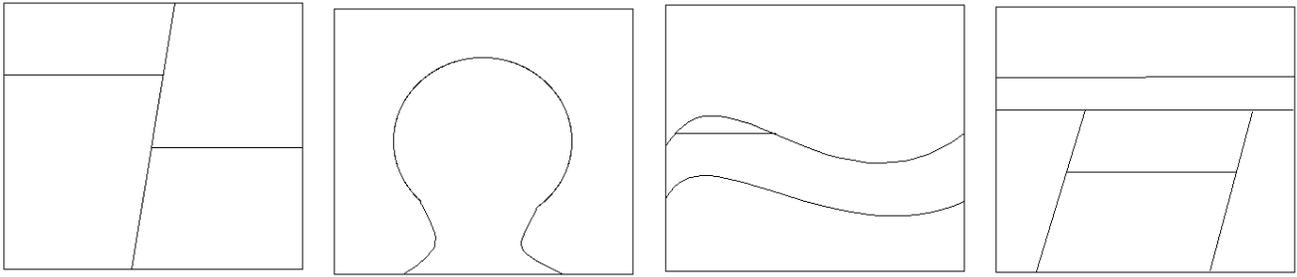
Uma vez que se tenha o dado volumétrico, que se trata de um conjunto de amplitudes sísmicas (Figura 1.6), deve-se decidir como representar este dado de forma digital. Embora que para análise de algumas áreas seja relevante o volume completo, para construir um modelo digital para simulações de fluídos, por exemplo, é interessante que possam ser feitas simplificações, de forma a reduzir a discretização do volume. Normalmente, isto é feito por geólogos que possam identificar falhas, horizontes e outros elementos do subsolo e assim destacar o que é importante manter ou não nestes dados.



*Figura 1.6: Exemplo de dado sísmico.*

Neste trabalho, posteriormente, a partir de um dado sísmico serão desenhadas linhas poligonais de forma a representar horizontes e falhas. Em seguida, será produzida uma malha que se encaixa na geometria do subsolo através de alguns dos algoritmos aqui apresentados. Normalmente este trabalho envolve a participação de um geólogo qualificado: este trabalho é, portanto, uma aproximação rústica.

Para que seja possível compreender o que se quer identificar é necessário primeiro definir o que são horizontes e falhas. Horizontes, tal qual serão usados nesta dissertação, são as fronteiras de transição entre camadas geológicas diferentes, e falhas são deformações que podem existir que afetam ou perturbam tais horizontes. Existem vários tipos de falhas, mas neste trabalho serão abordados quatro tipos apenas que podem ser classificadas como falhas estruturais e estratigráficas. Falhas estratigráficas são aquelas que decorrem de uma mudança do tipo de solo ou camada geológica. Falhas estruturais comuns são aquelas que perturbam ou alteram as camadas geológicas. As primeiras são difíceis de identificar no modelo bidimensional: logo, é mais adequado usar o modelo tridimensional para seu reconhecimento. Esta dissertação não faz uso do modelo tridimensional e, portanto, serão apresentadas apenas falhas estratigráficas simples que possam ser reconhecidas pelo modelo bidimensional. As falhas estruturais são mais facilmente reconhecidas pelo modelo bidimensional. São normalmente encontradas em representações geológicas, e correspondem a maioria dos exemplos. A Figura 1.7 exhibe os quatro tipos de falhas que serão abordadas neste trabalho.



*Figura 1.7: Da esquerda para direita: falha estrutural comum, falha estrutural: domo de sal, falha estrutural: anticline, falha estratigráfica.*

Com o final desta contextualização, espera-se que o conhecimento adquirido seja suficiente não apenas para a compreensão dos modelos que serão apresentados, como também para analisá-los sob um ponto de vista além da intuição.

## 1.2 Objetivos

Dentre os objetivos principais desta discussão destacam-se:

1. Identificar requisitos necessários para desenvolver algoritmos de tesselação quadrilateral.
2. Desenvolver técnicas de geração de malhas de quadriláteros no espaço bidimensional.
3. Comparar e analisar estas técnicas de forma a identificar suas qualidades e defeitos.
4. Aplicar as técnicas a um caso de reservatório natural para observar os resultados.

Para realizar o primeiro objetivo, apresentam-se os Capítulos 2 e 3 que esclarecerão os princípios e conteúdo acadêmico necessários para a compreensão deste trabalho abordando trabalhos relacionados e geração de malhas quadrilaterais respectivamente.

Para realizar o segundo objetivo, apresenta-se o Capítulo 4 que traz quatro técnicas desenvolvidas ou modificadas por este autor para obter malhas quadrilaterais convexas em um domínio o mais abrangente possível com a possível existência de linhas poligonais ou buracos de acordo com o caso.

Para realizar o terceiro objetivo, apresenta-se o Capítulo 5 que comparará e analisará as técnicas expostas no Capítulo 4, apontando as singularidades de cada técnica, exibindo gráficos e exemplos sempre que possível para demonstrar sua eficácia.

Finalmente, para realizar o último objetivo, apresenta-se o Capítulo 5 onde serão aplicadas técnicas já capazes de lidar com reservatórios, e os resultados obtidos são observados segundo critérios de topologia e geometria.

## 2. Trabalhos Relacionados

### 2.1 Introdução

A seguir, são apresentadas as etapas de desenvolvimento como ocorreu o desenvolvimento das técnicas de quadrilaterização, isto é, a geração de malhas com elementos quadrilaterais. O processo parte do Teorema da galeria de arte até chegar nas técnicas mais recentes. São apresentados os métodos de geração, classificados divididos em metodologia direta e indireta, e alguns estudos feitos ao longo dos anos sobre os ângulos dos elementos e a inserção de pontos de Steiner.

### 2.2 Desenvolvimento

Os estudos para construção de uma primeira subdivisão espacial em polígonos quaisquer podem ser em parte atribuídos ao surgimento do Teorema da galeria de arte, criado por Václav Chvátal em 1975 (27). Para compreender este teorema é necessário algumas definições: vigilantes são vértices que podem se localizar em qualquer local no interior do polígono; guardar é usado para determinar qual é o campo de visão de um vértice; e os termos suficiente e necessário usados juntos quer dizer equivalência. O teorema da galeria de arte determina, então, que pelo menos  $\lfloor n/3 \rfloor$  vigilantes são sempre suficientes e algumas vezes necessários para guardar um polígono simples com  $n$  vértices. A Figura 2.1 exibe um exemplo de aplicação do teorema de Chvátal sobre um hexágono. Este teorema fala em essência sobre triangulações e, com pequenas modificações, pode ser usado para provar que qualquer polígono pode ser triangularizado. Apesar do que diz Chvátal sobre vértices vigilantes, qualquer figura convexa precisa de um vigilante, mesmo que apresente o resultado de  $\lfloor n/3 \rfloor$  menor que um. Já Kahn em 1983 (49), com base no Teorema da galeria de arte, afirma que qualquer polígono ortogonal pode ser quadrilaterizado convexamente. Em seu teorema Kahn determina que pelo menos  $\lfloor n/4 \rfloor$  guardas são sempre suficientes e algumas vezes necessários para guardar um polígono com  $n$  vértices, cujos lados adjacentes sempre formam ângulos retos. Este é um dos primeiros dos passos importantes na busca de uma técnica de quadrilaterização convexa eficiente.

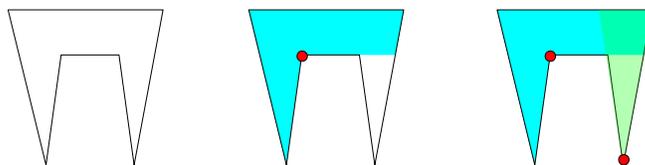


Figura 2.1: São necessários pelo menos  $\lfloor 6/3 \rfloor$  vigilantes para guardar um hexágono qualquer.

Um dos primeiros e mais importantes corolários foi obtido a partir desse teorema que é o fato de que todo polígono ortogonal possui um número par de vértices. Conforme foi provado posteriormente por Posenjit (20), um polígono só admite uma quadrilaterização, seja ela convexa ou não, se este possuir um número par de vértices. Um outro resultado importante a ser mencionado é que se este polígono ortogonal possuir buracos, não é necessariamente verdade que exista uma quadrilaterização convexa. Para Lubiw (54), determinar a possibilidade de construir esta quadrilaterização convexa é um problema NP-Completo, ou seja, não é possível determinar se existe um algoritmo que diga se é possível ou não quadrilaterizar convexamente esta região em tempo polinomial.

O ângulo desempenha importante papel em uma quadrilaterização, e um dos primeiros pesquisadores a estudar isto foi Babuska (9) o qual provou que em uma triangulação o importante não é o ângulo mínimo, mas sim o ângulo máximo. Acredita-se que esta condição também seja similar para uma quadrilaterização. Bishop (13) provou que qualquer polígono planar pode ser segmentado por  $O(n)$  quadriláteros com ângulos limitados entre  $(45^\circ - \epsilon)$  e  $(135^\circ + \epsilon)$ , e depois Marshall Bern (11) conseguiu reduzir o limite superior do ângulo máximo para  $120^\circ$  usando *Circle-packing*, porém sem definir um limite inferior para os elementos da malha. *Circle-packing* é um teorema que define como preencher um domínio com círculos que se tangenciam e não se sobrepõem normalmente.

Parece natural, já que uma triangulação sempre existe para polígonos sem buracos (28), tentar construir quadrilaterizações a partir de triangulações. E de fato a maioria dos métodos desenvolvidos por pesquisadores utiliza-se de métodos indiretos, partindo-se de uma triangulação existente, para tentar gerar uma malha de quadriláteros. Conforme Mark de Berg já demonstrou em 1992 segundo Everett (36), com a adição de  $O(n)$  pontos de Steiner (23) é possível quadrilaterizar convexamente qualquer triangulação.

Posteriormente, Bremner (24) determina em seu artigo um limite inferior e superior para adição de pontos de Steiner de forma a obter uma quadrilaterização convexa. Bremner prova (23) que com a adição de no máximo três pontos de Steiner é possível quadrilaterizar convexamente um hexágono qualquer. Randrianarivony em 2006 (55) reforça a teoria de Bremner com sua técnica. Com este

resultado é possível criar um segundo método para quadrilaterização, unindo triângulos aos pares para tentar formar quadriláteros. Ao unirem-se, então, quadriláteros côncavos com seus quadriláteros vizinhos obtêm-se hexágonos que podem ser, por fim, quadrilaterizados convexamente conforme o método de Randrianarivony (55). Para alguns casos, contudo, pode ser necessário realizar uma inversão nas arestas de triângulos vizinhos. A Figura 2.2 exibe um exemplo de triangulação que é necessário realizar uma inversão de arestas para obter-se uma quadrilaterização.

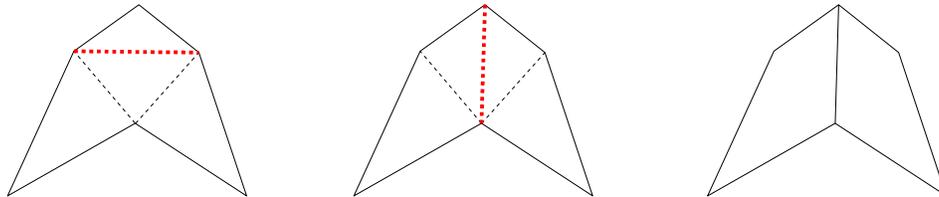


Figura 2.2: Inversão de arestas para poder unir triângulos aos pares.

Ramaswami, 1998 (67), já estudou mais a fundo como converter triangulações em quadrilaterizações. E diversas técnicas existem com este fim. Uma das técnicas sugeridas por Zhou (62) desenvolve uma malha a partir de uma modificação no algoritmo de Delaunay; outra técnica, o *Q-Morph* ou *Quad-Morphing*, desenvolvido por Owen (48), une dois ou mais triângulos ( não há limite para o número de triângulos) e aplica *smoothing* (suavização) para formar quadriláteros convexos. Lee (51) desenvolveu um algoritmo para gerar malhas com linhas baseado em Delaunay e *Q-Morph* (48). Itoh (43) e Borouchacki (19) estudaram esta conversão usando mapas discretos anisotrópicos, isto é, uma propriedade qualquer dos elementos que muda conforme a direção da malha. Yamakawa e Shimada (90) criaram uma técnica de conversão através do preenchimento do domínio por meio de bolhas. Estas bolhas são usadas para construir uma quadrilaterização. Contudo, conforme é demonstrado por Lai (44) e Schumaker (45), existem vantagens que podem ser obtidas apenas ao se começar com uma quadrilaterização e não uma triangulação. Isto serve como estímulo para o desenvolvimento de métodos diretos, sem uma triangulação prévia, para geração de uma malha de quadriláteros.

O *Paving*, desenvolvido por Blacker em 1991 (15), é uma das primeiras técnicas neste sentido. É um dos métodos mais usuais para geração de uma malha de quadriláteros em que uma fila de quadriláteros é criada na fronteira do polígono, incrementalmente, até ser preenchida toda a região delimitada por ele. Cass (25), White (72) e Staten (79) fizeram várias melhorias neste método ao longo dos anos, e, recentemente, um trabalho de doutorado por Roca (70) defendeu a idéia de que ele seria um bom caminho para uma hexaedralização.

Outros trabalhos incluem o método de *Bubble mesh*, desenvolvido por Kenji Shimada (76, 77, 89, 90), em que é preenchida uma região com células quadrilaterais (originalmente círculos), aplicando-se forças de atração e repulsão entre as células e buscando construir uma quadrilateração por meio do método de Runge Kutta de 4ª ordem; e o método chamado de Laytracks, desenvolvido por Quadros (71), que tenta utilizar o eixo médio desenvolvido por Blumm (17) como elemento guia para uma quadrilateração convexa. No método de Laytracks, o eixo médio é usado como um reflexo de pontos da fronteira, os vértices da malha são projetados em locus distintos do polígono, e, desta maneira, define um caminho que será preenchido com quadriláteros. Marshall (11) desenvolve quatro métodos para quadrilaterização convexa usando *Circle-packing*. Prosenjit (20, 22) utiliza-se do algoritmo de *Onion Peeling* para construir uma quadrilaterização que pode ser convexa. *Onion Peeling*, tradicionalmente, é uma forma de triangulação para uma nuvem de pontos qualquer em que, antes de ser realizada a adição de diagonais, determinam-se vários fechos convexos em uma figura, um interno ao outro sucessivamente (semelhante a uma cebola). Ou uma segunda alternativa é a criação de uma linha poligonal única que começa a partir do fecho convexo e termina no último vértice mais interno a um domínio. No primeiro caso de *onion peeling*, toda vez que um fecho convexo é determinado, os pontos pertencentes ao fecho são removidos do domínio e um novo fecho convexo é computado sucessivamente. No segundo caso de *onion peeling*, escolhe-se um vértice de origem no fecho convexo, e conforme as arestas do fecho são adicionadas o vértice de origem anterior é removido do domínio. A Figura 2.3 exibe os dois possíveis resultados para o algoritmo de *onion peeling*.

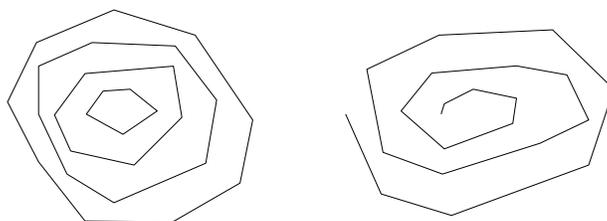


Figura 2.3: Exemplo de resultado do algoritmo de *onion peeling*: primeiro caso à esquerda, e segundo caso à direita.

*Quadrees* discutida por Samet (73) e *marching squares* (ou *marching cubes*) por Lorensen (35) também são usados para realizar uma quadrilaterização. Essas estruturas de dados, originalmente desenvolvidas para visualização volumétrica, podem ser vistas como uma forma de tentar ortogonalizar um polígono qualquer e assim permitir uma quadrilaterização convexa, conforme Atalay (7) e Liang (52). Estas técnicas tendem a gerar bons elementos nas regiões internas do domínio, mas elementos muito ruins nas fronteiras.

Trabalhos posteriores como os de Liang (52) e Lizier (6) buscam quadrilaterizar um domínio usando *templates*, isto é, quadrilaterizações convexas pré-definidas de formas conhecidas, para construir quadrilaterizações convexas de polígonos arbitrários. Além dos autores mencionados, Hannemann (60) também versou sobre o assunto. Já outros autores utilizam-se de funções harmônicas, tais como Dong (32) e Tong (81); equação do calor, como por exemplo Egidi (33); ou Laplacianas, a saber como Dong (30, 31) na tentativa de gerar malhas quadrilaterais de qualidade.

Barry Joe (46) demonstrou que construir uma malha de quadriláteros de boa qualidade é mais difícil que construir uma malha de triângulos de boa qualidade. Contudo, segundo Lai (44), construir uma quadrilaterização por método direto é mais vantajoso geometricamente. Inspirado por estes fatores, alguns pesquisadores como Marinov (57), Tchon (80), Lai (50) e Zadavec (92) já estudam a construção de malhas *quad-dominant*, isto é, malhas em que a maioria de seus elementos são quadriláteros, mas que podem possuir elementos triangulares ou outros polígonos.

Com este relaxamento na definição de malha, gerar malhas para quaisquer polígonos se torna mais fácil, mas a eficácia de tal método, no momento, ainda precisa ser verificada. Estes trabalhos talvez também possam ser relacionados aos estudos de Asano (3, 4) que em 1983 propôs um método de trapezoidalização, que é a decomposição de polígonos quaisquer em trapézios, em que um triângulo é considerado como um trapézio degenerado e um de seus lados paralelos tem comprimento zero. A trapezoidalização de Tetsuo Asano, contudo, não era usada como fim, e sim como um meio para se obter uma triangulação. As vantagens de se usar uma malha de quadriláteros ao invés de uma malha triangular já foram bastante discutidas em diversos artigos de Prosenjit (20), Ramaswami (67), Maharavo (56) e Atalay (7), o que justifica e reforça a busca por novas técnicas de quadrilaterização convexa direta.

Existem ainda diversos tipos de malhas quadrilaterais conforme explicado por Hales (12), porém, neste seu trabalho, as malhas de *Corner Point* são o seu foco, pois, são o padrão atual da indústria para geração de malhas que representam o subsolo terrestre. Malhas de *Corner Point* são aquelas cujos elementos quadrilaterais são livres de formato pré-definido. O padrão adotado anteriormente, quer dizer, as malhas Cartesianas, as quais foram apresentadas inicialmente por Goldthorpe (40), possuem topologia implícita e elementos uniformes. Ainda que não seja abordado nesta dissertação, é importante salientar a existência de outras malhas que também são objeto de pesquisa da indústria atual, que é o caso das malhas de PEBI (definidas por bissetores perpendiculares) (12) ou de Voronoi e as malhas curvilíneas (12) que são compostas por elementos quadrilaterais com curvas ao invés de segmentos de reta para definir seus lados.

Neste trabalho são apresentadas quatro técnicas para geração de malha chamadas de ponto

médio, ortogon, triquad e quadrilateração incremental, que são baseadas respectivamente em: Catmull-Clark (34), com o uso do baricentro de elementos convexos; Quadros (71), em que a projeção de pontos através do eixo médio conduz à criação de regiões que posteriormente geram uma quadrilateração convexa; Mark de Berg (36), que produz uma triangulação anterior a uma quadrilateração; e Maharavo (56), que usa uma técnica de decomposição de quadriláteros baseada no teorema de Meisters (41), o qual determina que todo polígono possui pelo menos dois ângulos convexos (duas orelhas). Como foi mencionado, um dos elementos chave para realizar uma quadrilateração é a adição de pontos de Steiner em um polígono qualquer, e de fato para alguns domínios é impossível realizar uma quadrilateração convexa sem a adição de pontos de Steiner (Figura 2.4).

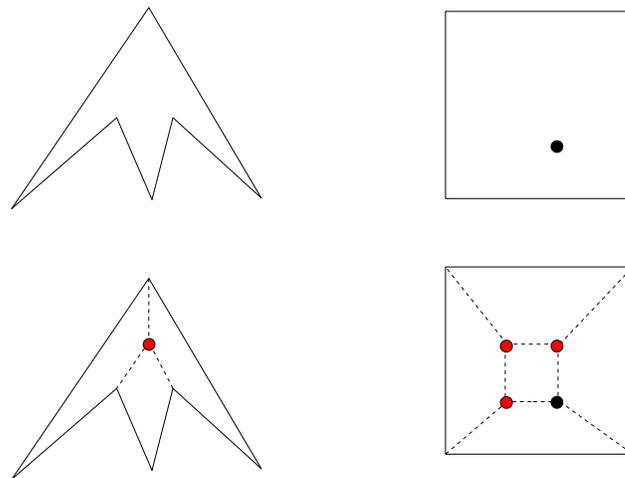


Figura 2.4: Domínios para os quais não existe quadrilateração convexa sem a adição de vértices (em vermelho).

É apresentada uma técnica para a construção do eixo médio, desenvolvida inicialmente por Blumm (17) (anexo A), que foi usada como base para a construção de uma das técnicas de quadrilateração propostas nessa dissertação. O eixo médio é obtido através da união dos centros de vários círculos máximos tangentes e internos ao domínio, e é uma informação a mais que pode ser obtida através do polígono. Como o eixo médio pode ser curvo, uma simplificação do eixo médio definida por Aichholzer (1) como *Straight skeleton* é utilizada. A dita simplificação é similar ao eixo médio porém, é composta por segmentos de reta.

Por fim é importante esclarecer que nem todas as técnicas de quadrilateração existentes produzem uma saída convexa, já que muitos algoritmos são baseados em heurísticas. Como os

algoritmos de Posenjit (20) e Wolfenbarger (87) e alguns algoritmos não tratam casos de polígonos com vértices formando ângulos de  $180^\circ$ , alguns autores determinam os elementos retornados pelo seu algoritmo como estritamente quadriláteros ou estritamente convexos como Everett (36), Muller (61) ou Bremner (24), isto é, que todos os vértices estão em posição genérica (sem possuir três vértices alinhados no espaço). Todos os métodos apresentados nessa dissertação estão preparados para lidar com quadrilaterizações não estritas e convexas de polígonos quaisquer.

## 2.3 Considerações Finais

Neste capítulo foram observados alguns conceitos iniciais sobre quadrilaterização que serão desenvolvidos ao longo dessa dissertação, inclusive sua terminologia. São citadas as técnicas de quadrilaterização mais comuns existentes, e seus autores. É importante que desde já se comece a observar quais são os requisitos necessários para realizar uma quadrilaterização e como os pontos de Steiner são essenciais para uma quadrilaterização convexa de qualidade. E é isto que será desenvolvido no próximo capítulo. Finalmente, é importante ressaltar que o objetivo principal é tentar obter elementos convexos e isso em geral atende a todas as áreas que necessitam de técnicas de geração de quadriláteros, indo desde a área de Computação Gráfica até as Engenharias, onde o que se deseja primordialmente são elementos mais próximos do regular possível.

### 3. Malhas de Quadriláteros

Neste capítulo é desenvolvida a teoria necessária para a construção de uma malha de quadriláteros. É fornecida a classificação das malhas, os requisitos para a construção de uma malha, e a classificação das metodologias de tal construção. Para se compreender o que é uma malha de quadriláteros, são inicialmente apresentados conceitos de quadriláteros e em seguida de malhas.

#### 3.1 Definição

Para começar a entender uma malha quadrilateral, é necessário entender como ela é formada dentro do espaço bidimensional. Este espaço é definido através do produto cartesiano do conjunto de números reais com ele mesmo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Uma localização neste espaço é feita através de um vértice, ou seja, um ponto. Vértice é um par de coordenadas por exemplo  $(x, y)$  no espaço tal que  $x, y \in \mathbb{R}$ . A união de pontos ou vértices é uma reta. Têm-se dois vértices quaisquer não idênticos  $a$  e  $b$ , se existe uma reta entre  $a$  e  $b$  no espaço bidimensional, então o par  $(a, b)$  corresponde a um lado, também chamado de segmento ou aresta. Polígono é uma palavra que advém do grego e significa vários lados, isto é, um polígono deve ter pelo menos dois lados e três vértices. Se  $a, b$  e  $c$  são vértices, então  $C = \langle a, b, c, a \rangle$  é um ciclo, desde que exista um conjunto  $S$  de segmentos entre dois vértices consecutivos no ciclo  $C$ , tal que  $S = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ . A cardinalidade de um conjunto é a quantidade de elementos que ele contém; logo a cardinalidade de  $S$  é igual a três. Chama-se um polígono de fechado quando os seus vértices formam um ciclo, e de aberto em caso contrário (Figura 3.1). A partir de agora ciclo e elemento, nesta dissertação, são usados como sinônimos de polígono fechado e simples; logo, não é incluído o último vértice na sequência de um ciclo, apesar do conjunto de segmentos associado a cada ciclo continuar o mesmo. No caso anterior,  $C = \langle a, b, c \rangle$  é um ciclo e  $S$  permanece inalterado.

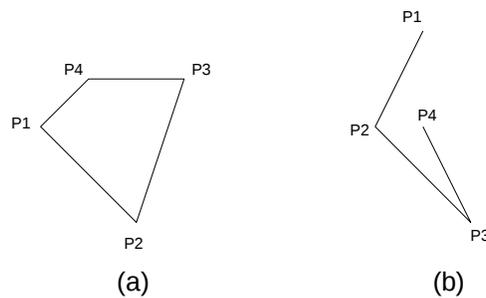


Figura 3.1: Exemplo de polígonos: (a) fechado, e (b) aberto.

Um polígono é dito simples quando seus segmentos não interceptam nenhum outro segmento pertencente ao seu domínio. Caso contrário, esse polígono é chamado de complexo. A Figura 3.2 mostra exemplos de polígonos simples e complexos.

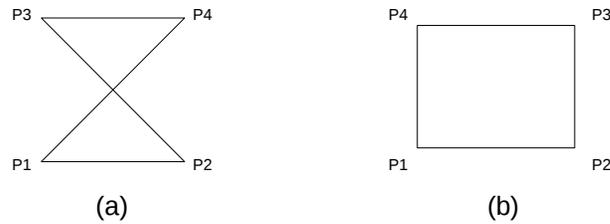


Figura 3.2: Exemplo de polígonos fechados: (a) complexo, e (b) simples.

Quadrilátero é um polígono fechado e simples com quatro lados. Um quadrilátero também pode ser compreendido como uma curva de Jordan que define dois espaços: um interno e outro externo ao ciclo formado pela curva. Uma curva é uma união de segmentos limitados por dois vértices.

Um quadrilátero ainda pode ser chamado de tetrágono, como sinônimo de quadrilátero, ou chamado de quadrângulo para indicar que ele é o polígono que possui quatro ângulos. Quadrângulo e quadrilátero são os termos mais comuns na literatura científica, e podem ser usados como sinônimos apenas quando tratam-se com polígonos fechados, como é o caso neste trabalho.

Todo quadrilátero é formado por ângulos. Ângulo é o quociente do arco entre dois segmentos consecutivos e o raio do círculo com centro no vértice comum entre eles, isto é,  $\theta = \frac{s}{r}$ . A Figura 3.3 caracteriza a definição de ângulo.

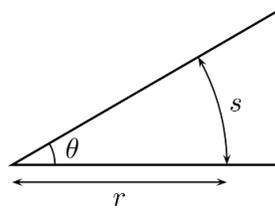


Figura 3.3: Definição de ângulo.

Classificam-se ângulos como convexos caso eles sejam menores que  $180^\circ$  (leia-se cento e oitenta graus, onde grau é a unidade de medida para ângulos); rasos, se eles forem iguais a  $180^\circ$ ; e côncavos, caso eles sejam maiores que  $180^\circ$ .

Com a definição de ângulos e sua classificação, é possível definir o que são quadriláteros côncavos e convexos. Quadrilátero côncavo é todo aquele que possui pelo menos um ângulo côncavo e quadrilátero convexo é aquele em que todos seus ângulos são convexos. A Figura 3.4 exhibe exemplos de quadrângulos convexos e côncavos. Lembrando que pela definição adotada nesta dissertação, todos os quadriláteros de interesse são fechados e simples.

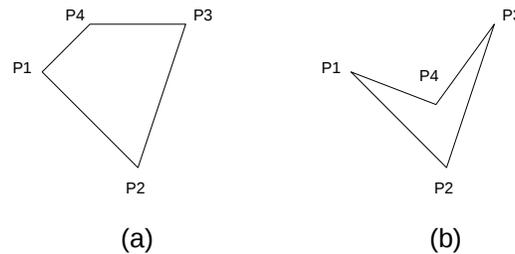


Figura 3.4: Exemplo de quadrângulos: (a) convexo, e (b) côncavo.

Resta definir o que é uma malha. Malha pode ser definida simplesmente como um conjunto de polígonos quaisquer não sobrepostos e sem espaços vazios entre eles. De forma mais formal, em um espaço  $R^n$  qualquer, assume-se que existe um ciclo com  $n$  vértices  $P = \langle v^1, v^2, \dots, v^{n-1}, v^n \rangle$ : uma malha é uma tesselação deste espaço em ciclos menores  $C^{i,j} = \langle v^i, v^{i+1}, \dots, v^{j-1}, v^j \rangle$  em que  $1 < i, j < n$  e  $j - i \geq 3$ , tal que em dois ciclos quaisquer  $C^{i,j}$  e  $C^{m,n}$  que formam a malha ou  $m > j$  ou  $n < i$  e  $P = C^{1,a} \cup C^{b,c} \cup \dots \cup C^{i,n}$ . Um ciclo com  $m$  vértices é dito par (ímpar) quando  $m$  é par (ímpar). Por fim, uma malha, para o caso bidimensional, é uma partição do espaço Cartesiano em quadriláteros convexos. A Figura 3.5 exhibe exemplos de malhas. Curiosamente, as abelhas são o inseto que mais se aproximam de construir uma quadrilaterização natural do espaço, pois qualquer hexagonalização pode ser quadrilaterizada; e o olho da lagosta é formado por uma malha quadrilateral perfeita.



(a)



(b)

Figura 3.5: Exemplos de malhas: natural à esquerda (uma colmeia, retirando-se de uma lâmina conjunto de hexágonos que particionam o espaço), artificial à direita (a pavimentação de uma calçada, onde um conjunto de elementos curvilíneos

*particionam o espaço).*

Malhas podem ser classificadas como estruturadas ou não estruturadas, que possuem respectivamente topologia implícita e explícita. Topologia estuda as relações e propriedades entre os elementos, sem o uso de suas dimensões. Como por exemplo, o conhecimento dos vizinhos de cada elemento nas malhas estruturadas é feita de forma que não depende do armazenamento ou existência desta informação, enquanto que nas não estruturadas é necessário armazenar ou calcular estas informações. Exemplos de malhas estruturadas são as Cartesianas, curvilíneas ou ortogonais e de não estruturadas, a malha de Voronoi ou Delaunay. A Figura 3.6 exhibe exemplos de malhas estruturadas e não estruturadas.

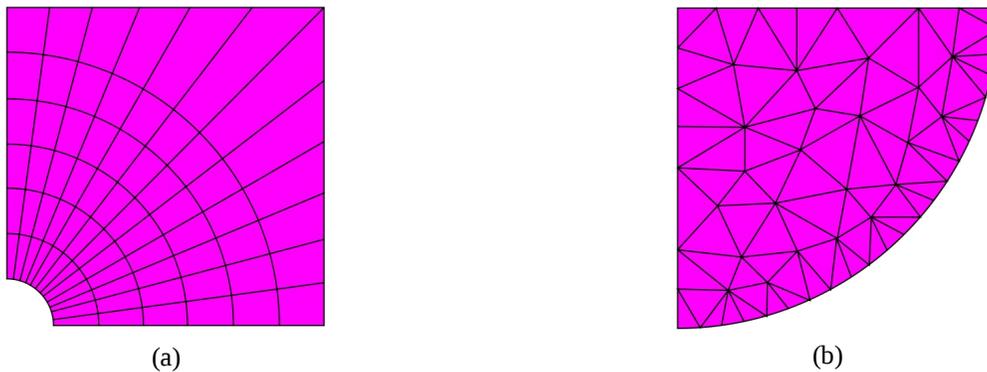


Figura 3.6: Tipos de malha: (a) estruturada (curvilínea), (b) não estruturada (Delaunay).

Ainda existe um terceiro tipo de malha que vale a pena ser mencionado chamado de malha mista, que combina malhas estruturadas e não estruturadas. Exemplos deste tipo de malha são as malhas hierárquicas e as malhas multi-bloco. Basicamente, cada região do espaço é particionada seguindo uma malha estruturada ou não, de acordo com a situação, de forma que a união destas malhas forma a tesselação completa do domínio. Domínio é um o conjunto de elementos ou restrições que definem a região do espaço  $R^n$  qualquer na qual será realizado a construção da malha.

## 3.2 Requisitos

Nesta seção são analisados alguns requisitos que são necessários ou suficientes para determinar uma quadrilateralização, isto é, a geração de malha formada por elementos quadriláteros. Um dos primeiros

requisitos é a prova de Kahn que determina que qualquer polígono ortogonal pode ser quadrilaterizado convexamente (49). Um polígono ortogonal é aquele em que todos os seus lados ou arestas são perpendiculares ou paralelos a um eixo de coordenada do plano Cartesiano (abscissa ou ordenada), isto é, todos os seus ângulos são múltiplos de  $90^\circ$ . Um polígono ortogonal também pode ser chamado de polígono retilíneo e ambos os nomes são usados na literatura indistintamente. Para realizar sua prova, Kahn cria um conceito similar às orelhas de Meisters (41) chamado *tabs*. Uma *tab* é simplesmente dois segmentos horizontais conectados por um segmento vertical. A Figura 3.7 exhibe um exemplo de uma *tab*. Para realizar uma redução para uma quadrilaterização convexa, é necessário definir três propriedades que são inerentes a todo polígono ortogonal: uma boa *tab*, um par de lados que não forma uma *tab* e um par de *tabs* (*up* e *down*). A Figura 3.8 exemplifica os três casos.



Figura 3.7: Exemplo de uma *tab*.

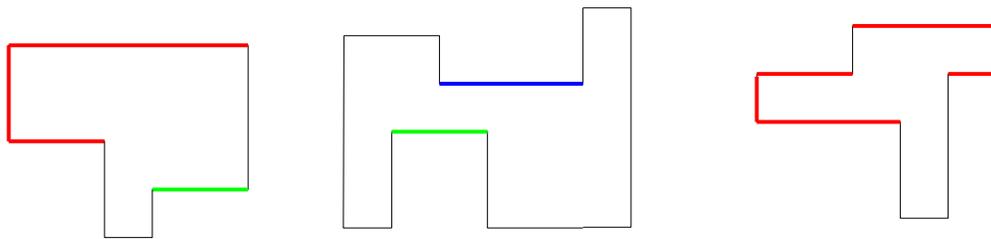


Figura 3.8: Exemplos (da esquerda para direita): uma boa *tab*, um par de lados que não forma uma *tab* e um par de *tabs*. Em vermelho têm-se *tabs*, em verde segmento inferior e em azul segmento superior.

Antes de definir estas três propriedades, é importante algumas definições. Um segmento inferior é aquele cujo interior do polígono está acima dele, e um segmento superior é aquele cujo interior do polígono está abaixo dele. Uma *up tab* é aquela cujo segmento horizontal inferior é maior que o segmento horizontal superior, e uma *down tab* é aquela cujo segmento horizontal superior é maior que o segmento horizontal inferior.

Agora, já é possível definir as três propriedades de um polígono ortogonal:

**Um par de lados que não forma uma *tab*** é aquele não possui um segmento vertical que

conecta um segmento superior a um segmento inferior.

**Uma boa *tab*** é aquela que o segmento vertical, em frente ao segmento vertical que a compõe (é possível disparar um raio horizontal sem cruzar o polígono até a *tab*), está conectado no seu extremo inferior a um segmento horizontal inferior se for uma *down tab* ou seu extremo superior está conectado a um segmento horizontal superior se for uma *up tab*.

**Um par de *tabs*** são aquelas que seriam *tabs* ruins se o segmento vertical em frente a cada uma delas não estivesse conectado a uma *down tab* no seu extremo superior no caso de uma *up tab*, ou não estivesse conectado a um *up tab* no seu extremo inferior no caso de uma *down tab*.

Com estas três propriedades é possível desenvolver técnicas de quadrilaterização para polígonos arbitrários desde que se consiga ortogonalizar o domínio através de algum tipo de pré-processamento ou então como parte do desenvolvimento de um algoritmo.

É importante ressaltar que, embora não seja propriamente um requisito, a quadrilaterização convexa de um domínio não é única (Figura 3.9) e de fato já foi provado que descobrir a mínima quadrilaterização convexa estrita de um domínio pode ser feita em tempo polinomial (61), enquanto que quando forem adicionados buracos o problema se torna NP-difícil (54). Esse problema é também chamado de *minimum ink* (tinta mínima para desenhar os quadriláteros) ou peso mínimo, em que a soma dos comprimentos dos segmentos que formam uma quadrilaterização deve ser mínima.

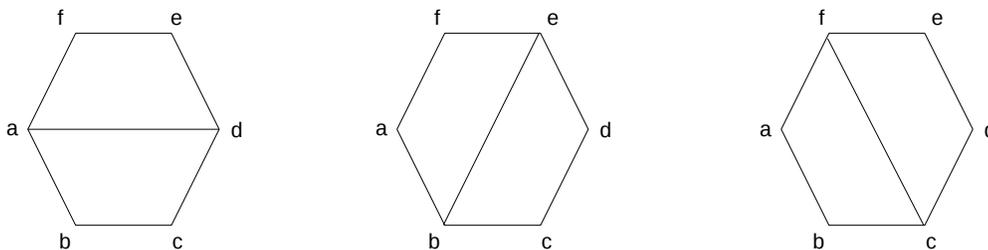


Figura 3.9: Existem três maneiras distintas para quadrilaterizar um hexágono convexo sem a adição de Pontos de Steiner.

Uma outra propriedade importante de todo polígono se chama fronteira. Fronteira é o polígono fechado simples que separa o espaço particionado do espaço não particionado, sem a região externa de um polígono. Em outras palavras, a região do domínio original sobre a qual ainda não foi construída uma malha. A Figura 3.10 exibe o que é uma fronteira para um domínio.

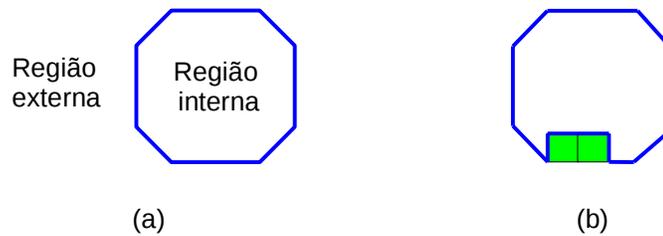


Figura 3.10: Exemplo de fronteiras em azul: (a) regiões em uma fronteira, e (b) uma malha é construída em verde.

Um dos requisitos mais importantes para determinar uma quadrilaterização qualquer, seja ela convexa ou não, é a existência de um número par de vértices no polígono. De fato Prosenjit (20) já provou que é impossível quadrilaterizar um domínio se não existir um número par de vértices na fronteira convexa. Esta propriedade deve ser mantida e verificada a todos os momentos, se é desejado obter uma quadrilaterização do domínio ao final.

Um dos corolários da prova de Kahn (49) determina que todo polígono ortogonal possui um número par de vértices, o que reforça este requisito. De fato, se for possível particionar um domínio em ciclos pares e convexos, é possível realizar uma quadrilaterização convexa apenas pelo uso de Diagonais (Teorema 3.1). Segue-se agora para provar este teorema.

**Teorema 3.1:** *Se um polígono  $P$  par qualquer pode ser particionado em ciclos convexos pares então ele pode ser quadrilaterizado de forma convexa pelo uso de diagonais.*

**Prova:** Como a definição de ciclo já foi introduzida no início deste capítulo, apenas algumas definições serão mencionadas. Ciclo convexo é aquele que não possui ângulos côncavos. Ciclo par é aquele cuja quantidade de vértices existentes no ciclo é par. Trivialmente, é possível observar que todo polígono possui uma quantidade ímpar de vértices,  $i = 2n + 1$  ou  $i = 2n - 1$ , ou uma quantidade par de vértices,  $p = 2n$ . Também é fácil observar que, se é possível particionar um domínio em ciclos pares, não se iniciou de um ciclo ímpar. As fórmulas em (3.1) e (3.2) exibem a prova deste fato.

$$\begin{aligned}
 i=2t+1, \quad p=2u \quad e \quad q=2v; \quad i, p, q \in \mathbb{N} & \\
 \rightarrow i=p+q & \\
 i=2u+2v & \\
 i=2(u+v), \text{ se } u+v=x & \\
 i=2x &
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \leftarrow i &= p+q \\ 2t+1 &= p+q, \text{ se } p+q=r \\ 2t+1 &= r \end{aligned} \tag{3.2}$$

Logo, para que seja possível particionar o polígono, é necessário começar de um ciclo par na fronteira. Assume-se então que todo o polígono foi dividido em ciclos pares e convexos. Se um ciclo é convexo então qualquer diagonal adicionada a este polígono divide dois ângulos que já são menores que  $180^\circ$ , cada um em duas partes que permanecem menores que  $180^\circ$ . Diagonal é a criação de um lado entre dois vértices  $x, y$  tal que o lado  $(x, y)$  ainda não existe, de forma que não há sobreposição entre diagonais ou lados. Toda diagonal é interna ao polígono.

É possível, então, para um ciclo convexo com uma quantidade par de vértices  $p$  qualquer  $C_p = \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} \rangle$ , escolher o vértice  $x_1$ , sem perda de generalidade, pois seria possível renumerar todos os vértices para que o ciclo começasse em um vértice  $x_i \in C_p$  qualquer. A partir de  $x_1$  adicionam-se todas as diagonais,  $D = (x_1, x_j)$ , entre  $x_1$  e um vértice  $x_j$  tal que  $2 < j < 2n$ ,  $j=2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , e se duas diagonais  $(x_1, x_a)$  e  $(x_1, x_b)$  forem escolhidas tal que  $a \neq b$ , então uma quadrilaterização convexa será obtida.

Se for realizado uma triangulação deste domínio convexo, é claro que serão formados  $2n-2$  triângulos o que pode ser provado pela soma dos ângulos internos, e se os triângulos forem unidos aos pares é trivial, portanto, que serão formados  $n-1$  quadriláteros convexos. Com exceção do primeiro e último elemento desta quadrilaterização, qualquer outro quadrilátero deve ser da forma  $Q = \langle x_1, x_j, x_i, x_j \rangle$ , em que  $i = j+1$  e  $j' = j+2$  devido a regra de formação de diagonais. Se existisse qualquer outro elemento par entre  $x_j$  e  $x_{j'}$  deveria existir uma diagonal entre ele e  $x_1$ , logo,  $Q$  não deveria existir. Idem para  $i$  e  $j'$ , isto é, cada quadrilátero  $Q$  será formado por duas diagonais definindo três ângulos convexos, pois possuem um vértice em comum e um ângulo que já pertencia ao domínio, e é portanto convexo.

Os outros dois últimos casos são o primeiro  $Q_1 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$  e o último quadrilátero  $Q_{n-1} = \langle x_1, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n} \rangle$  que são formados por apenas uma diagonal; cada diagonal define dois ângulos convexos como já foi discutido, e os dois ângulos restantes pertencem ao domínio e são, portanto, convexos. Logo, estes dois quadriláteros também são convexos. Para uma região convexa e par com  $2n = 4$  é trivial a sua quadrilaterização sem o uso de diagonais. ■

Um polígono par é um polígono qualquer que possui uma quantidade de vértices par em sua fronteira. É possível, então, garantir a sua paridade desde que seja compreendido o que significa adicionar um quadrilátero ao domínio de forma a manter a paridade dos ciclos (Teorema 3.2).

**Teorema 3.2:** *Sempre que se adiciona um quadrilátero  $n$ -conexo a um domínio por qualquer, é adicionado ou removido uma quantidade par de vértices intrusos à fronteira, desde que os vértices de conexão sejam adjacentes, e vértices de conexão adjacentes definam diagonais pares.*

**Prova:** Um domínio por qualquer é um polígono que possui um número par de vértices na sua fronteira, e caso este polígono possua buracos (*holes*), a quantidade de vértices existentes nestes também é par. Um buraco não pode ter um vértice colapsado. Um vértice colapsado é um vértice que é contado pelo menos duas vezes no seu ciclo. Além disso nenhum outro vértice de Steiner é adicionado além daqueles inseridos pela inserção de um elemento quadrilátero, e nenhum elemento se sobrepõe a qualquer outro elemento já existente no domínio. Nesse contexto, zero é considerado um número par. Quando adiciona-se um quadrilátero qualquer ao domínio existem cinco casos possíveis que podem acontecer, já que um quadrilátero possui quatro vértices por definição: 0-conexo, 1-conexo, 2-conexo, 3-conexo e 4-conexo. Um quadrilátero  $n$ -conexo, portanto, é um quadrilátero simples que não sobrepõe nenhum elemento anterior e possui  $n$  vértices comuns com o domínio no qual ele é inserido. Um vértice de conexão é um vértice que o quadrilátero possui em comum com o domínio sobre o qual ele é inserido. Uma aresta de conexão é uma aresta que o quadrilátero possui em comum com o domínio no qual ela é inserida. Caso dois quadriláteros  $n$ -conexos sejam vizinhos, eles devem possuir pelo menos uma aresta em comum. Isto evita a inserção de elementos ruins, pois é possível inserir infinitos quadriláteros 1-conexo vizinhos uns aos outros. Diagonal par é um lado entre dois vértices tal que um ciclo par é formado pela adição da diagonal, e diagonal ímpar é o caso contrário (Figura 3.11). Uma diagonal ímpar sempre existe, pois no mínimo ela determina um triângulo. Um ciclo par é aquele que possui uma quantidade par de vértices. A fronteira de um domínio é um ciclo  $C$ . Se um quadrilátero  $n$ -conexo  $Q$  for adicionado a um ciclo  $C$  qualquer, então pode ocorrer a formação de vários ciclos  $C_m$  tal que  $C = \{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m\}$  e  $1 \leq m \leq 4$ . Se  $v_s$  é a quantidade de vértices de Steiner adicionada ao ciclo  $C_m$  pelo quadrilátero  $Q$ ;  $v_c$  é o somatório da quantidade de vezes que os vértices do quadrilátero  $n$ -conexo são percorridos no ciclo  $C_m$ , se eles são percorridos mais de uma vez;  $v_r$  é a quantidade de vértices que foram removidos do ciclo  $C_m$  e que fazem parte do quadrilátero  $Q$ , se for possível inserir o quadrilátero no ciclo  $C_m$ ; então  $v_i$  é um vértice intruso tal que

$$v_i = v_s - v_r + v_c, \quad (3.3)$$

$$v_s = 4 - n, \quad (3.4)$$

$$v_c = \sum_{j=1}^4 f(v_j) \text{ e} \quad (3.5)$$

$$f(v_j) = \begin{cases} u-1, & \text{se } v_j \in C_m. \\ 0, & \text{se } v_j \notin C_m. \end{cases} \quad (3.6)$$

em que  $n$  é o tipo de quadrilátero  $n$ -conexo, tal que  $0 \leq n \leq 4$ ;  $j$  é a quantidade de vértices no quadrilátero  $n$ -conexo  $Q$ ;  $v_j$  é um vértice do quadrilátero  $n$ -conexo  $Q$ ; e  $u$  é a quantidade de vezes que um vértice é percorrido no ciclo.

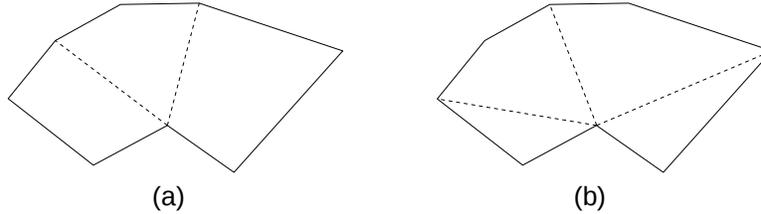


Figura 3.11: Diagonais em um ciclo: (a) Diagonais pares; e (b) Diagonais ímpares.

O caso I (0-conexo) é um caso trivial, mas citado por completude, e o caso II (1-conexo) é um caso especial, que como será visto pode ser inadequado para a construção de uma malha de qualidade. Os casos posteriores são mais facilmente encontrados em algoritmos de quadrilaterização. O caso III (2-conexo) possui 2 subcasos; o caso IV (3-conexo) possui três subcasos; e o caso V (4-conexo) possui cinco subcasos. Um quadrilátero  $n$ -conexo não precisa ser interno ao domínio, mas qualquer quadrilátero gerado externamente ao domínio é ignorado, pois não contribui para uma quadrilaterização do mesmo. Um quadrilátero  $n$ -conexo não é necessariamente convexo, apesar de que na prova a seguir ele será sempre convexo, o que não causa a perda de generalidade no Teorema 3.2, pois o seu formato de um quadrilátero não altera a quantidade de vértices intrusos final por definição. Os quadriláteros  $n$ -conexos podem inserir quantidades ímpares de vértices intrusos em um ciclo sobre determinadas condições fora do Teorema 3.2, mas estes casos são ignorados pois acredita-se que tais elementos não conduzam a uma quadrilaterização convexa de qualidade, e de fato sua inserção pode até tornar impossível obter uma quadrilaterização já que poderia tornar um ciclo ímpar. Segundo foi provado por Prosenjit (20), um ciclo convexo não pode possuir uma quantidade ímpar de vértices na fronteira para produzir uma quadrilaterização.

Caso I) Adição de um elemento desconexo (0-conexo).

Quadriláteros adicionados ao interior de um polígono sem vértices ou arestas de conexão adicionam quatro vértices de Steiner ao domínio  $v_s=4$ , todos são percorridos uma única vez  $v_c=0$ , e nenhum

vértice é removido do ciclo  $v_r=0$ , logo  $v_i=4$  segundo a Fórmula 3.3. Contudo, como não há vértice ou aresta de conexão, o ciclo da fronteira não recebeu nenhum vértice novo e portanto  $v_i=0$ . Este resultado significa que um novo ciclo foi criado internamente ao polígono, e a quantidade de vértices em ambos os ciclos é mantida par. Por fim, nenhuma diagonal é adicionada, e então as diagonais são pares por vacuidade. A Figura 3.12 exibe um exemplo de quadrilátero 0-conexo.

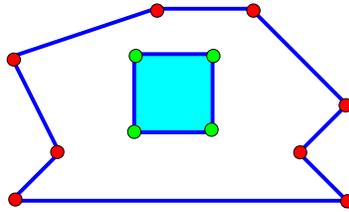


Figura 3.12: Exemplo de quadrilátero 0-conexo.

Caso II) Adição de um elemento com um vértice de conexão (1-conexo).

Neste caso, há a um vértice de conexão, e embora esteja sendo adicionado de fato três vértices de Steiner  $v_s=3$ , um dos vértices será percorridos duas vezes  $v_c=1$ , nenhum vértice é removido  $v_r=0$ , logo, quatro vértices foram adicionados  $v_i=4$  no ciclo da fronteira. É fácil perceber isto, se tentar definir um ciclo da fronteira qualquer  $C=\langle a, b, c, d, e, f, g, h \rangle$  (Figura 3.13). Após a adição do elemento 3-conexo o ciclo se torna  $C'=\langle a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, h \rangle$ , isto é, quatro vértices foram adicionados, pois o ciclo que define o elemento quadrilateral foi adicionado por inteiro ao domínio. Repare que se for assumido que o ciclo definido pelo novo elemento não faz parte do ciclo da fronteira, o ciclo na fronteira permanece par, e que se for assumido que faz parte do ciclo da fronteira, pode-se o percorrer uma ou mais vezes quanto for necessário e ainda será obtido um ciclo par na fronteira. Novamente nenhuma diagonal é adicionada, e portanto as diagonais são pares por vacuidade A Figura 3.14 exibe um exemplo de que a adição de um elemento 3-conexo não impede a formação de uma quadrilaterização.

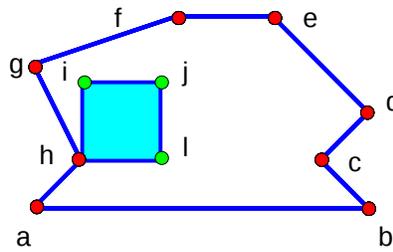


Figura 3.13: Exemplo de quadrilátero 1-conexo.

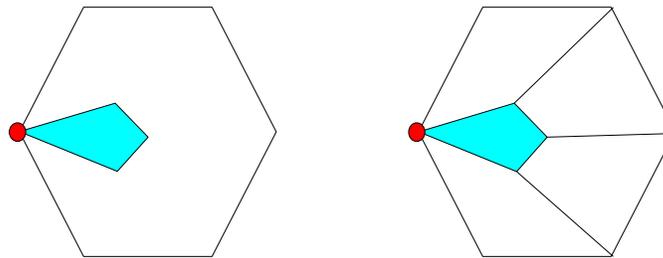


Figura 3.14: Elemento 1-conexo e a formação de uma quadrilaterização convexa correspondente.

Este caso deve ser tratado com extremo cuidado na construção de uma quadrilaterização convexa de qualidade por duas razões principais: uma das razões é o tratamento de ciclos dentro de outros ciclos que pode ser complexo; e outra razão, é que sempre que for adicionado um elemento desta maneira, este vértice de conexão implica na formação obrigatória de pelo menos dois novos elementos quadriláteros, o que poderá resultar em uma cardinalidade ímpar no conjunto de quadriláteros vizinhos deste vértice.

É fácil verificar que em uma malha ideal quadrilateral, todo vértice deve ser compartilhado por apenas quatro quadriláteros. Este vértice é chamado de vértice regular. Um vértice é chamado de vértice irregular quando é compartilhado por mais ou menos que quatro quadriláteros. Uma malha de boa qualidade implica na existência do mínimo de vértices irregulares, principalmente próximo a fronteira (15). Este caso pode ser corrigido, e Blacker (15) o utiliza ao inserir elementos em vértices côncavos. Blacker não permite que o elemento permaneça 1-conexo: ele o conecta a fronteira por meio de dois outros elementos que possuem dois vértices e uma aresta de conexão com este elemento. Desta forma, dois vizinhos 2-conexo são adicionados juntos ao elemento que seria 1-conexo, transformando-o em um elemento 3-conexo.

Repare que na solução de Blacker, embora ainda exista o problema de um nó ou vértice

irregular, é mantido a propriedade de vértices intrusos já que  $v_s=5$ ,  $v_r=1$ ,  $v_c=0$ , logo  $v_i=4$ . A Figura 3.15 exemplifica a solução de Blacker. Adicionam-se cinco vértices (em verde), mas um vértice é removido(em amarelo). Ou seja, mantém-se a quantidade par de vértices na fronteira.

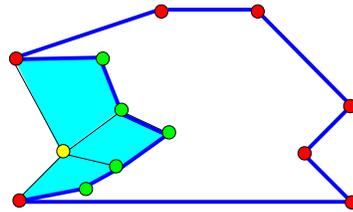


Figura 3.15: Solução de Blacker.

Caso III-a) Adição de um elemento com dois vértices de conexão e nenhuma aresta de conexão (2-conexo).

Neste caso, tem-se um elemento quadrilateral sendo formado por dois vértices de conexão mas em posições diferentes de ciclos diferentes. Quando existe apenas um ciclo  $v_s=2$ ,  $v_c=2$  e  $v_r=0$ , logo,  $v_i=4$ . Contudo, quando dois ciclos são criados, a escolha de vértices de conexão forma ciclos pares tal que  $v_{i_1}=0$  e  $v_{i_2}=2$ . Para ambos os casos têm-se  $v_c=0$  e  $v_r=0$ ; e  $v_{s_1}=0$ ,  $v_{s_2}=2$ . Ou seja, o elemento é válido quando uma diagonal par é formada. A Figura 3.16 exhibe a formação de um quadrilátero 2-conexo para o caso III-a. E a Figura 3.17 ressalta a necessidade da escolha de vértices de conexão que formem ciclos pares, isto é, uma diagonal par. A escolha ruim de vértices de conexão define uma diagonal ímpar e pode conduzir a uma triangulação ou a inserção de elementos côncavos. Logo, a escolha de vértices de conexão deve sempre manter a paridade par.



Figura 3.16: Exemplo de quadrilátero 2-conexo.

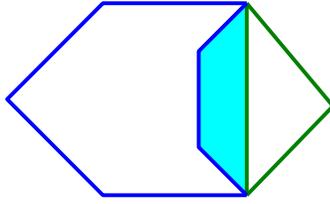


Figura 3.17: Escolha de uma diagonal ímpar: em azul e verde são dois ciclos de fronteira formados pela adição do elemento quadrilateral.

Caso III-b) Adição de um elemento com dois vértices de conexão e uma aresta de conexão (2-conexo). No caso de um domínio não estrito, o tratamento deste caso é essencial, embora possa não ser o ideal, pois em algumas geometrias a única solução para tentar melhorar ou reduzir a complexidade da forma de um domínio é adicionar novos vértices para quadrilaterizar convexamente um quadrilátero côncavo por exemplo. Neste caso adicionam-se dois vértices novos ao domínio e existe apenas um ciclo  $v_s=2$ ,  $v_c=0$ , e  $v_r=0$ , logo,  $v_i=2$ . Contudo, a exemplo do caso 1-conexo, deve-se usar com moderação os elementos 2-conexo, mas sem a mesma gravidade já que não é criado um ciclo interno ao ciclo da fronteira. A diagonal é par, pois forma um ciclo de tamanho zero. A Figura 3.18 exibe um exemplo de criação de um elemento 2-conexo para o caso III-b.



Figura 3.18: Construção de um quadrilátero 2-conexo.

Caso IV-a) Adição de um elemento com três vértices de conexão e duas arestas de conexão (3-conexo). Neste caso, embora seja adicionado um novo vértice, é removido um vértice da fronteira, ou seja, não se adiciona nenhum vértice ao ciclo da fronteira. Como existe apenas um ciclo  $v_s=1$ ,  $v_c=0$  e  $v_r=1$ , logo,  $v_i=0$ . Mantém-se assim a quantidade de vértices par, trivialmente. As duas diagonais são pares, pois formam ciclos de tamanho zero. É como se fosse feito uma simples projeção do vértice, ajustando-se o tamanho do ângulo ou a forma do domínio para melhorar a quadrilaterização. É possível aplicar algum tipo de suavização (*smooth*) neste caso para melhorar o resultado final. A Figura 3.19 exibe o processo de adição de um quadrilátero 3-conexo para o caso IV-a.

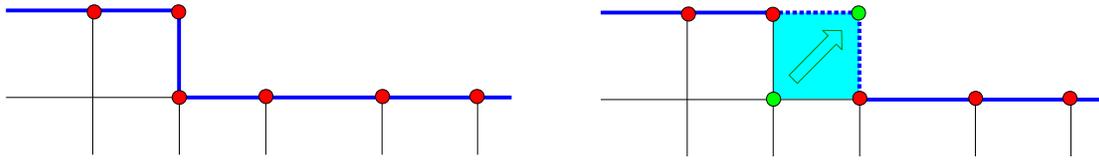


Figura 3.19: Construção de um quadrilátero 3-conexo.

Caso IV-b) Adição de um elemento com três vértices de conexão e uma aresta de conexão (3-conexo). Este caso, é adicionado apenas um vértice ao domínio  $v_s=1$ , mas similar ao caso III-b a escolha dos vértices de determinará a paridade, isto é, as duas diagonais adicionadas devem ser pares. Se estiver sendo realizado a adição de um novo ciclo par a paridade se mantém na quantidade de vértices intrusos  $v_{i_1}=0$  e  $v_{i_2}=0$ ; pois, para o primeiro ciclo tem-se que  $v_{c_1}=0$ ,  $v_{r_1}=0$  e  $v_{s_1}=0$ , já para o segundo  $v_{c_2}=0$ ,  $v_{r_2}=1$  e  $v_{s_2}=1$ . No ciclo par que não recebe nenhum ponto novo a paridade se mantém trivialmente, para o ciclo par que recebe um novo ponto adicional. É importante notar que ocorre novamente uma projeção do vértice a exemplo do caso IV-a que mantém a paridade (repare que este ciclo na verdade se tornaria ímpar, se o quadrilátero fosse uma diagonal, pois não alcançaria a diagonal pontilhada e perde, portanto, um vértice). Ou seja, as duas diagonais são pares. Se não houver a criação de um novo ciclo (isto pode ocorrer ao tentar ligar o ciclo da fronteira com *holes*), a escolha de uma diagonal par mantém a paridade, pois haverá um vértice de conexão que será percorrido duas vezes no ciclo  $v_c=1$ . O resultado é  $v_i=2$ , pois um vértice de conexão é percorrido duas vezes no ciclo. A Figura 3.20 exibe um exemplo da adição de um quadrilátero 3-conexo para o caso IV-b.



Figura 3.20: Exemplo de quadrilátero 3-conexo.

Caso IV-c) Adição de um elemento com três vértices de conexão e nenhuma aresta de conexão (3-conexo).

Este caso é similar ao caso IV-b. Se não houver criação de ciclo cada vértice de conexão é contado duas vezes no ciclo  $v_c=3$ , deste modo  $v_i=4$ , desde que ambas diagonais sejam pares. Se é realizado a adição de um novo ciclo par, sendo um ciclo que contém o vértice de Steiner e o outro não, a paridade se mantém. No ciclo par que não recebe nenhum ponto novo, a paridade se mantém trivialmente pela diagonal par; para o ciclo par que recebe um novo ponto adicional, ocorre: ou novamente uma projeção do vértice a exemplo do Caso IV-a que mantém a paridade, ou um vértice de conexão será contado duas vezes a exemplo do Caso IV-b. Caso os três ciclos criados sejam pares, dependendo da escolha dos vértices de conexão, isto é, das diagonais, a paridade também é mantida pois novamente um vértice será removido do ciclo em que o vértice de Steiner é adicionado. Deste modo a quantidade de vértices intrusos se mantém par, pois  $v_{i_1}=0$ ,  $v_{i_2}=0$  e  $v_{i_3}=0$ ; para o primeiro ciclo tem-se que  $v_{c_1}=0$ ,  $v_{r_1}=0$  e  $v_{s_1}=0$ ; para o segundo  $v_{c_2}=0$ ,  $v_{r_2}=0$  e  $v_{s_2}=0$ ; e para o terceiro  $v_{c_3}=0$ ,  $v_{r_3}=1$ , e  $v_{s_3}=1$ . A Figura 3.21 exibe um exemplo da adição de um quadrilátero 3-conexo para o caso IV-c.

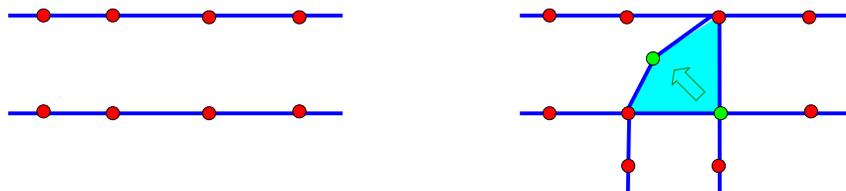


Figura 3.21: Exemplo de quadrilátero 3-conexo sem arestas no domínio.

Caso V-a) Adição de um elemento com quatro vértices de conexão e três arestas de conexão (4-conexo).

Este é o caso ideal que deve ser sempre buscado ao fazer um quadrilaterização qualquer: algumas técnicas como de Maharavo (56) e Owen (48) oferecem inclusive prioridade a resolução destes casos. No caso de adição de um elemento 4-conexo com três arestas de conexão, é removido dois vértices (em verde) da fronteira, reduzindo assim a complexidade do problema e aproximando-se de quadrilaterização final. Como existe apenas um ciclo possível  $v_s=0$ ,  $v_c=0$  e  $v_r=2$ , logo,  $v_i=-2$ . As três diagonais são pares, pois formam ciclos de tamanho zero. A última diagonal é par, pois remove do ciclo dois vértices. A Figura 3.22 exibe um exemplo da adição de um quadrilátero 4-conexo para o caso

V-a.

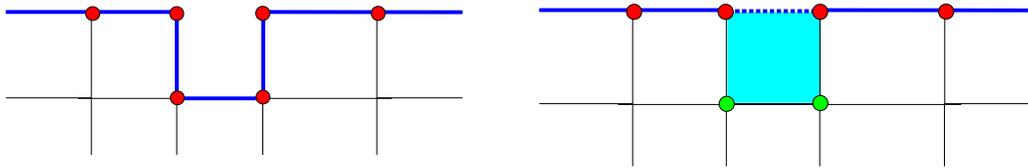


Figura 3.22: Adição de quadrilátero 4-conexo ao ciclo da fronteira.

Caso V-b) Adição de um elemento com quatro vértices de conexão e duas arestas de conexão (4-conexo).

Neste caso, duas diagonais são pares, pois formam ciclos de tamanho zero. Resta analisar as outras duas. Quando o ciclo é único  $v_r=1$ , mas  $v_c=1$ , pois um vértice será percorrido duas vezes ao adicionar este quadrilátero. A paridade se mantém baseada na escolha dos vértices de conexão que gerem dois ciclos pares, isto é, escolhendo diagonais pares. Se for criado um novo ciclo par, a paridade se mantém trivialmente. Neste caso, de forma similar ao caso V-a, dois vértices são removidos tal que  $v_{i_1}=-2$  e  $v_{i_2}=-2$ ; para o primeiro ciclo tem-se que  $v_{c_1}=0$ ,  $v_{r_1}=2$  e  $v_{s_1}=0$ ; já para o segundo  $v_{c_2}=0$ ,  $v_{r_2}=2$ , e  $v_{s_2}=0$ . A Figura 3.23 exhibe um exemplo da adição de um quadrilátero 4-conexo para o caso V-b.



Figura 3.23: Exemplo de quadrilátero 4-conexo com duas arestas comuns ao domínio e sequenciais.

Caso V-c) Adição de um elemento com quatro vértices de conexão e duas arestas de conexão (4-conexo).

Este caso é similar ao caso V-b, com uma única diferença. Caso um novo ciclo não seja formado, isto implica imediatamente que ele é par, ou seja, a paridade se mantém trivialmente já que  $v_c=0$ ,  $v_s=0$  e  $v_r=0$ , logo,  $v_i=0$ . Todas as diagonais são pares. Deve-se, é claro, estar atento no momento da formação de um novo ciclo para a escolha dos vértices de conexão e obter diagonais pares. Neste caso,  $v_{i_1}=-2$  e  $v_{i_2}=-2$ . Neste caso, com uma boa escolha de vértices de conexão, é possível dividir a

quantidade de vértices do domínio por dois (Figura 3.25). A Figura 3.24 exhibe um exemplo da adição de um quadrilátero 4-conexo para o caso V-c.



Figura 3.24: Exemplo de quadrilátero 4-conexo com duas arestas comuns ao domínio e opostas.

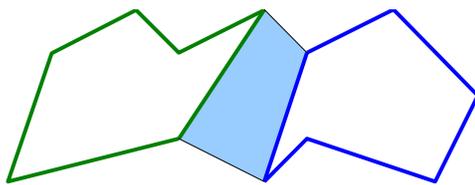


Figura 3.25: Exemplo de uma boa escolha de vértices de conexão, que divide a paridade do domínio por dois.

Caso V-d) Adição de um elemento com quatro vértices de conexão e uma aresta de conexão (4-conexo).

Este caso é similar ao caso V-c, mas é possível formar neste caso no máximo três ciclos. Escolhendo-se diagonais pares em um ciclo único tem-se que ele é par, já que  $v_c=2$ ,  $v_s=0$  e  $v_r=0$ , logo  $v_i=2$ . Dois vértices de conexão serão contados duas vezes em um ciclo. Se existir a formação de dois ciclos,  $v_{s_1}=0$  e  $v_{s_2}=0$ ; um dos ciclos perderá dois vértices enquanto o outro perderá um vértice  $v_{r_1}=1$  e  $v_{r_2}=2$ ; e a contagem de vértices nos ciclos será  $v_{c_1}=1$  e  $v_{c_2}=0$ . Desta forma  $v_{i_1}=-2$  e  $v_{i_2}=-2$ . A paridade se mantém. Por fim, na formação de três ciclos pares, os três ciclos terão uma redução de dois vértices. Deste modo, a quantidade de vértices intrusos se mantém par pois  $v_{i_1}=-2$ ,  $v_{i_2}=-2$  e  $v_{i_3}=-2$ ; para o primeiro ciclo tem-se que  $v_{c_1}=0$ ,  $v_{r_1}=2$  e  $v_{s_1}=0$ ; para o segundo  $v_{c_2}=0$ ,  $v_{r_2}=2$  e  $v_{s_2}=0$ ; e para o terceiro  $v_{c_3}=0$ ,  $v_{r_3}=2$ , e  $v_{s_3}=0$ . Logo, para este elemento é vantajoso uma inserção, se existir a formação de uma quantidade de ciclos ímpar. A Figura 3.26 exhibe um exemplo da adição de um quadrilátero 4-conexo para o caso V-d.

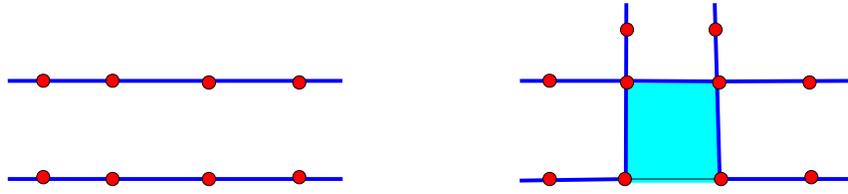


Figura 3.26: Exemplo de quadrilátero 4-conexo com uma aresta comum ao domínio.

Caso V-e) Adição de um elemento com quatro vértices de conexão e nenhuma aresta de conexão (4-conexo).

Este caso é similar ao caso V-d, mas é possível formar neste caso no máximo quatro ciclos e caso um novo ciclo não seja formado isto implica imediatamente que ele é par, ou seja, a paridade se mantém trivialmente já que  $v_c=4$ ,  $v_s=0$  e  $v_r=0$ ,  $v_i=4$ . Se existir a formação de dois ciclos, os dois ciclos perderão um vértice  $v_{r_1}=1$  e  $v_{r_2}=1$ ; porém, cada um deles terá um vértice que é percorrido pelo menos duas vezes no ciclo  $v_{c_1}=1$  e  $v_{c_2}=1$ ; logo,  $v_{i_1}=2$  e  $v_{i_2}=2$ . No momento da formação de três ciclos, os dois ciclos terão uma redução de dois vértices e o terceiro perderá um vértice, mas terá, novamente, um vértice que será percorrido pelo menos duas vezes no ciclo, logo,  $v_{i_1}=-2$ ,  $v_{i_2}=-2$  e  $v_{i_3}=0$ . Na formação de quatro ciclos, ocorre uma redução de dois vértices para cada ciclo. Deste modo, a quantidade de vértices intrusos se mantém par pois  $v_{i_1}=-2$ ,  $v_{i_2}=-2$ ,  $v_{i_3}=-2$  e  $v_{i_4}=-2$ ; para o primeiro ciclo tem-se que  $v_{r_1}=2$  e  $v_{s_1}=0$ ; para o segundo  $v_{c_2}=0$ ,  $v_{r_2}=2$  e  $v_{s_2}=0$ ; para o terceiro  $v_{c_3}=0$ ,  $v_{r_3}=2$ , e  $v_{s_3}=0$ ; e para o quarto  $v_{c_4}=0$ ,  $v_{r_4}=2$ , e  $v_{s_4}=0$ . Logo, para este elemento é vantajoso uma inserção, se existir a formação de quatro ciclos. A Figura 3.27 exibe um exemplo da adição de um quadrilátero 4-conexo para o caso V-e.

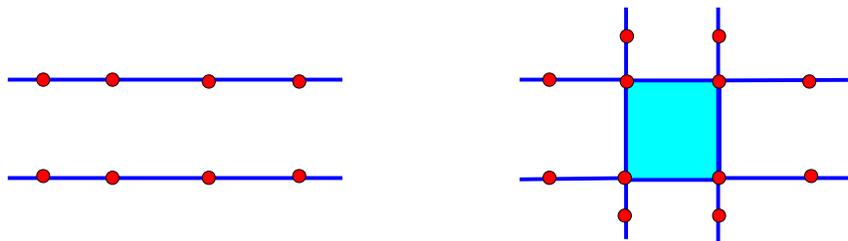


Figura 3.27: Exemplo de quadrilátero 4-conexo sem arestas comuns ao domínio.

A Tabela 3.1 exibe a quantidade de vértices intrusos ideal para cada tipo de quadrilátero através de diagonais pares. Uma prova informal do teorema é estabelecida, e assim a análise dos casos é resumida:

<b>Caso</b>	<b>Vértices intrusos</b>
<b>I. 0-conexo</b>	+4
<b>II. 1-conexo</b>	+4
<b>III-a. 2-conexo</b>	+2
<b>III-b. 2-conexo</b>	+2
<b>IV-a. 3-conexo</b>	+0
<b>IV-b. 3-conexo</b>	+0
<b>IV-c. 3-conexo</b>	+0
<b>V-a. 4-conexo</b>	-2
<b>V-b. 4-conexo</b>	-2
<b>V-c. 4-conexo</b>	-2
<b>V-d. 4-conexo</b>	-2
<b>V-e. 4-conexo</b>	-2

Tabela 3.1: Quantidade de vértices intrusos adicionados para cada tipo de quadrilátero através de diagonais pares.

Como foi visto, em todos os casos têm-se a adição ou remoção de uma quantidade par de vértices intrusos, desde que exista a preocupação de formar diagonais pares. Isto é tão crítico que em alguns casos, como o 3-conexo, a paridade se mantém baseada apenas na escolha das diagonais. Desta forma o Teorema 3.2 se mantém correto. Também é possível observar que a inserção de elementos 4-conexo é fundamental para que uma quadrilaterização seja obtida; e que caso V-c, uma boa escolha de ciclos mesmo sem a adição de vértices pode reduzir o problema pela metade.

Resta apenas provar o porquê da escolha de círculos pares ser essencial, isto é, diagonais pares. Assumindo-se por contraposição que não seja necessário manter ciclos pares para se formar uma quadrilaterização a partir de um polígono com uma quantidade de vértices par qualquer. Se isto é verdade, então é possível adicionar um elemento quadrilátero qualquer sem se preocupar com a paridade dos ciclos e ainda assim obter uma quadrilaterização válida. A Figura 3.28 exibe dois casos da adição de um quadrilátero 4-conexo  $Q$ : em QUAD I,  $Q$  possui diagonais ímpares; em QUAD II,  $Q$  possui somente diagonais pares.

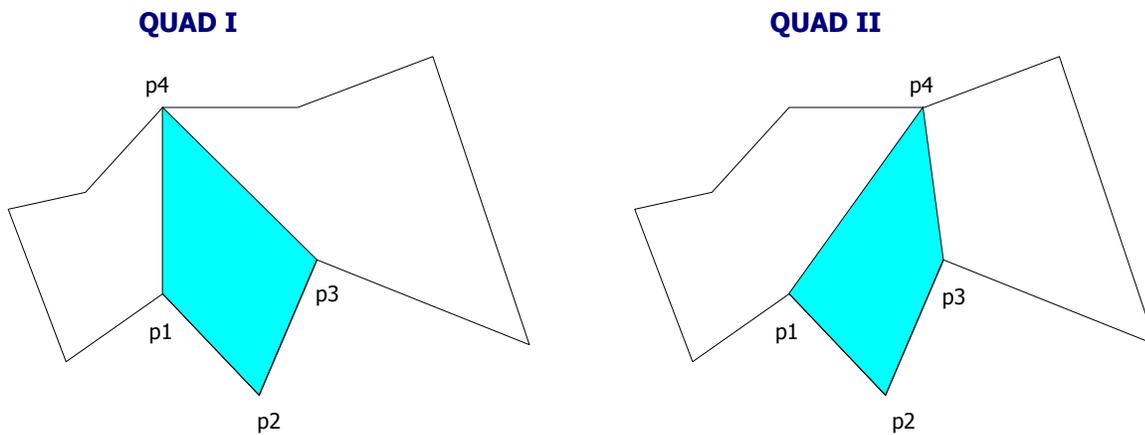


Figura 3.28: Adição de quadrilátero 4-conexo: (a) Ciclos ímpares; e (b) Ciclos pares.

Na Figura 3.28, como estão sendo gerados dois ciclos ímpares em QUAD I e por Prosenjit não é possível quadrilaterizar este domínio (20), QUAD I não poderá gerar uma quadrilaterização convexa a priori. Chega-se assim a uma contradição, já que não é possível obter uma quadrilaterização válida. ■ QUAD II, contudo, gerará uma quadrilaterização válida conforme demonstrado na Figura 3.29.

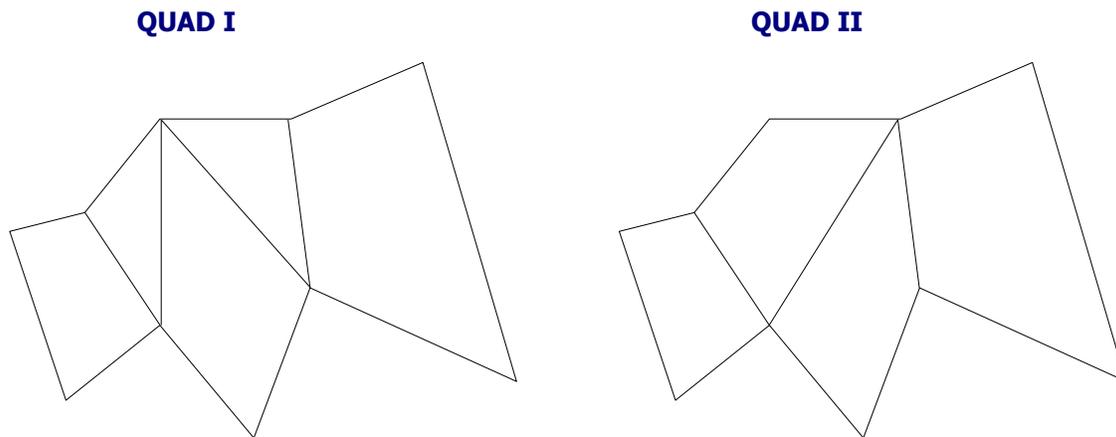


Figura 3.29: Quadrilaterização por adição de quadrilátero 4-conexo: (a) Ciclos ímpares; e (b) Ciclos pares.

Por outro lado, para se lidar com domínios estritamente convexos, alguns aspectos precisam ser considerados. Uma quadrilaterização estritamente convexa é aquela que não possui nenhum ângulo igual à  $180^\circ$ , ou seja, não deve haver três pontos alinhados no espaço geométrico. Este tipo de situação pode gerar quadriláteros triangulares (ou não estritos). A Figura 3.30 exibe um exemplo de um quadrilátero não estrito.

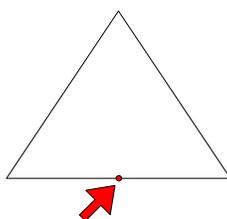


Figura 3.30: Exemplo de um quadrilátero não estrito.

Ao garantir uma fronteira par, assegura-se a formação de elementos quadrilaterais, mas, apenas este requisito não é suficiente para garantir uma quadrilaterização estritamente convexa. Se for utilizado o mesmo exemplo anterior com uma pequena modificação pode-se produzir uma quadrilaterização côncava. A Figura 3.31 exhibe a quadrilaterização QUAD II que respeita ciclos pares, mas produz quadriláteros côncavos.

**QUAD II MOD**

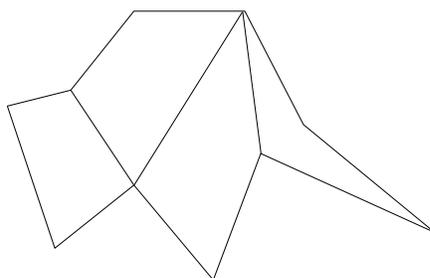


Figura 3.31: Ciclos pares não garantem elementos convexos.

Tanto para o QUAD II MOD, como para a existência de quadrilátero triangular existem três soluções fundamentais: permitir a adição de novos vértices na fronteira; adicionar um triângulo; e remover um buraco com ciclo ímpar do polígono, um triângulo no caso mais trivial (Figura 3.32). As duas primeiras soluções tornam a fronteira do domínio par, enquanto que a última pode ser aplicada para fronteiras ímpares. A razão para que esta última solução funcione sempre, é que a união do ciclo da fronteira com o ciclo do buraco ímpar torna o ciclo final par. Quando se permite a adição de novos pontos, qualquer polígono pode ser quadrilaterizado convexamente (24). E de fato já foi provado que  $O(n)$  pontos de Steiner são sempre suficientes para realizar o mesmo (36).

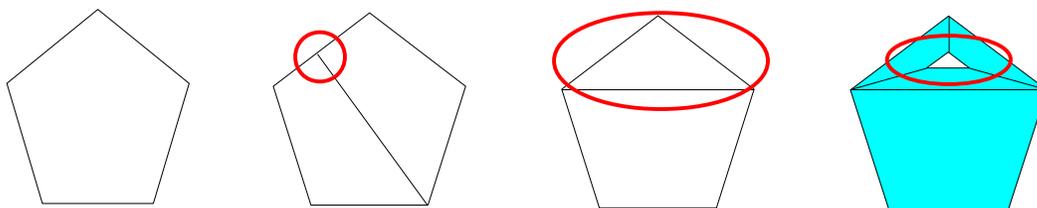


Figura 3.32: A esquerda um pentágono (ciclo ímpar): para quadrilaterizá-lo, adicionam-se pontos de Steiner, triângulos ou removem-se buracos de ciclo ímpar.

Entretanto, existem algumas razões porque considerar que polígonos com quantidade ímpares de vértices não podem ser quadrilaterizados. A primeira razão é que a adição de pontos de Steiner não deve ser feita e esmo, e sim para tornar a fronteira do domínio par ou inserir elementos convexos. A segunda razão é eficiência, por que ao realizar uma quadrilaterização, ao contrário de uma triangulação, a preocupação não deve ser apenas com a complexidade do algoritmo gerado, mas também com a quantidade de pontos de Steiner adicionados. Como já foi provado que  $O(n)$  pontos de Steiner são sempre suficientes para quadrilaterizar um domínio, qualquer algoritmo que adicione mais pontos de Steiner que este limite, claramente é um algoritmo ingênuo ou com um custo excessivo.

Existem ainda outras soluções para resolver os casos de um quadrilátero triangular e de um quadrilátero côncavo. Uma destas soluções é através do uso de um *template* chamado por este autor de triângulo de Varignon, pois foi obtido através de uma modificação no quadrilátero de Varignon. Nesta dissertação, quadrilátero de Varignon ou triângulo de Varignon se referem a este *template*. O quadrilátero de Varignon adiciona quatro vértices de Steiner para um quadrilátero não estrito, e nove para um quadrilátero côncavo. A Figura 3.33 exibe um exemplo de um triângulo de Varignon.

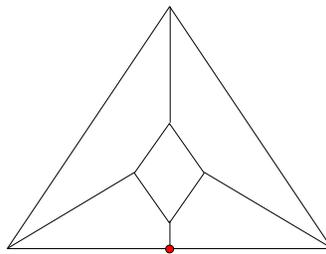


Figura 3.33: Triângulo de Varignon.

O quadrilátero de Varignon consiste em adicionar um quadrilátero internamente à geometria, gerando cinco quadriláteros convexos. No algoritmo original, apenas o elemento central é sempre convexo. Para o *template* desta dissertação o processo de construção é o seguinte. Primeiramente, adiciona-se um quadrilátero  $\{a', d', b', c'\}$  interno à geometria e similar ao quadrilátero  $\{a, d, b, c\}$  externo, mas de tamanho reduzido. Para realizar isto, calcula-se o baricentro  $B$  dos quatro vértices  $\{a, d, b, c\}$ , e criam-se vértices na metade dos segmentos que ligam o baricentro  $B$  aos vértices externos  $\{a, d, b, c\}$ . Ou seja, é como se os segmentos do polígono fossem reduzidos pela metade, mantendo-se os ângulos e a direção dos segmentos. A Figura 3.34 exibe o processo inicial de construção de um triângulo de Varignon.

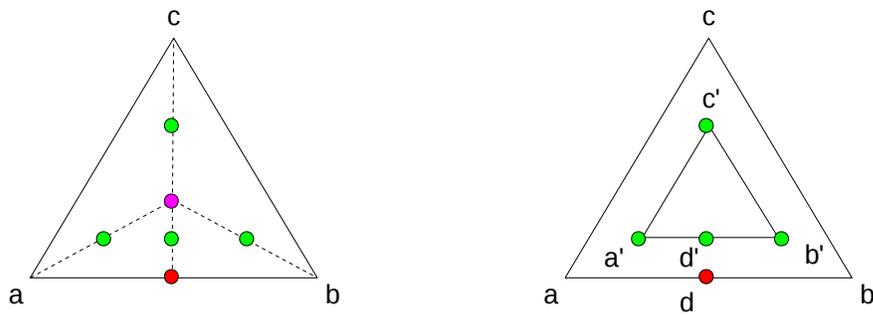


Figura 3.34: Construção de um triângulo de Varignon.

Uma vez que se obtenha este novo quadrilátero interno, adicionam-se os lados  $(c, c')$ ,  $(a, a')$ ,  $(d, d')$  e  $(b, b')$  (Figura 3.35) que são de fato transversais de um trapézios. É simples de verificar isso já que o segmento  $(a, c)$  é paralelo a  $(a', c')$ , o segmento  $(b, c)$  é paralelo ao segmento  $(b', c')$ , o segmento  $(a, d)$  é paralelo ao segmento  $(a', d')$  e  $(d, b)$  é paralelo ao segmento  $(d', b')$ ; isto implica que as transversais cortam esses lados paralelos produzindo ângulos convexos, já que os pares de ângulos colaterais internos de um trapézio somados devem ser  $180^\circ$ .

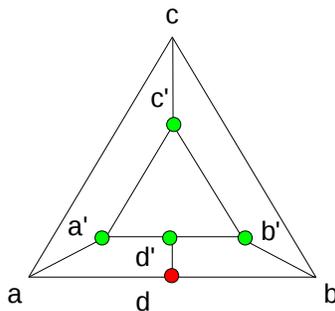


Figura 3.35: Adição de um triângulo interno por simetria angular.

Desloca-se, agora, o vértice  $d'$  para a metade do segmento  $(d, d')$ , completando-se assim a quadrilaterização convexa. A Figura 3.36 exibe a última etapa da formação do triângulo de Varignon.

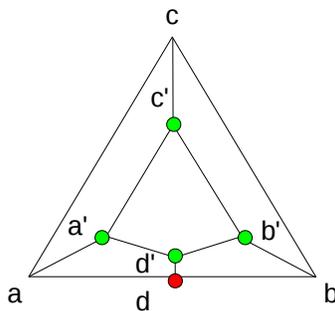


Figura 3.36: Triângulo de Varignon, quadrilaterização final.

São modificados sete ângulos nesta última operação, mas os ângulos em  $a\hat{a}'d'$  e  $d'\hat{b}'b$  já eram convexos; sua redução pelo movimento das arestas ( $a'$ ,  $d'$ ) e ( $d'$ ,  $b'$ ) respectivamente garante que eles permaneçam convexos, pois são diagonais do trapézio convexo anterior. O quadrilátero  $Q = \{a', d', b', c'\}$  é convexo, pois devido ao processo de formação deste elemento os triângulos  $T_1 = \{a', b', c'\}$ ,  $T_2 = \{a', b', d'\}$ ,  $T_3 = \{a', c', d'\}$  e  $T_4 = \{b', c', d'\}$  existem. Como estes triângulos sempre existem, então os ângulos internos deste quadrilátero são todos convexos, pois todo triângulo é convexo. O problema são os dois ângulos no vértice  $d'$ :  $a'd'\hat{d}$  e  $d\hat{d}'b'$ . Contudo, se o triângulo  $T_3$  existe então a diagonal ( $c'$ ,  $d'$ ) existe, e o ângulo  $a'd'\hat{d}$  é complementar ao ângulo interno de  $T_3$ . Da mesma forma, se o triângulo  $T_4$  existe então a diagonal ( $c'$ ,  $d'$ ) existe, e o ângulo  $d\hat{d}'b'$  é complementar ao ângulo interno de  $T_4$ . Ângulos complementares são convexos neste caso, já que nenhum ângulo pode ser igual a  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  e os triângulos sempre existem devido ao processo de construção deste *template*. Outra forma de pensar é que quando esse deslocamento do vértice de um quadrilátero convexo qualquer é mínimo, a alteração nos valores dos ângulos internos não é grande o suficiente para torná-los côncavos.

Para quadrilaterizar convexamente quadriláteros côncavos pelo *template* do triângulo de Varignon, pode-se dividi-lo em dois triângulos e adicionar um ponto de Steiner na metade do segmento que os dois triângulos possuem em comum (Figura 3.37). Basta, então, aplicar novamente o *template* do triângulo de Varignon para cada quadrilátero triangular, obtendo assim uma quadrilaterização convexa não estrita.



Figura 3.37: Preparando um quadrilátero côncavo para adição de um triângulo de Varignon.

O problema de aplicar o triângulo de Varignon para quadriláteros côncavos é que nove pontos de Steiner tem que ser adicionados para fazê-lo; uma outra maneira de melhorar essa quadrilaterização convexa seria adicionando uma versão diferente do quadrilátero de Varignon, que este autor chama de quadrilátero *boomerang* (Figura 3.38). Este *template* introduz apenas quatro pontos de Steiner em um quadrilátero côncavo para quadrilaterizá-lo convexamente. Deste modo, o número de pontos é reduzido pela metade.

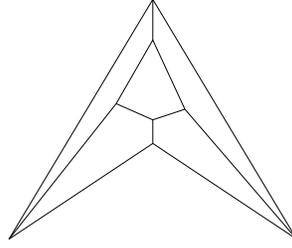


Figura 3.38: Exemplo de quadrilátero boomerang.

A sua construção é um pouco mais complexa que o triângulo de Varignon, mas também garante a convexidade dos seus elementos. Primeiramente, constrói-se um triângulo interno ao domínio que depois é transformado em um quadrilátero convexo. Assume-se um quadrilátero côncavo qualquer tal que  $Q = \langle a, b, c, d \rangle$ . Calcula-se o ponto médio do segmento  $(a, c)$  (Figura 3.39a), em que  $c$  é o vértice que contém o ângulo côncavo e  $a$  é o vértice oposto. Em seguida, calculam-se os pontos médios dos segmentos  $(a, pm)$  e  $(pm, c)$ , obtendo-se assim os dois primeiros vértices do que será o quadrilátero interno  $a'$  e  $c'$ . Defina lado imaginário como um lado que remove o vértice côncavo de um quadrilátero côncavo, transformando-o em um elemento convexo. Dispara-se, então, um raio na direção do lado  $(a', c')$  até cruzar o lado imaginário  $(b, d)$ , que triangulariza o quadrilátero côncavo, no vértice  $i$  (Figura 3.39b).

A distância euclidiana entre dois vértices  $w$  e  $v$  é definida como

$$d(w, v) = \sqrt{(w_x - v_x)^2 + (w_y - v_y)^2}, \quad (3.7)$$

em que para um vértice  $v$  qualquer  $v_x$  representa sua coordenada e  $v_y$  sua abscissa. Define-se, então, a constante de proporção  $p$  entre os triângulos como

$$p = \frac{d(a', c')}{d(a, i)}. \quad (3.8)$$

Com a constante  $p$ , é possível calcular o valor dos lados do triângulo interno, mas será calculado apenas o valor dos lados proporcionais de  $(a, b)$  e  $(a, d)$  para obter os vértices do quadrilátero interno  $b'$  e  $d'$ . Definindo-se  $n(w, v)$  para dois vértices  $w$  e  $v$  como o vetor normalizado que parte do vértice  $w$  e alcança o vértice  $v$ , criam-se os lados  $(a', b')$  e  $(a', d')$  pelo cálculo dos vértices

$$d' = a' + (n(a, d) * d(a, d) * p) \quad e \quad (3.9)$$

$$b' = a' + (n(a, b) * d(a, b) * p). \quad (3.10)$$

A Figura 3.39c exibe a formação do elemento triangular interno. O lado (b', d') não é criado, pois no seu lugar, criam-se os lados (b', c') e (c', d'), que serão os lados do quadrilátero interno. O vértice c' faz parte do lado (b', d'), e portanto não há problema em realizar esta segmentação. É fácil perceber isto, se observar que é possível dividir o triângulo  $T = \langle a, b, d \rangle$  em dois triângulos  $T_1 = \langle a, b, i \rangle$  e  $T_2 = \langle a, i, d \rangle$  que são proporcionais aos triângulos  $T'_1 = \langle a', b', c' \rangle$  e  $T'_2 = \langle a', c', d' \rangle$ . Para terminar o cálculo do quadrilátero interno, basta calcular o vértice c'' como a distância média entre c' e c (Figura 3.39e). O vértice c', será, então reposicionado na localização de c'' e será adicionado os lados dos quadriláteros vizinhos (a, a'), (b, b'), (c, c') e (d, d') (Figura 3.39f).

Resta provar que todos os quadriláteros são conexos. Novamente, o segmento (a,b) é paralelo ao segmento (a',b') e o segmento (a, d) é paralelo ao segmento (a', d'); isto se deve pela construção que foi realizada. Isto garante que os ângulos colaterais internos dos quadriláteros  $\langle a, b, b', a' \rangle$  e  $\langle a, a', d', d \rangle$  somados sejam  $180^\circ$ , garantindo vértices convexos. O quadrilátero interno é convexo, pois o ângulo em a' é o mesmo que o ângulo em a, e as diagonais (a', c') e (b', d') sempre existem pois são a base da construção deste elemento. Desta forma os triângulos  $\langle a', b', c' \rangle$ ,  $\langle a', c', d' \rangle$  e  $\langle b', c', d' \rangle$  existem, o que determina ângulos convexos para os vértices b', c' e d' respectivamente. Resta, agora, os quadriláteros  $Q_a = \langle b, c, c', b' \rangle$  e  $Q_b = \langle c', c, d, d' \rangle$ . O lado (c, c') sempre existe pois ele faz parte do lado (a, c) que divide o quadrilátero côncavo em dois triângulos e, portanto, os ângulos no vértice c em ambos os quadriláteros  $Q_a$  e  $Q_b$  são convexos. Por argumento similar, o vértice c' produz ângulos que são complementares com os ângulos internos dos dois triângulos que formam o quadrilátero  $\langle a', b', c', d' \rangle$  e, portanto, são convexos. Os lados (b, b') e (d, d') são diagonais pertencentes a ângulos convexos e portanto, produzem ângulos convexos nos vértices b e d. Para os ângulos em b' e d' é preciso observar que devido ao método de construção, estes ângulos faziam parte de um quadrilátero com dois lados paralelos (b, d) e (b', d') (Figura 3.39e). O reposicionamento de c' para c'', cria uma diagonal dentro deste quadrilátero dividindo um ângulo que era obrigatoriamente convexo em um ângulo menor, e portanto, o ângulo nos vértices b' e d' também é convexo.

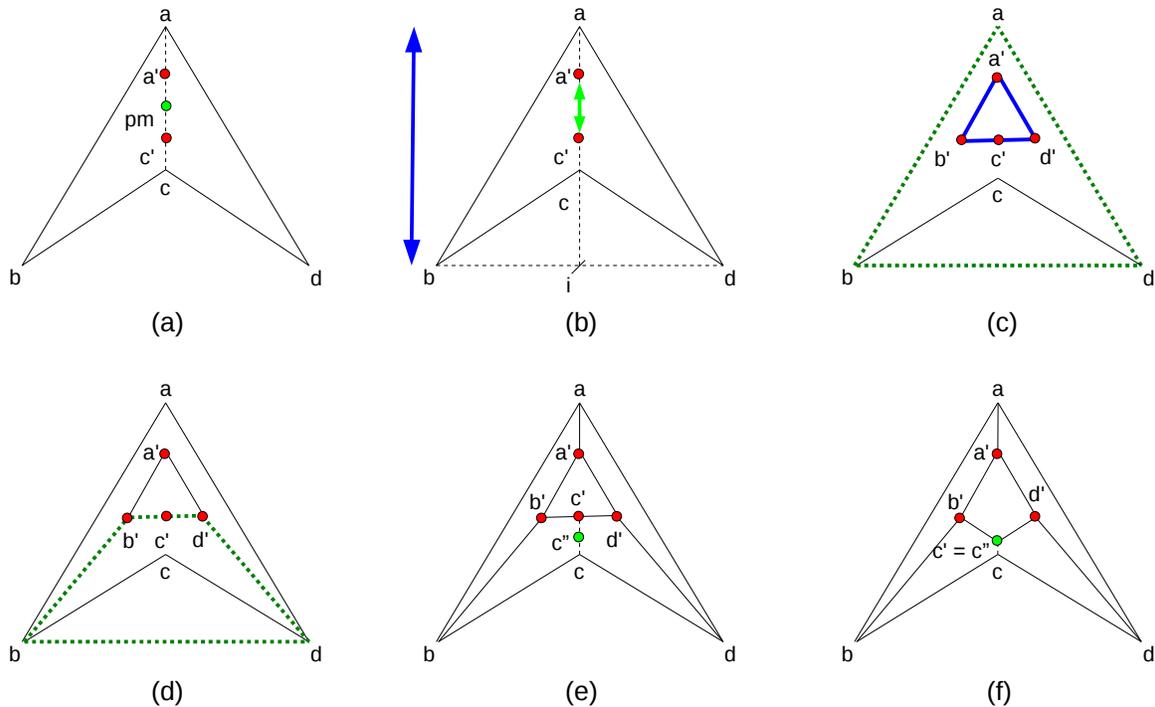


Figura 3.39: Construção do elemento boomerang.

Outra solução adequada seria unir o quadrilátero côncavo com seu vizinho e assim quadrilaterizar o hexágono convexamente pelo método de Maharavo (55), usando apenas três pontos de Steiner conforme provado por Bremner (23). Com o resultado de Bremner, qualquer hexágono pode ser quadrilaterizado com três vértices para um domínio não estrito. Com o elemento de *boomerang*, terminam-se os requisitos para se efetuar uma quadrilaterização. Agora, serão classificados os tipos de malhas de quadriláteros existentes e será fornecido uma breve descrição das mesmas.

### 3.3 Classificação

Existem cinco tipos de malhas quadrilaterais conhecidas: Cartesianas, PEBI, CPG, Curvilíneas e *Quad-Dominant*. Esta classificação complementa a de Hales (12). Os tipos serão analisados a seguir.

## Cartesianas

São aquelas que todos os lados de seus quadriláteros são perpendiculares ou paralelos ao eixo Cartesiano. Trata-se de um processo de ortogonalização do domínio, de forma a obter elementos sempre convexos e de boa qualidade. Toda malha Cartesiana possui um número par de vértices e é formada exclusivamente por ângulos de  $90^\circ$ . Embora a qualidade de seus elementos seja alta, há uma perda ou extrapolação da precisão nos elementos nas fronteiras, isto é, nos segmentos que definem o polígono ou curva. A Figura 3.40 exibe um exemplo de malha Cartesiana.

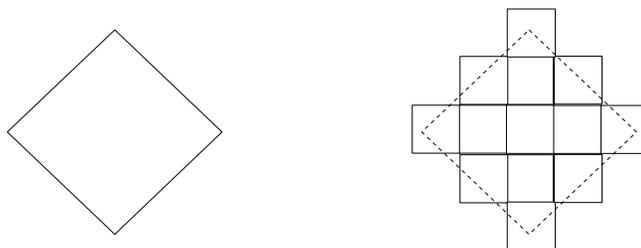


Figura 3.40: Exemplo de polígono à esquerda e sua malha Cartesiana correspondente à direita: linha pontilhada é mantida apenas para identificar regiões de extrapolação e perda.

## Curvilíneas

São aquelas em que seus elementos quadriláteros são formados por curvas ao invés de retas; ideal para modelar domínios contínuos. Seus elementos são ditos quadriláteros pois são formados por quatro curvas ao invés de quatro segmentos de retas. Uma malha curvilínea também permite que suas células possam sofrer deformações e alterações que não seriam possível com outro tipo de malha sem curvas. A Figura 3.41 exibe um exemplo de malha curvilínea.

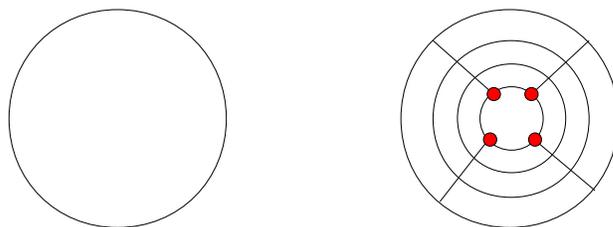


Figura 3.41: Exemplo de domínio curvilíneo original e sua malha quadrilateral curvilínea resultante.

## PEBI

Também chamadas de malhas de Voronoi. PEBI significa Bissetores Perpendiculares (em inglês: *Perpendicular Bisectors*) e determina uma malha formada por regiões limitadas por segmentos na distância média entre vértices distintos no domínio. O resultado de uma malha PEBI não é por padrão uma malha quadrilateral, mas elementos que normalmente variam entre quadriláteros e hexágonos. Existem estudos feitos por Marshall Bern (11) em que pela adição de vértices equidistantes e de acordo com um determinado padrão busca-se obter malhas quadrilaterais. Marshall utiliza da técnica de *Circle-Packing* (11) para conseguir gerar malhas de Voronoi com elementos exclusivamente quadrilaterais. A Figura 3.42 exibe um bissetor perpendicular e um exemplo de malha PEBI.

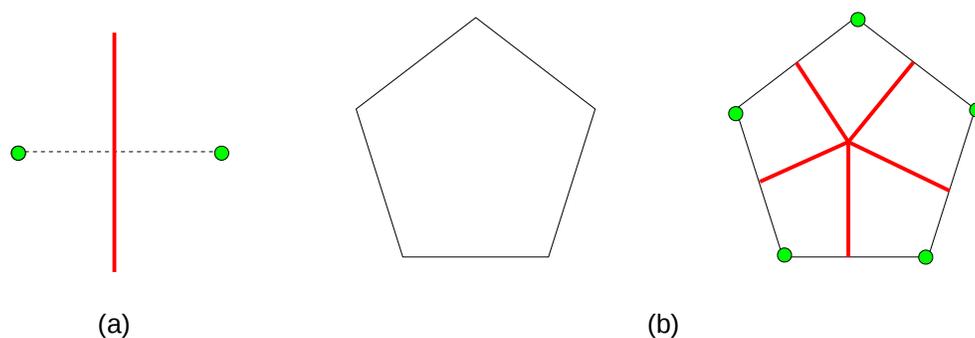


Figura 3.42: Exemplos com PEBI: (a) Bissetor perpendicular (em vermelho) a distância de dois vértices (em verde), e (b) Domínio quadrilaterizado pelo uso de uma malha de Voronoi ou PEBI.

## CPG

*Corner Point Grid* (40) ou malhas de pontos de canto (tradução do inglês) são malhas de quadriláteros cujos ângulos, ao contrário de uma malha Cartesiana, não precisam estar limitados a  $90^\circ$ , fornecendo um grau de liberdade maior para adaptar uma malha à um domínio. Os elementos são definidos pelo posicionamento dos vértices que compõem a malha. O domínio não se adapta a malha, pois é a malha que se adapta ao domínio. É possível assim possuir elementos muitos bons nas fronteiras, mas às vezes de qualidade não tão boa internamente de acordo com o método utilizado. Este é o tipo de malha que será desenvolvido nesta dissertação. A Figura 3.43 exibe um exemplo de malha CPG.



Figura 3.43: Exemplo de malha *corner-point* que pode possuir ângulos variados.

### ***Quad-dominant***

Malhas *quad-dominant* são aquelas cuja maioria dos seus elementos são quadriláterais, admitindo-se o surgimento de triângulos. O surgimento de elementos de ordem maior (pentágonos e hexágonos, entre outros) maior deve ser evitado, e é inadequado, pois pode implicar que determinada partição de um domínio não pode ser simplificada por meio de triângulos. No pior dos casos, deve-se poder remover a partição da malha, reaplicar seu algoritmo e o inseri-lo novamente no domínio. A Figura 3.44 exibe um exemplo de malha *quad-dominant*.

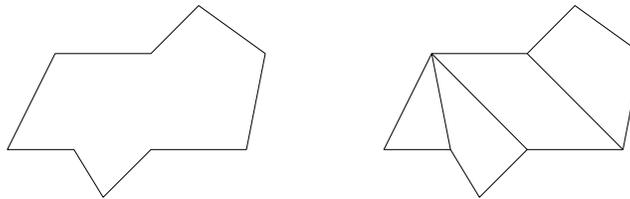


Figura 3.44: Exemplo de malha *quad-dominant*: ocorre a presença de triângulos.

## **3.4 Metodologia para geração de malha**

As técnicas ou estratégias que servem para geração de uma malha quadrilateral são chamadas de quadrilaterização ou quadrangulação (referente a quadriláteros ou quadrângulos respectivamente). Ainda é possível citar a tetragonização (referente à tetragonos), mas este termo não é muito usual na literatura científica. Uma quadrilaterização ainda pode ser chamada de convexa, caso todos os seus elementos sejam quadriláteros convexos, ou côncava, caso exista a formação de quadriláteros côncavos. Uma vez que se começa a desenvolver um método de quadrilaterização, deve-se sempre decidir se ele será feito por método direto ou indireto e é isto que será definido a seguir.

### 3.4.1 Indireta

A metodologia indireta é aquela que se utiliza de qualquer método de triangulação para em seguida realizar uma quadrilaterização. Esta quadrilaterização posterior deve ser feita em tempo linear  $O(n)$  e sem adicionar mais do que  $O(n)$  pontos de Steiner, já que toda a complexidade do algoritmo deve se localizar na triangulação. A Figura 3.45 exibe um exemplo de quadrilaterização indireta pela aplicação do algoritmo desenvolvido por De Berg (36).

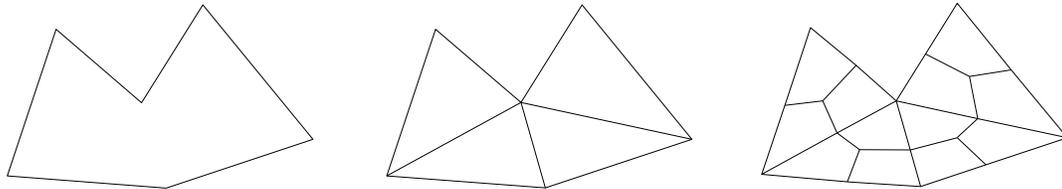


Figura 3.45: Exemplo de quadrilaterização por metodologia indireta.

### 3.4.2 Direta

A metodologia direta é aquela que não se utiliza de qualquer método de triangulação anterior para em seguida realizar uma quadrilaterização. Como esta quadrilaterização é independente de qualquer outro algoritmo, não existe um limite inferior ou superior para sua complexidade, apesar de ser preferencial a menor ordem possível. O limite para adição de pontos de Steiner da ordem de  $O(n)$  ainda permanece, pois se é adicionado mais do que isto, seria melhor realizar um método indireto a princípio.

A Figura 3.46 exibe um exemplo de quadrilaterização direta pela adição de diagonais. Este método do exemplo não funciona sempre, e serve apenas como ilustração. Como é possível observar e já foi de fato provado por Lai (44, 45), um método direto possui vantagens sobre uma triangulação anterior, mesmo se o método de triangulação ou quadrilaterização forem alterados.

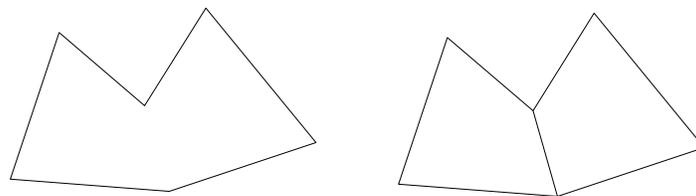


Figura 3.46: Exemplo de quadrilaterização por metodologia direta: adição de diagonais.

### 3.5 Considerações Finais

Neste capítulo foram abordados alguns conceitos necessários para realizar uma quadrilaterização convexa a partir de um polígono qualquer. Alguns destes conceitos serão usados ao longo desta dissertação, e outros não, mas espera-se que sirvam de auxílio para que um pesquisador seja capaz de desenvolver sua própria técnica munido das teorias mais fundamentais que existem nos processos existentes. Prova-se que ciclos convexos pares implicam em uma quadrilaterização por diagonais, e que quadriláteros  $n$ -conexos permitem a manutenção de ciclos pares. Por fim, os tipos de malhas existentes de quadriláteros foram apresentados.

No próximo capítulo serão discutidos os quatro métodos desenvolvidos nesta dissertação para a realização de uma quadrilaterização convexa. Dois destes métodos utilizam de metodologias diretas e dois de metodologias indiretas. Todos os algoritmos que serão exibidos adicionam quadriláteros  $n$ -conexos como qualquer algoritmo de quadrilaterização, mas, no último algoritmo de quadrilaterização incremental, será feita a adição explícita de quadriláteros  $n$ -conexos convexos.

## 4. Estratégias para resolução

Este capítulo discute os algoritmos para geração de uma malha de quadriláteros convexa. Quadrilaterização convexa é aquela em que todos os seus quadriláteros gerados são convexos; ao contrário, uma quadrilaterização côncava produz pelo menos um quadrilátero côncavo.

A construção de uma malha pode ser bastante difícil, dependendo do domínio do problema. Esta dificuldade advém da presença de vários fatores, isto é, restrições, que aumentam o desafio de geração das malhas, como ângulos côncavos, linhas poligonais, buracos ou vértices soltos na sua região interna. Ao aplicar-se a estratégia de decomposição em regiões, como o próprio nome indica, o domínio é particionado em regiões mais simples para construção de uma malha, sem a presença de alguns ou todos estes fatores. Nem todas as técnicas foram implementadas de forma a lidar com todas as restrições, contudo, isto não significa que não seja possível lidar com as mesmas, e sim, que até o momento da conclusão deste trabalho, ainda não foram implementadas todas as restrições para as quatro técnicas. As restrições lidadas por cada técnica são especificadas em seu escopo.

### 4.1 Ponto Médio

#### Escopo

Esta técnica adiciona novos vértices no ciclo da fronteira e internamente ao domínio. É capaz de lidar com regiões com quaisquer restrições, exceto vértices soltos internos no momento, e quadrilaterizar quaisquer polígonos convexamente de forma não estrita. O número de vértices é sempre dobrado na fronteira, o que garante uma quantidade de vértices par no ciclo. Com o aumento de vértices no ciclo da fronteira inseridos pelo algoritmo, é possível aumentar a qualidade da malha, uma vez que elementos irregulares têm seu tamanho reduzido.

#### Ideia

Através do uso do ponto médio em uma região convexa é possível quadrilaterizá-la convexamente. Qualquer domínio, que possa ser triangularizado, pode ser dividido em regiões convexas, pois o

triângulo é a menor região convexa existente. Portanto, particionando-se um domínio em regiões convexas é possível quadrilaterizá-lo pelo uso do ponto médio. A prova formal desta afirmação será feita nos trabalhos futuros, no momento, a intuição desta prova é apresentada.

O ponto médio ou o baricentro de um polígono é o ponto equidistante de todos os vértices que o compõem (Figura 4.1). Fisicamente, o baricentro é o centro de massa de um objeto que coincide com a localização geométrica quando a distribuição de massa é homogênea por todo o corpo.

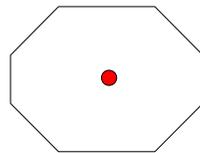


Figura 4.1: Ponto médio de um polígono convexo.

Parece natural, então, este vértice ser usado para construir quadriláteros, já que os quadriláteros serão igualmente distribuídos pelo domínio. O baricentro também é utilizado na suavização Laplaciana para melhorar os elementos de uma quadrilaterização, alterando a posição de um vértice baseado nos seus vizinhos. Contudo, este vértice não pode ser usado sempre, já que para regiões côncavas, ele pode se localizar externamente ao domínio (Figura 4.2).

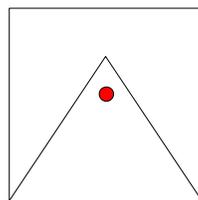


Figura 4.2: Ponto médio de um polígono côncavo.

Para não correr este risco, e para aplicar o baricentro, é preciso reduzir o domínio a regiões convexas, e isto é de fato o que o algoritmo realiza primeiro. Parece claro que se forem removidos os ângulos côncavos de qualquer geometria, o que resta são ângulos convexos e, portanto, regiões convexas. Para remover os ângulos côncavos da geometria, há pelo menos duas estratégias possíveis e ambas envolvem o uso da bissetriz ou trissetriz. Bissetriz é o segmento que divide um ângulo em dois ângulos iguais (Figura 4.3a), enquanto que a trissetriz é um de dois segmentos que divide o ângulo em três ângulos iguais (Figura 4.3b).

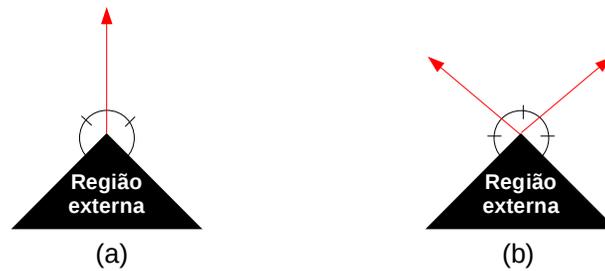


Figura 4.3: Divisão de ângulos: a) bissetriz b) trissetriz.

A primeira estratégia é pelo uso da bissetriz ou trissetriz do ângulo, já que o maior ângulo em um polígono é  $360^\circ$  (que é o resultado da soma do seu ângulo interno com seu ângulo externo). Se um ângulo qualquer  $\alpha$  de um polígono for menor que  $360^\circ$ , então a bissetriz do ângulo define dois ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  menores que  $180^\circ$ . Se  $\alpha < 360^\circ$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$  e  $\alpha_1 = (\alpha/2)$ , então  $\alpha_i < 180^\circ$  para  $i \in [1,2], i \in \mathbb{N}$ . A única exceção é para ângulos que sejam iguais a  $360^\circ$ , em que ângulos rasos são formados. Para resolver este problema, pode-se usar as trissetrizes para dividir o ângulo em três partes iguais  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  convexas de  $120^\circ$ . Se  $\alpha = 360^\circ$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_2 = \alpha_3$  e  $\alpha_1 = (\alpha/3)$ , logo  $\alpha_i = 120^\circ$  para  $i \in [1,3], i \in \mathbb{N}$ . Se esta estratégia for aplicada repetidas vezes obtem-se uma divisão em regiões convexas. Contudo, uma quantidade linear de pontos de Steiner é adicionada nas regiões de cruzamento com os segmentos ou com o domínio proporcional a quantidade de ângulos côncavos, e isto sem adicionar elementos quadriláteros ainda. Por este motivo, uma segunda estratégia é adotada.

A segunda estratégia faz uso exclusivo da bissetriz, mas não se utiliza da bissetriz para dividir o ângulo e sim de diagonais que mais se aproximam da bissetriz do ângulo, usando assim vértices do próprio polígono sem a adição de novos vértices (Figura 4.4). De fato uma diagonal qualquer sempre divide um ângulo menor que  $360^\circ$  em pelo menos um ângulo convexo (Teorema 4.1).

**Teorema 4.1:** *Uma diagonal qualquer sempre divide um ângulo menor que  $360^\circ$  em pelo menos um ângulo convexo.*

**Prova:** Uma diagonal  $d$  divide um ângulo qualquer  $\alpha$  em duas partes quaisquer  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , tal que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha, \quad \alpha_1 \neq 0 \quad e \quad \alpha_2 \neq 0. \quad (4.1)$$

Para qualquer ângulo existe uma bissetriz  $b$  que divide o ângulo  $\alpha$  em duas partes iguais  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$  de modo que

$$\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha, \quad \alpha_3 = \alpha_4, \quad \alpha_4 = (\alpha/2) \quad e \quad \alpha_4 < 180^\circ. \quad (4.2)$$

Se  $b = d$ , então  $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = \alpha_4$  e  $\alpha_1 = \alpha_4$ . E pela Equação 4.2, ambos os ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são

convexos. Se, caso contrário,  $b \neq d$ , então  $d$  divide ou  $\alpha_3$ , ou  $\alpha_4$  em duas partes  $\alpha_5$  e  $\alpha_6$  tal que  $\alpha_5 + \alpha_6 = \alpha_4$  ou  $\alpha_5 + \alpha_6 = \alpha_3$ . Assume-se  $\alpha_5 + \alpha_6 = \alpha_3$ , o que implica que  $\alpha_5 + \alpha_6 < 180^\circ$  pela Equação 4.2 e que a diagonal  $d$  divide o ângulo  $\alpha$  tal que  $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \alpha$  pela Equação 4.1. Logo, há quatro possibilidades:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\alpha_4 + \alpha_6) \text{ e } \alpha_2 = \alpha_5, \text{ ou} \\ \alpha_2 &= (\alpha_4 + \alpha_6) \text{ e } \alpha_1 = \alpha_5, \text{ ou} \\ \alpha_1 &= (\alpha_4 + \alpha_5) \text{ e } \alpha_2 = \alpha_6, \text{ ou} \\ \alpha_2 &= (\alpha_4 + \alpha_5) \text{ e } \alpha_1 = \alpha_6. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para qualquer um dos quatro casos,  $\alpha_6 < (180^\circ - a_5)$  ou  $\alpha_5 < (180^\circ - a_6)$ . Logo pelo menos um dos ângulos, ou  $\alpha_1$ , ou  $\alpha_2$  é convexo, isto é, menor que  $180^\circ$ . Se o ângulo for igual a  $0^\circ$ , o teorema é válido por vacuidade. ■

Quando uma diagonal é adicionada, desde que o ângulo seja menor que  $360^\circ$ , obtem-se pelo menos um ângulo convexo, e, caso exista, um ângulo côncavo de tamanho menor que o anterior. Esta estratégia é repetida sucessivamente até que não existam mais ângulos côncavos. É fácil perceber que esta divisão sempre será possível para qualquer domínio, pois, no pior caso formará uma triangulação anterior a quadrilaterização. Logo, a estratégia é um método direto, pois realiza a quadrilaterização convexa a partir de regiões convexas quaisquer. Espera-se que com diagonais próximas da bissetriz, evitem-se criar regiões muito finas quando possível.

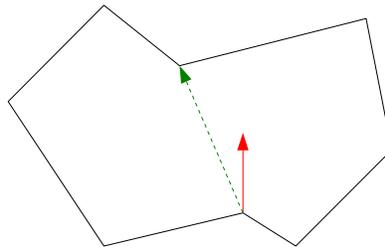


Figura 4.4: Bissetriz (vermelho) e diagonal (verde). Sem pontos de Steiner divide-se a figura em dois domínios convexos.

Para efetuar a quadrilaterização convexa de uma região convexa com  $n$  vértices  $v_i$ , tal que  $0 \leq i < n$ , calcula-se o seu baricentro

$$B = \frac{\sum_{i=0}^n v_i}{n}, \tag{4.4}$$

e, em seguida, os pontos médios dos segmentos que definem a região convexa são ligados ao baricentro (Figura 4.5). Como para cada região convexa de  $n$  vértices têm-se a adição de no máximo  $(n+1)$  vértices, o algoritmo quadrilateriza um domínio qualquer com  $O(n)$  vértices de Steiner. É um método

mais eficiente que gerar uma triangulação anterior, pois os polígonos gerados não têm a obrigação de serem triângulos e serão, portanto, menos numerosos.

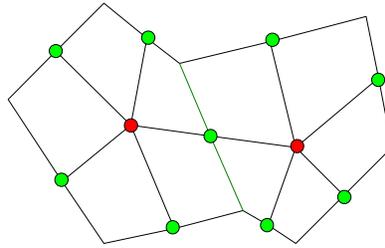


Figura 4.5: Quadrilaterização de um domínio usando o baricentro em vermelho, diagonal e os pontos médios em verde.

Uma última questão importante é a qualidade desta quadrilaterização convexa, já que o uso do ponto médio produz quadriláteros de tamanhos similares para uma mesma região, podendo e devendo gerar quadriláteros de tamanho alternados para regiões convexas diferentes. Para resolver isso, uma propriedade interessante dos polígonos é usada. Ao inserir qualquer região convexa internamente a si mesma em tamanho reduzido, é trivial quadrilaterizar a região entre a região maior e a região menor pela adição de diagonais entre seus vértices correspondentes (Figura 4.6). É possível repetir este processo quantas vezes forem necessárias aplicando o ponto médio só quando seus elementos estiverem próximos de um critério qualquer, como por exemplo, a área do menor elemento na malha. Repare que será necessário subdividir os lados dos polígonos inseridos desta maneira posteriormente. Este processo é chamado de domínio convexo reduzido.

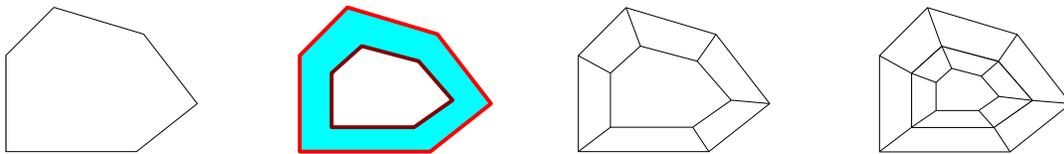


Figura 4.6: Refinamento de uma região convexa por domínio convexo reduzido. Insere-se o próprio domínio em tamanho reduzido repetidas vezes.

A estratégia do uso do ponto médio, para realizar uma quadrilaterização, foi utilizada primeiramente por Mark de Berg citado por Everett (36) e posteriormente por Catmull-Clark para suavização de curvas (34). O algoritmo se baseia nas ideias anteriores: de que toda região convexa pode ser quadrilaterizada convexamente pelo uso de seu baricentro, e de que todo polígono pode ser particionado em regiões convexas usando diagonais que se baseiam nas bissetrizes dos ângulos côncavos existentes (74).

É importante, antes de fornecer o algoritmo, caracterizar que, para esta dissertação, vértices que possuem um vizinho ou nenhum vizinho definem um ângulo de  $360^\circ$  (embora, o algoritmo apresentado não lide ainda com vértices sem nenhum vizinho). Todo vértice, salvo estes dois primeiros casos, definem um ângulo externo e um ângulo interno. Para buracos, os ângulos externos são definidos; para polígonos quaisquer, os ângulos internos são definidos; e para linhas poligonais, os ângulos internos e externos são definidos. A Figura 4.7 ilustra a classificação dos ângulos de acordo com o caso.

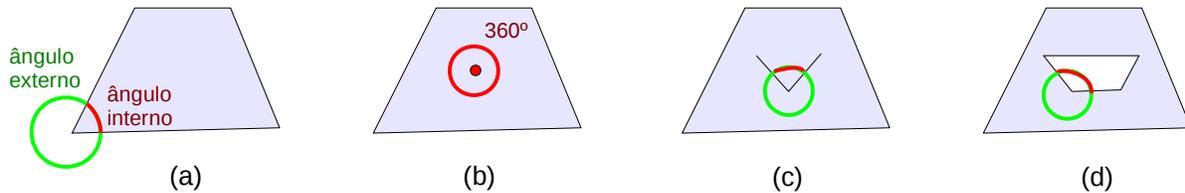


Figura 4.7: Ângulo externo (verde) e interno (vermelho) para: (a) polígono, (b) vértice interno, (c) linha poligonal e (d) buraco.

## Algoritmo

O algoritmo pode ser reduzido em duas partes, resumidamente: traçar uma diagonal que se aproxima da bissetriz de um ângulo côncavo até que não existam mais ângulos côncavos; e, usar o ponto médio para quadrilaterizar as regiões convexas resultantes. O Algoritmo 4.1 descreve o procedimento principal do algoritmo de ponto médio. E a Figura 4.8 traz uma ilustração de um domínio que será quadrilaterizado.

```

1. Algoritmo quadPontoMedio()
2. ponto = maiorConcavo(domínio)
3. subQuadPontoMedio(ponto, malha)

```

Algoritmo 4.1: Procedimento principal do ponto médio.

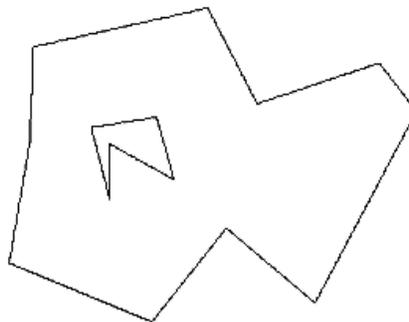


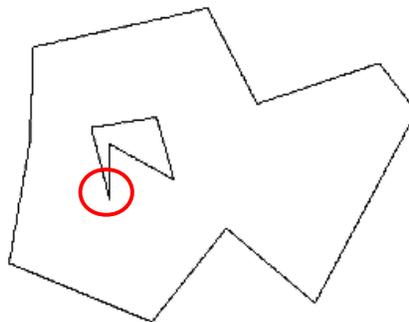
Figura 4.8: Exemplo de um domínio que será quadrilaterizado pelo Algoritmo 4.1.

O algoritmo começa capturando o maior ângulo cômcavo através do método *maiorConcavo* (Algoritmo 4.2). Já que descobrir se um polígono possui ângulos cômcavos custa obrigatoriamente  $O(n)$ , em que  $n$  é o número de vértices no polígono, pode-se escolher o maior ângulo cômcavo. Transfere-se então o vértice, que o contém o ângulo, para o método *subQuadPontoMedio* (Algoritmo 4.3). A Figura 4.9 apresenta o resultado inicial do método *maiorConcavo* sobre um domínio.

```
1. Algoritmo maiorConcavo()  
2. Se ( $n < 4$ ) retorna "nãõ existe"  
3. Se existe(ângulo  $\geq$  LIMITE)  
4.     Retorna maior(ângulo)  
5. Retorna "nãõ existe"
```

*Algoritmo 4.2: Descrição do método maiorConcavo.*

O limite que é citado no Algoritmo 4.2 é por padrão  $180^\circ$ , de modo que enquanto existir ângulos cômcavos ou rasos será retornado o vértice que possui o maior ângulo. O limite pode ser reduzido se for necessário, ou se o usuário desejar. Em caso de um limite muito pequeno será gerada uma triangulação, e por isto é importante definir um limite mínimo de vértices para os ciclos.



*Figura 4.9: Método maiorConcavo retorna um vértice envolvido pelo círculo.*

```

01. Algoritmo subQuadPontoMedio(p, malha)
02. Se (naoExiste(p))
03.     quadrilaterizacao(malha)
04. Senão
05.     bissetriz(angulo(p))
06.     diagonalMaisProximaBissetriz(Domínio)
07.     Se (precisaInverter(p, q))
08.         InverteCiclo()
09.     d1 = criaDiagonal(p, q)
10.     d2 = criaDiagonal(q, p)
11.     atualizaCiclos()
12.     poligonoA = criaPoligono(d1)
13.     Se (poligonoA.possuiDiagonal(d2))
14.         adicionaHolesRetas(poligonoA)
15.         pA = maiorConcavo(poligonoA)
16.         subQuadPontoMedio(pA, malha)
17.     Senão
18.         poligonoB = criaPoligono(d2)
19.         adicionaHolesRetas(poligonoA, poligonoB)
20.         pA = maiorConcavo(poligonoA)
21.         subQuadPontoMedio(pA, malha)
22.         pB = maiorConcavo(poligonoB)
23.         subQuadPontoMedio(pB, malha)

```

*Algoritmo 4.3: Descrição do método subQuadPontoMedio.*

O Algoritmo 4.3 descreve o corpo principal do procedimento para efetuar a quadrilaterização. A execução do algoritmo depende da existência de um vértice qualquer  $p$  que contém o maior ângulo côncavo no domínio. Logo, o método começa analisando se existe ou não o vértice  $p$ . Se não houver mais ângulos côncavos, o processo final de quadrilaterização convexa com o ponto médio é efetuado (Algoritmo 4.5). Caso contrário, calcula-se a bissetriz do ângulo e depois se verifica qual diagonal mais se aproxima da bissetriz através do ângulo entre os dois segmentos. A Figura 4.10 exibe o resultado da aplicação sucessiva do Algoritmo 4.3 a um domínio.

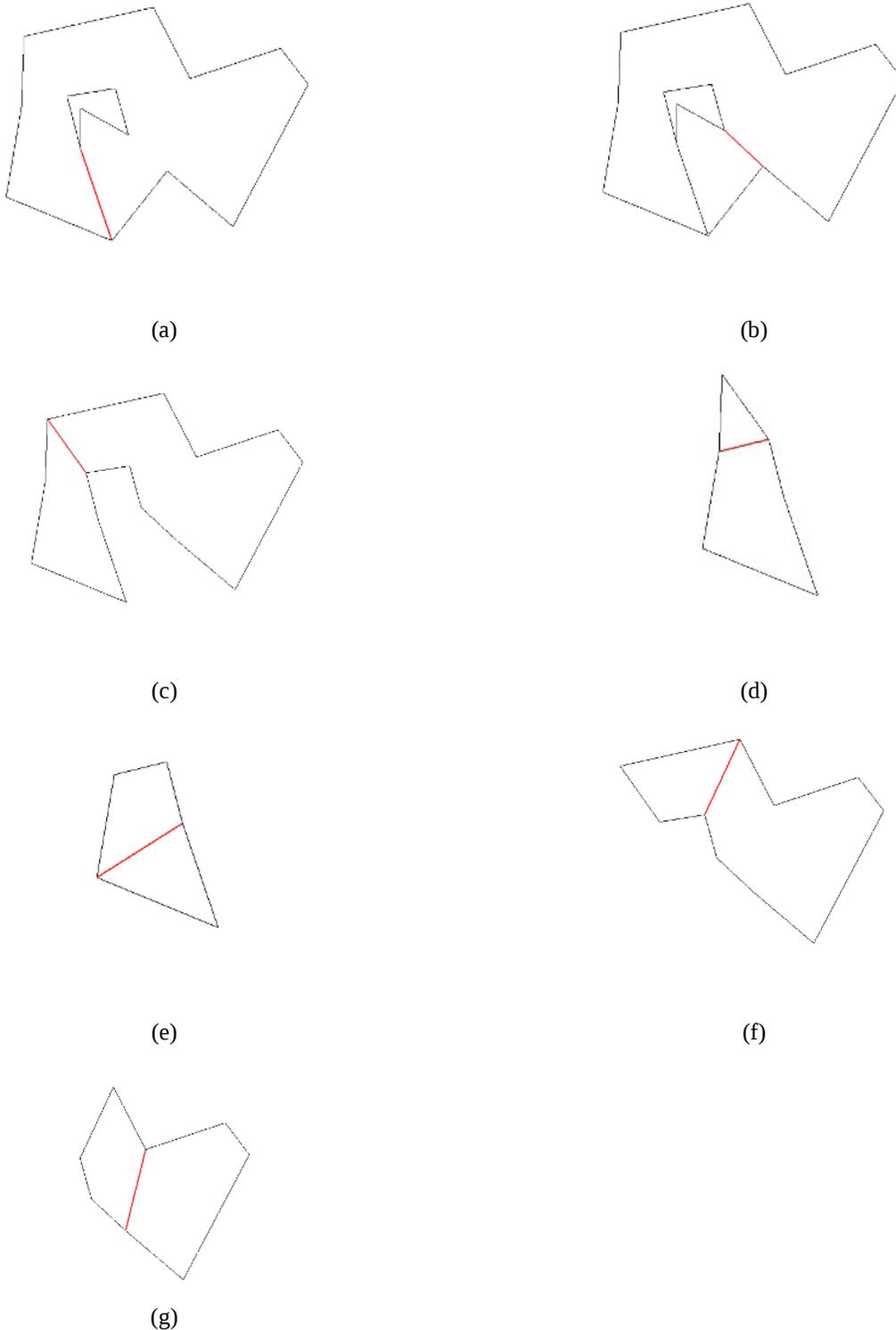


Figura 4.10: Divisão de um domínio em regiões convexas através da adição de diagonais pelo Algoritmo 4.3: (a) Primeira diagonal é adicionada, obtêm-se ciclo único; (b) Segunda diagonal é adicionada ao domínio, obtêm-se dois ciclos. Um dos ciclos é convexo; (c) Terceira diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos; (d) Quarta diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos. Um dos ciclos é triangular; (e) Quinta diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos. Ambos os ciclos são convexas; (f) Sexta diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos. Um dos ciclos é convexo; (g) Sétima diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos. Ambos são convexas;

Neste trabalho, ciclos são usados para poder verificar os ângulos internos ou externos de forma correta, isto é, é preciso que seja definido um sentido para o ciclo principal na fronteira e os ciclos que são formados através da adição de diagonais para que se possa saber a ordem que os vértices precisam ser percorridos em cada ciclo. Sentido é a ordem que dois vértices quaisquer são percorridos; logo, o ciclo  $\langle a,b \rangle$  é diferente do ciclo  $\langle b,a \rangle$  devido ao seu sentido. A saber, e arbitrariamente, o sentido anti-horário define os ângulos internos e o sentido horário define os ângulos externos (Figura 4.11).

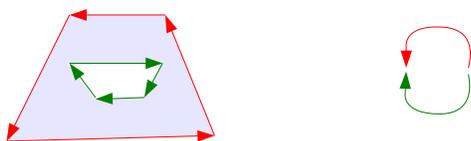


Figura 4.11: Sentido anti-horário em verde e sentido horário em vermelho.

Pode definir dois ciclos ao adicionar uma diagonal, já que o domínio possivelmente será particionado. Logo, ao adicionar uma diagonal, sempre será adicionada uma segunda diagonal idêntica a primeira, mas com o sentido diferente, o que permitirá que o segundo ciclo seja formado caso seja necessário. É importante saber se o sentido de um ciclo foi alterado quando uma diagonal é adicionada, e se é preciso inverter o sentido do ciclo no domínio corrente. Para saber isto, somam-se os dois ângulos que foram formados pela adição da diagonal pertencentes a um mesmo vértice para ambos os lados da diagonal (Figura 4.12). Se o sentido estiver correto, em ambos os casos, o somatório dos ângulos não deverá ultrapassar o ângulo original, já uma diagonal apenas divide o ângulo, mas não o aumenta.

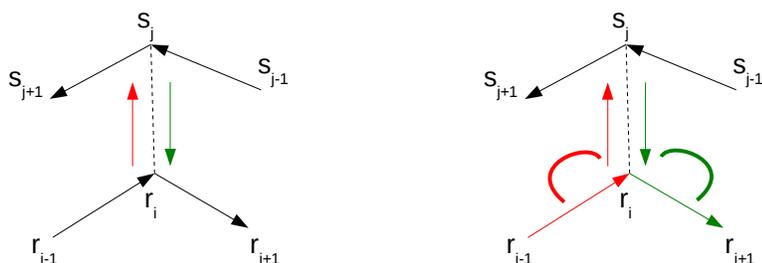


Figura 4.12: Adição de diagonais à esquerda e ângulos usados para verificar a validade dos ciclos à direita.

Uma vez que se tenha atualizado os ciclos de acordo, isto é, com a inserção das duas diagonais no ciclo existente. Possivelmente dois ciclos são criados tal que  $C_1 = \langle \dots, r_{i-1}, r_i, s_j, s_{j+1}, \dots \rangle$  e  $C_2 = \langle \dots, s_j, r_i, r_{i+1}, \dots \rangle$ ; tenta-se criar um novo ciclo a partir da diagonal  $(r_i, s_j)$ , chamado de polígono A. Se o polígono A conter a diagonal invertida  $(s_j, r_i)$ , então  $C_1 = C_2$  e nenhum novo ciclo é criado. Adicionam-se quaisquer elementos que não façam parte do ciclo ao polígono A, e repete-se o processo

recursivamente. Procura-se o maior ângulo côncavo, e o método *subQuadPontoMedio* é aplicado novamente. Caso contrário, se o polígono A não possuir a diagonal invertida  $(s_j, r_i)$ , então, é necessário criar um novo ciclo partindo deste segmento que será chamado de polígono B. O método *adicionaHolesRetas* (Algoritmo 4.4) é aplicado para quaisquer outros segmentos que não façam parte dos polígonos A ou B, de forma a adicioná-los a um dos dois. Por fim, repete-se o processo para o polígono A e para o polígono B, após encontrar o maior ângulo côncavo em cada ciclo respectivo.

```

01. Algoritmo adicionaHolesRetas(Polígono pA, Polígono pB)
02. para cada segmento S do domínio
03.   Se ((pA.possui(S) = falso) e (pB.possui(S) = falso))
04.     Se ((pA.interna(S) = falso) e (pB.interna(S) = falso))
05.       cA = pA.contaConcavos()
06.       cB = pB.contaConcavos()
07.       Se (cA > cB)
08.         pA.adicionaHR(S)
09.       senão
10.         pB.adicionaHR(S)
11.     senão
12.       Se (pA.interna(S))
13.         pA.adicionaHR(S)
14.       senão
15.         pB.adicionaHR(S)

```

*Algoritmo 4.4: Descrição do método adicionaHolesRetas.*

O Algoritmo 4.4 descreve como segmentos que não pertencem aos polígonos pA e pB são adicionados a um dos dois polígonos. A função interna que é usada ao longo de todo este código aplica o algoritmo do tiro, isto é, dispara um raio e verifica quantos cruzamentos com o ciclo este raio realiza: se for uma quantidade ímpar significa que o segmento é interno ao polígono e retorna verdadeiro, caso contrário, a quantidade de segmentos é par e a função retorna falso (Figura 4.13).

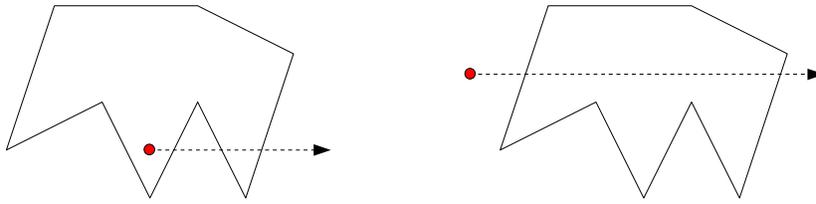


Figura 4.13: Algoritmo do tiro para verificar a posição do vértice em vermelho: verdadeiro à esquerda e falso a direita.

O método *contaConcavos* conta quantos ângulos côncavos cada polígono possui, pois pode ocorrer que um segmento seja externo ao dois polígonos e neste caso é preciso realizar uma escolha de qual polígono ele deve ser adicionado. As diagonais podem ser criadas entre buracos ou linhas poligonais que não faziam parte do ciclo principal inicial. O ciclo principal torna-se um ciclo secundário. A Figura 4.14 exhibe um exemplo desta situação.

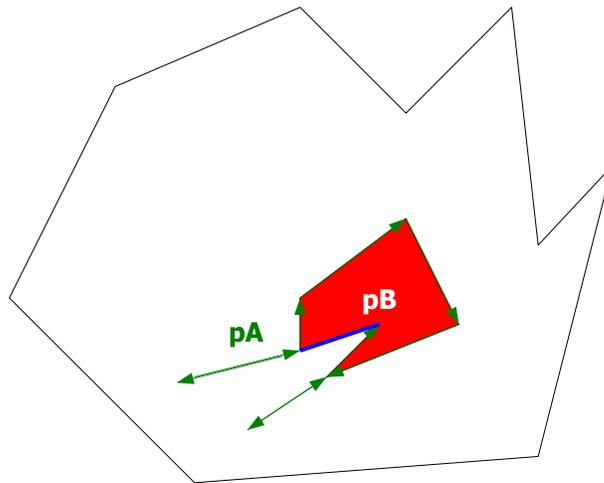


Figura 4.14: Exemplo de caso em que é necessário aplicar o método *contaConcavos*.

Repare na figura que os segmentos em preto são externos tanto ao polígono A em verde quanto o polígono B em vermelho. Em azul, tem-se a diagonal que foi recentemente adicionada. Para saber se os segmentos em preto devem ser adicionados ao polígono pA ou pB, conta-se a quantidade de ângulos côncavos. Como o polígono A está no sentido horário, possui maior quantidade de ângulos côncavos, enquanto B no sentido anti-horário possui menos. Esta contagem deve ser feita da seguinte maneira,

$$Q = \frac{\sum_{i=0}^n f(a_i)}{n}, \quad (4.5)$$

onde Q representa o somatório da função f para todos os n ângulos de um ciclo tal que  $f(a_i)=1$ , se  $a_i > 180$  e  $f(a_i)=0$ , se  $a_i \leq 180$ . Para concluir o algoritmo, resta apenas explicar o método Quadrilaterização (Algoritmo 4.5), que divide as regiões convexas em quadriláteros.

```

1. Algoritmo quadrilaterizacao(segmentos, malha)
2. b = encontraBaricentro(segmentos)
3. Para cada segmento s(i) e s(i+1)
4.     p = pontoMedio(s(i))
5.     q = pontoMedio(s(i+1))
6.     e = criaQuadrilatero(p, pontoFinal(s(i)), q, b)
7.     malha.adicionaLista(e)

```

Algoritmo 4.5: Descrição do método de quadrilaterização.

Primeiro, calcula-se o baricentro de um ciclo através da Fórmula 4.4. Em seguida para cada par de segmentos  $s_i$  e  $s_{i+1}$  o método *pontoMedio* calcula os pontos médios dos segmentos. Este método efetua o cálculo apenas se o vértice já não tiver sido calculado, caso contrário, retorna o vértice. E por fim, o método *criaQuadrilátero* constrói o elemento convexo que é adicionado à malha, concluindo-se assim o algoritmo. A Figura 4.15 exibe o resultado final da quadrilaterização convexa do domínio exibido na Figura 4.8. A Figura 4.16 exibe um exemplo de quadrilaterização realizada pelo Algoritmo 4.5, após aplicações sucessivas do Algoritmo 4.3. As regiões convexas quadrilaterizadas que formaram a Figura 4.15. E por fim, a Figura 4.17 exibe dois exemplos de refinamento desta malha usando o ponto médio sucessivas vezes.

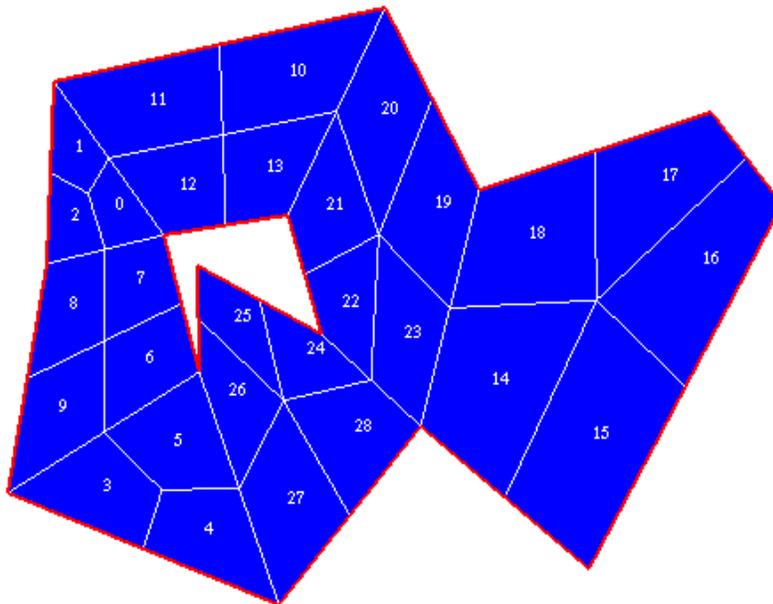
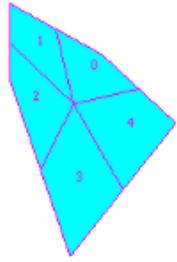
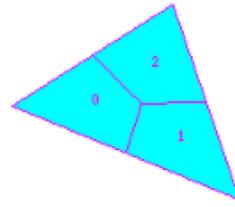


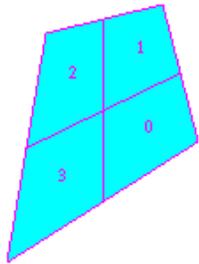
Figura 4.15: Quadrilaterização convexa do domínio exibido na Figura 4.8.



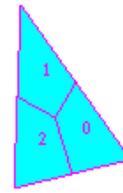
(a)



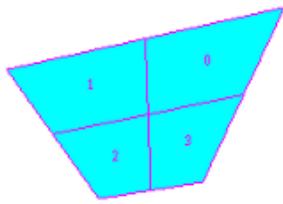
(b)



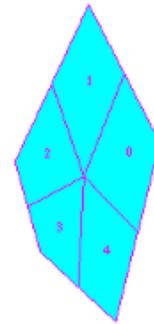
(c)



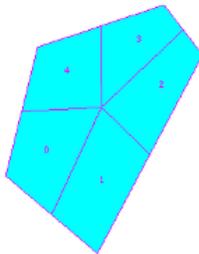
(d)



(e)

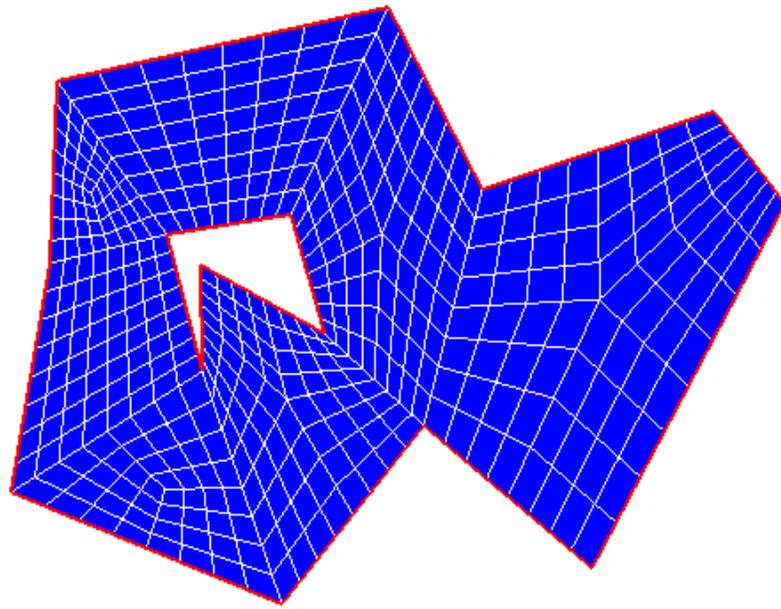


(f)

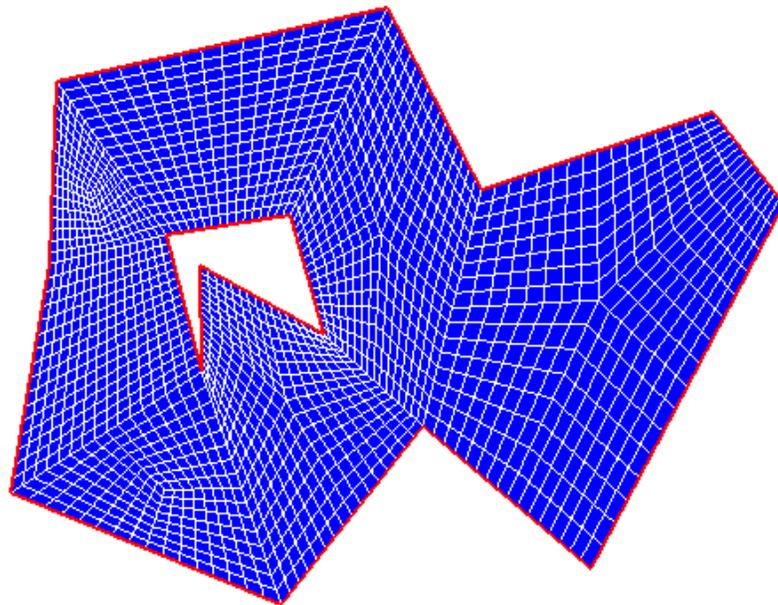


(g)

Figura 4.16: Quadrilaterização de regiões convexas pelo Algoritmo 4.5. Adiciona-se o baricentro e os pontos médios dos segmentos são ligados ao baricentro. As regiões de (a) à (g) são as regiões do domínio apresentado na Figura 4.8.



(a)



(b)

Figura 4.17: Refino de uma quadrilaterização convexa. (a) Duas iterações. (b) Três iterações.

## 4.2 TriQuad

### Escopo

Esta técnica adiciona novos vértices no ciclo da fronteira e internamente ao domínio. É capaz de lidar com regiões com quaisquer restrições, exceto vértices soltos internos no momento, e quadrilaterizar quaisquer polígonos convexamente de forma não estrita. O número de novos pontos pode ser dobrado na fronteira, caso não seja possível formar ciclos convexos pares, caso contrário, é possível quadrilaterizar o domínio pelo uso exclusivo de diagonais e sem a adição de novos pontos.

### Ideia

Realiza-se uma triangulação anterior a uma quadrilaterização. Este processo é chamado de TriQuad. Se for possível quadrilaterizar convexamente um triângulo, então é possível quadrilaterizar convexamente qualquer triangulação. Isto pode ser feito pela adição de  $O(n)$  pontos de Steiner (36). O processo que é usado para quadrilaterização dos triângulos é similar ao que já foi visto, o baricentro é calculado e depois ligado aos pontos médios de seus lados (Figura 4.18).



Figura 4.18: Quadrilaterização de um triângulo qualquer.

Pode-se utilizar aqui inclusive o triângulo de Varignon com a adição de cinco novos pontos. O objetivo desta técnica é usá-la como referência a uma técnica tradicional, logo, o método desenvolvido por De Berg é usado e quatro novos vértices são adicionados. O triângulo de Varignon e o *boomerang* são usados em técnicas posteriores. Outro ponto importante é que qualquer ponto interno de um

triângulo pode ser usado para criar uma quadrilaterização convexa, apesar do baricentro ser usado novamente. Desde que este vértice seja não coincidente com os vértices da fronteira, ou pertencente aos lados para realizar uma quadrilaterização convexa (Teorema 4.2).

**Teorema 4.2:** *Qualquer ponto interno de um triângulo pode ser usado para quadrilaterizar um triângulo por meio de trapézios.*

Usar qualquer ponto interno para realizar uma quadrilaterização é possível para triângulos, desde que, os três segmentos que liguem este vértice interno aos lados do triângulo sejam paralelos aos três lados adjacentes a que se deseja adicionar o segmento. Deve-se seguir a ordem de construção do triângulo (Figura 4.20), isto é, se o lado vizinho a direita é usado para realizar a projeção do vértice interno no lado atual, então este padrão deve ser repetido para todos os lados. Note-se que quando segmentos paralelos aos lados são usados, trapézios são formados. Um trapézio por definição possui ângulos colaterais internos que somam  $180^\circ$  (Figura 4.19), já que seus lados não paralelos podem ser vistos como transversais. Logo, os quadriláteros gerados são convexos.

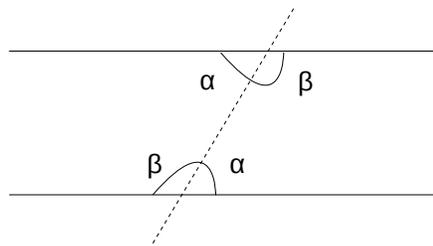


Figura 4.19: Dois segmentos paralelos cortados por uma transversal pontilhada.  $\alpha + \beta = 180^\circ$ ,  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ .  $\alpha$  e  $\beta$  são ângulos colaterais internos.

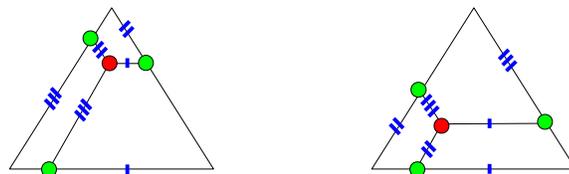


Figura 4.20: Quadrilaterização de triângulo usando um ponto interno qualquer. Os traços em azul indicam paralelismo.

**Prova:** Primeiramente, algumas definições. Se o segmento  $(x_i, x_{i+1})$  é paralelo à  $(x_j, x_{j+1})$  então  $(x_i, x_{i+1}) \parallel (x_j, x_{j+1})$ . Em um lado qualquer  $(i, f)$ ,  $i$  é o vértice inicial e  $f$  é o vértice final de um lado em um ciclo qualquer. Se um lado qualquer é conexo a outro lado, então eles possuem um vértice em comum. Assume-se que existe um triângulo qualquer tal que  $C_t = \langle a, b, c \rangle$  e sem perda de generalidade escolha um ponto qualquer  $y_m$  interno ao triângulo, tal que  $y_m$  não pode ser um vértice de  $C_t$  e nem fazer parte de um de seus lados. Se  $L = (u, v)$  é um lado qualquer,  $L \in S$ , tal que  $S = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$  então  $y_m \notin [u, v]$ . Projete-se o vértice  $y_m$  em  $(a, b)$  no vértice  $y_{ab}$ , claramente, não é possível projetar  $y_m$  em  $(a, b)$  se o segmento  $(y_m, y_{ab}) \parallel (a, b)$  por definição de paralelismo, logo  $(y_m, y_{ab}) \parallel (b, c)$  ou  $(y_m, y_{ab}) \parallel (a, c)$  (Figura 4.21). Se for escolhido  $(y_m, y_{ab}) \parallel (b, c)$  então  $y_m$  foi projetado em  $(a, b)$  por paralelismo à direita pois o vértice  $b$  é inicial em  $(b, c)$  e final em  $(a, b)$ . De forma similar, se for escolhido  $(y_m, y_{ab}) \parallel (a, c)$  então  $y_m$  foi projetado em  $(a, b)$  por paralelismo à esquerda pois o vértice  $a$  é final em  $(c, a)$  e inicial em  $(a, b)$ . Repete-se o mesmo processo para os lados  $(b, c)$  e  $(c, a)$ , e forma-se os segmentos  $(y_m, y_{bc})$  e  $(y_m, y_{ca})$ . Estes segmentos obedecem a mesma regra de formação, tal que  $(y_m, y_{ab})$ ,  $(y_m, y_{bc})$  e  $(y_m, y_{ca})$  devem ser paralelos a lados distintos do triângulo e todos eles devem ter sido formados por apenas uma forma de paralelismo, ou paralelismo à direita, ou paralelismo à esquerda.

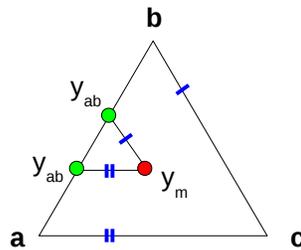


Figura 4.21: O vértice em vermelho pode ser projetado por paralelismo a um dos dois lados adjacentes.

Esta projeção por paralelismo à direita ou à esquerda sempre existe, pois o triângulo é um polígono convexo e o vértice que se deseja projetar  $y_m$  é interno ao triângulo. Pode-se, portanto, projetar o vértice  $y_m$  em qualquer direção que ele sempre intercepta em algum ponto dos lados do triângulo. No caso, escolhem-se direções paralelas a lados distintos de acordo com uma regra, mas sem a perda desta propriedade.

Três quadriláteros serão formados trivialmente, já que, pela regra de construção, o vértice  $y_m$  se projeta sempre em lados adjacentes de um triângulo o que forma dois segmentos  $S_1$  e  $S_2$  sem perda de generalidade, e sua projeção  $p$  em um lado qualquer divide o lado  $L = (a, b)$  em dois lados  $L_1 = (a, p)$  e  $L_2 = (p, b)$ . Se estes dois segmentos  $S_1$  e  $S_2$  forem unidos com os lados distintos  $L_n$  e  $L_m$ , tal que

$1 \leq n, m \leq 2$ , resultantes da divisão dos lados adjacentes pela projeção de  $y_m$ , e que  $L_n$  e  $L_m$  sejam conexos com estes segmentos  $S_1$  e  $S_2$  respectivamente e entre si, um quadrilátero  $Q$  formado por  $S_1, S_2, L_n$  e  $L_m$  é obtido.

Resta provar que este quadrilátero  $Q$  é convexo. Como foi visto  $Q = \{ S_1, S_2, L_n \text{ e } L_m \}$  e pela regra de formação ou  $S_1 // L_m$  ou  $S_2 // L_n$ . Desta forma, o quadrilátero  $Q$  é um trapézio e todo trapézio de lados não coincidentes é convexo, já que os seus lados não paralelos podem ser vistos como transversais cujos seus ângulos colaterais internos somam  $180^\circ$ . ■

Para construir a triangulação, repete-se o processo apresentado no Tópico 4.1 com apenas uma diferença. Ao obter regiões convexas no final do processo são aplicados dois métodos distintos, antes de realizar uma quadrilaterização. O primeiro método realiza uma triangulação escolhendo um dos vértices da região convexa como referência e criando diagonais a partir deste vértice para todos os outros vértices para os quais não exista um lado entre eles na sequência do ciclo que constitui o domínio (Figura 4.22).

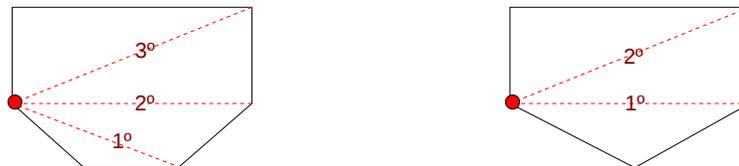


Figura 4.22: Triangulação de uma região convexa usando um vértice de referência.

Uma vez que se tenha realizado a triangulação, o domínio é quadrilaterizado. A fronteira termina com o dobro de vértices, logo, qualquer fronteira ímpar com  $(2n+1)$  vértices transforma-se em par com  $(4n+2)$  vértices. Deste modo, o teorema de Prosenjit (20) permanece válido. A Figura 4.23 ilustra o processo de quadrilaterização convexa de regiões convexas pelo primeiro método.



Figura 4.23: Triquad, método 1, de um domínio par a esquerda e ímpar a direita.

O segundo método que foi utilizado é similar ao primeiro método, mas ao invés de criar diagonais na sequência do ciclo, criam-se diagonais na sequência do ciclo entre vértices alternados (Figura 4.24). Desta forma se existem dois vértices em sequência no ciclo  $C = \langle \dots, t, \dots, u, v, \dots \rangle$ , e têm-se  $t$  como vértice de referência, então, se existe o lado  $(t, u)$ , não existe o lado  $(t, v)$ . Uma única exceção é feita para o último vértice, pois pode ser necessária a formação de um triângulo para concluir um ciclo ímpar.



Figura 4.24: Quadrilaterização de região convexa pelo uso de diagonais, para um domínio ímpar obtêm-se triângulos.

Neste método, triângulos são unidos aos pares para formar quadriláteros convexos antes de efetuar a quadrilaterização final. Neste método pode ser possível que não seja preciso efetuar uma quadrilaterização posterior, desde que, não haja a formação de triângulos. Se a construção de regiões convexas conseguir formar apenas ciclos pares, então é possível realizar uma quadrilaterização convexa pelo uso apenas das diagonais. Contudo, na grande maioria dos casos serão inseridos triângulos, devido a quantidade ímpar de vértices no ciclo da fronteira ou então devido a existência de uma geometria que force a criação de um quadrilátero côncavo em que seriam inseridos dois triângulos, cada um pertencente a uma região convexa diferente. A Figura 4.25 ilustra o processo de quadrilaterização de regiões convexas pelo segundo método.

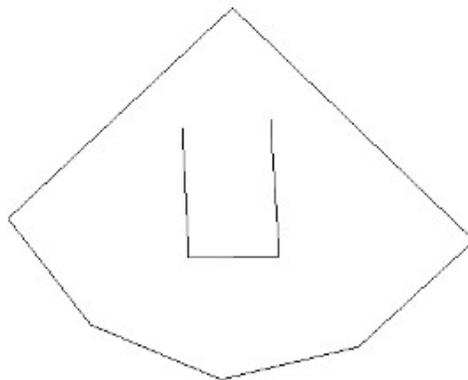


Figura 4.25: Triquad, método 2, de um domínio par a esquerda e ímpar a direita.

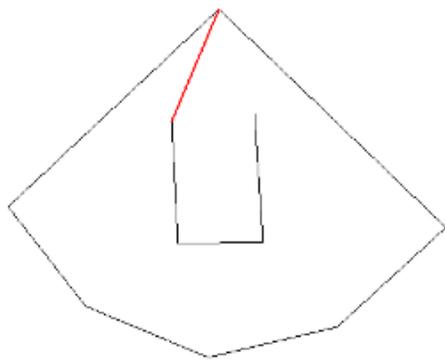
No exemplo anterior (Figura 4.25), realizou-se uma quadrilaterização convexa pelo ponto médio, independente do ciclo ser par apenas para demonstrar o método (assume-se que o ciclo par faça parte de um domínio maior que contenha triângulos). A quantidade de novos vértices na fronteira continua a mesma, mas a quantidade de pontos internos ao domínio foi reduzida visivelmente. Como sabe-se que qualquer figura convexa pode ser quadrilaterizada convexamente, um quadrilátero convexo também pode ser quadrilaterizado convexamente em partes menores sem prejudicar a validade do algoritmo.

## Algoritmo

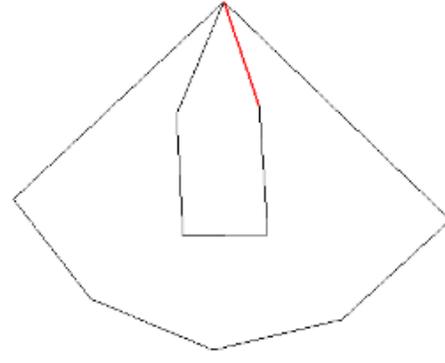
O procedimento principal do algoritmo do Triquad é idêntico ao Algoritmo 4.3 com mudança apenas no procedimento de quadrilaterização para os métodos I e II. Primeiramente, a alteração no procedimento para o método I é analisada (Algoritmo 4.6). A Figura 4.26 exibe um domínio que será quadrilaterizado convexamente pelos métodos I e II. E a Figura 4.27 exibe o domínio particionado em regiões convexas através de diagonais.



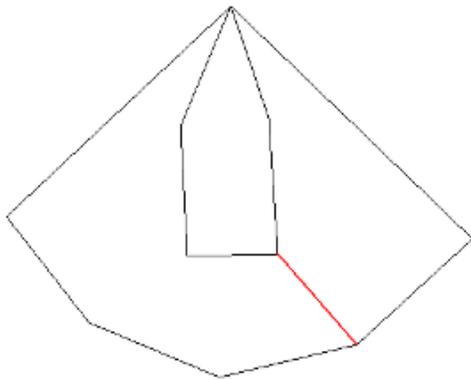
*Figura 4.26: Domínio a ser quadrilaterizado convexamente pelos métodos I e II.*



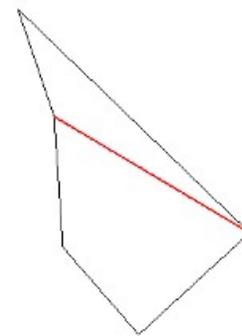
(a)



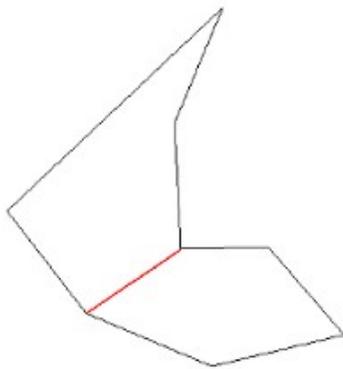
(b)



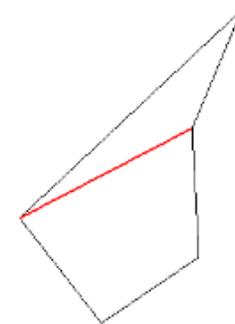
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.27: Divisão de um domínio em regiões convexas através da adição de diagonais pelo Algoritmo 4.3: (a) Primeira diagonal é adicionada, obtêm-se ciclo único; (b) Segunda diagonal é adicionada ao domínio, obtêm-se dois ciclos. Um dos ciclos é convexo; (c) Terceira diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos; (d) Quarta diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos. Ambos são convexas; (e) Quinta diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos. Um dos ciclos é convexo; (f) Sexta diagonal é adicionada, obtêm-se dois ciclos. Ambos são convexas.

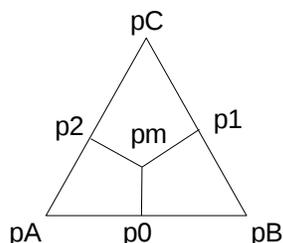
```

01. Algoritmo quadrilaterizacao(segmentos, malha)
02.  pA = pontoInicial(s(0))
03.  Para cada segmento s(i), tal que 1 ≤ i < (n-1)
04.      pB = pontoInicial(s(i))
05.      pC = pontoFinal(s(i))
06.      pm = encontraBaricentro(pA, pB, pC)
07.      p0 = pontoMedio(pA, pB)
08.      p1 = pontoMedio(pB, pC)
09.      p2 = pontoMedio(pC, pA)
10.      e = criaQuadrilatero(pA, p0, pm, p2)
11.      malha.adicionaLista(e)
12.      e = criaQuadrilatero(pB, p1, pm, p0)
13.      malha.adicionaLista(e)
14.      e = criaQuadrilatero(pC, p2, pm, p1)
15.      malha.adicionaLista(e)

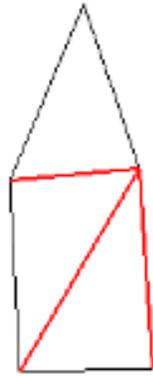
```

*Algoritmo 4.6: Descrição do método de quadrilaterização para triquad método I.*

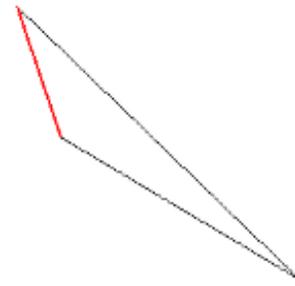
Escolhe-se um vértice de referência. Este vértice forma um triângulo com os vértices definidos para cada iteração do *loop* através de diagonais. A Figura 4.29 apresenta o resultado da adição de diagonais nas regiões convexas. Com os vértices, calcula-se o baricentro e os pontos médios dos segmentos que constituem o ciclo. Por fim, criam-se os quadriláteros convexas obedecendo ao sentido anti-horário. A Figura 4.30 apresenta o resultado da quadrilaterização das regiões convexas. A Figura 4.31 apresenta o resultado da final quadrilaterização convexa e o seu refino. E a Figura 4.28 exhibe o elemento usado como referência na ordem dos ciclos para quadrilaterização de triângulos nos Algoritmos 4.6 e 4.7. Em seguida será visto o procedimento de quadrilaterização para o método II (Algoritmo 4.7).



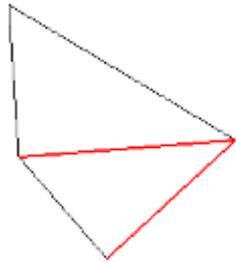
*Figura 4.28: Elemento referência para quadrilaterização, método I.*



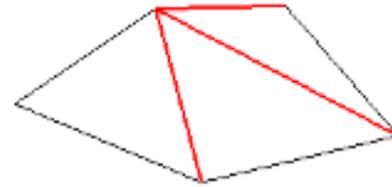
(a)



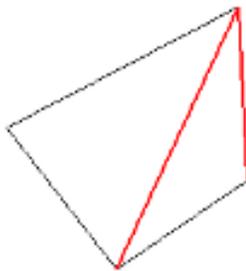
(b)



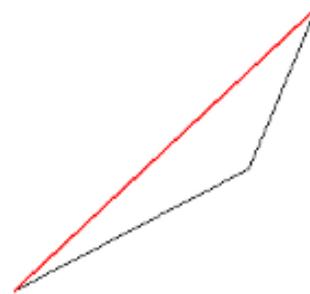
(c)



(d)

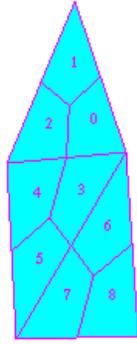


(e)

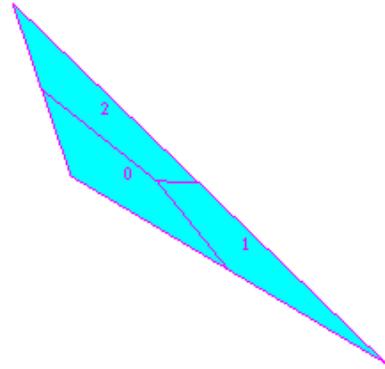


(f)

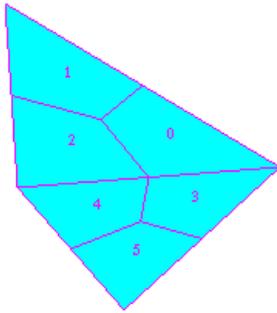
Figura 4.29: Adição de diagonais às regiões convexas. Formam-se triângulos a partir de um vértice. (a) Duas diagonais são adicionadas. Formam-se três triângulos; (b) Nenhuma diagonal é adicionada. Região triangular; (c) Uma diagonal é adicionada. Formam-se dois triângulos; (d) Duas diagonais são adicionadas. Formam-se três triângulos; (e) Uma diagonal é adicionada. Formam-se dois triângulos; (f) Nenhuma diagonal é adicionada. Região triangular;



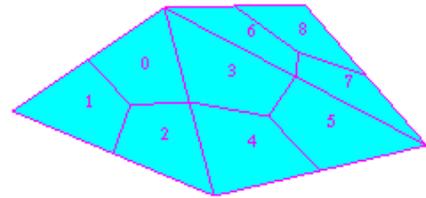
(a)



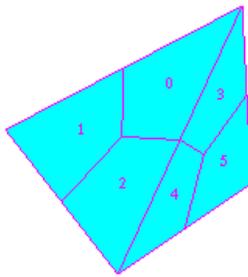
(b)



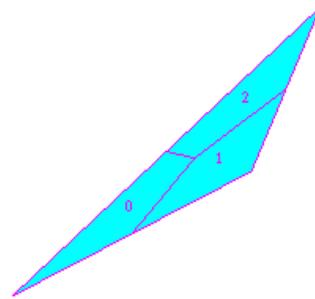
(c)



(d)

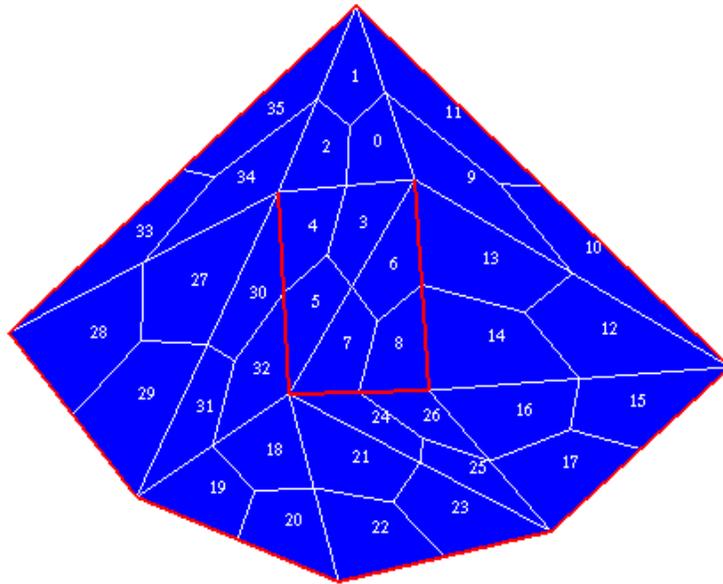


(e)

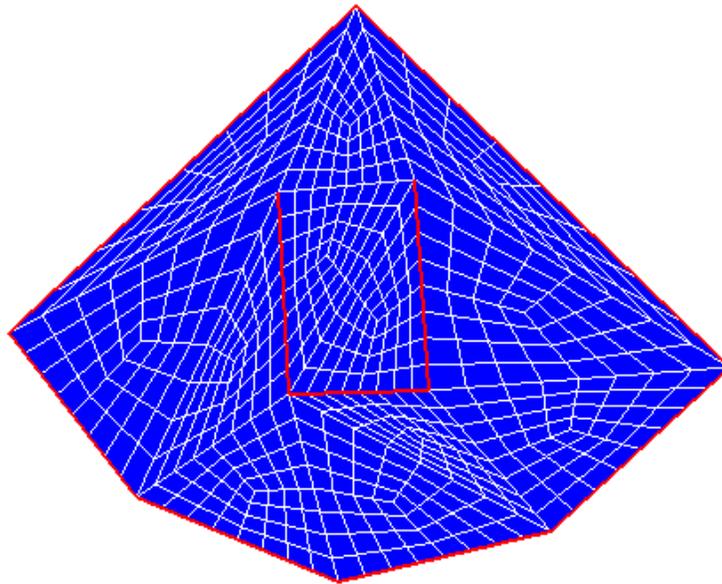


(f)

Figura 4.30: Quadrilaterização de regiões convexas pelo Algoritmo 4.6. Adiciona-se o baricentro a cada triângulo, e os pontos médios dos segmentos e diagonais são ligados ao baricentro de cada triângulo respectivo. As regiões de (a) à (f) são as regiões convexas do domínio apresentado na Figura 4.26.



(a)



(b)

Figura 4.31: Quadrilaterização convexa final do domínio apresentado na Figura 4.26: (a) Quadrilaterização convexa resultante da união das regiões convexas; (b) Refino da quadrilaterização convexa por meio de duas iterações.

```

01. Algoritmo quadrilaterizacao(segmentos, malha)
02.  pA = pontoInicial(s(0))
03.  Para cada segmento s(i), tal que  $1 \leq i < (n-1)$ ,  $i \div 2 = t$  e  $t \in \mathbb{N}$ 
04.      pB = pontoInicial(s(i))
05.      pC = pontoFinal(s(i))
06.      Se ((i+2) = n)
07.          pm = encontraBaricentro(pA, pB, pC)
08.          p0 = pontoMedio(pA, pB)
09.          p1 = pontoMedio(pB, pC)
10.          p2 = pontoMedio(pC, pA)
11.          e[0] = criaQuadrilatero(pA, p0, pm, p2)
12.          e[1] = criaQuadrilatero(pB, p1, pm, p0)
13.          e[2] = criaQuadrilatero(pC, p2, pm, p1)
14.          malha.adicionaLista(e)
15.      Senão
16.          pD = pontoFinal(s(i+1))
17.          pm = encontraBaricentro(pA, pB, pC, pD)
18.          p0 = pontoMedio(pA, pB)
19.          p1 = pontoMedio(pB, pC)
20.          p2 = pontoMedio(pC, pD)
21.          p3 = pontoMedio(pD, pA)
22.          e[0] = criaQuadrilatero(pA, p0, pm, p3)
23.          e[1] = criaQuadrilatero(pB, p1, pm, p0)
24.          e[2] = criaQuadrilatero(pC, p2, pm, p1)
25.          e[3] = criaQuadrilatero(pD, p3, pm, p2)
26.          malha.adicionaLista(e)

```

*Algoritmo 4.7: Descrição do método de quadrilaterização para triquad método II.*

É obtido um vértice de referência ao início. A execução do algoritmo é feita, então, entre vértices alternados, e, para o último elemento, é possível identificar um triângulo ou quadrilátero convexo. A Figura 4.34 apresenta o resultado da adição de diagonais nas regiões convexas. Novamente, criam-se os quadriláteros convexos obedecendo ao sentido anti-horário. Na figura 4.32, tem-se o elemento de referência para partição convexa de quadriláteros no Algoritmo 4.7. A Figura 4.33

apresenta o resultado da final quadrilaterização convexa e o seu refino. A Figura 4.35 apresenta o resultado da quadrilaterização das regiões convexas.

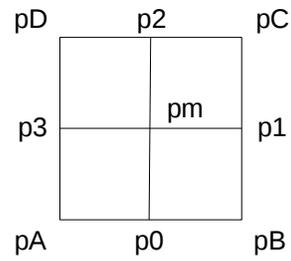


Figura 4.32: Elemento referência para quadrilaterização, método II.

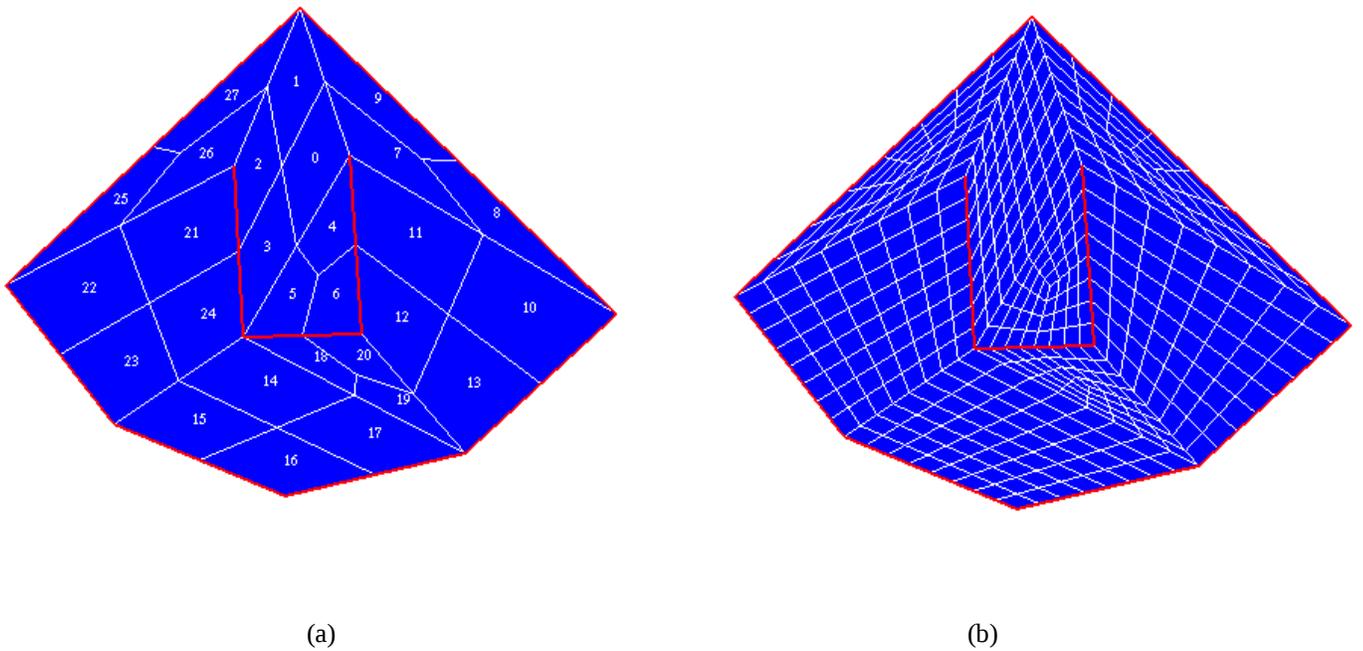
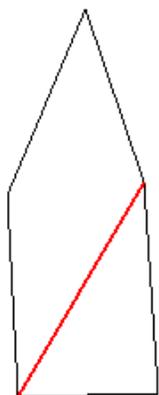
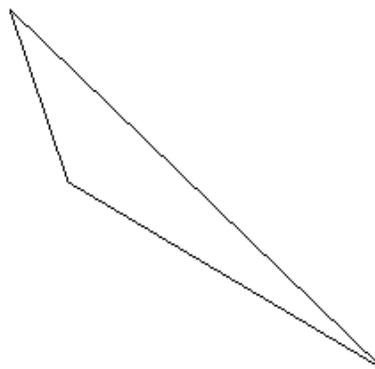


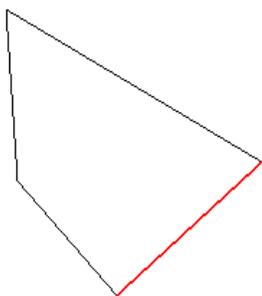
Figura 4.33: Quadrilaterização convexa final do domínio apresentado na Figura 4.26: (a) Quadrilaterização convexa resultante da união das regiões convexas; (b) Refino da quadrilaterização convexa por meio de duas iterações.



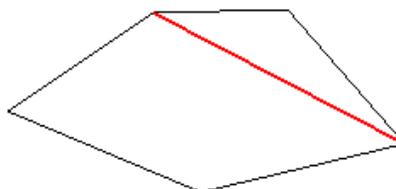
(a)



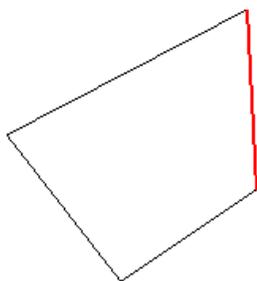
(b)



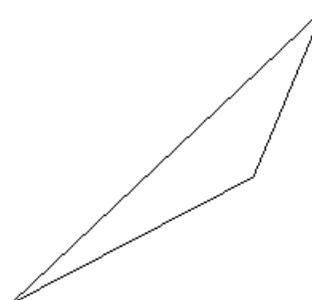
(c)



(d)

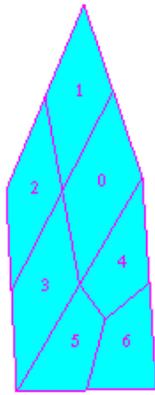


(e)

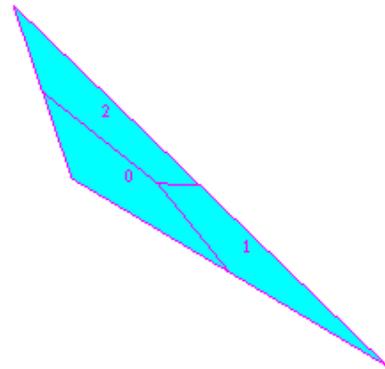


(f)

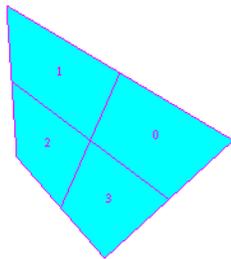
Figura 4.34: Adição de diagonais às regiões convexas. Formam-se quadriláteros a partir de um vértice, se possível. (a) Uma diagonal é adicionada. Forma-se um quadrilátero convexo e um triângulo; (b) Nenhuma diagonal é adicionada. Região triangular; (c) Nenhuma diagonal é adicionada. Região quadrilateral e convexa; (d) Uma diagonal é adicionada. Forma-se um quadrilátero convexo e um triângulo; (e) Nenhuma diagonal é adicionada. Região quadrilateral e convexa; (f) Nenhuma diagonal é adicionada. Região triangular;



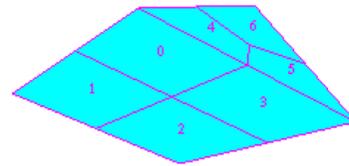
(a)



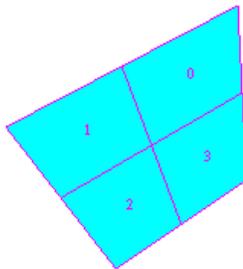
(b)



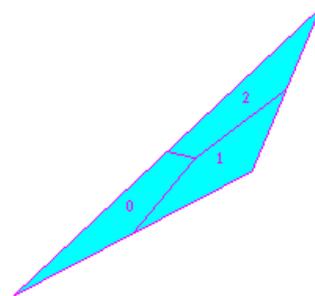
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.35: Quadrilaterização de regiões convexas pelo Algoritmo 4.7. Adiciona-se o baricentro a cada triângulo ou quadrilátero convexo, e os pontos médios dos segmentos e diagonais são ligados ao baricentro de cada triângulo ou quadrilátero convexo respectivo. As regiões de (a) à (f) são as regiões convexas do domínio apresentado na Figura 4.26.

### 4.3 Ortoquad - quadrilaterização por regiões parcialmente ortogonais

#### Escopo

Esta técnica adiciona novos pontos no ciclo da fronteira e internamente ao domínio. É capaz de lidar com regiões com ou sem buracos, e quadrilaterizar quaisquer polígonos convexamente de forma não estrita. O número de novos pontos adicionados na fronteira é proporcional ao número de círculos máximos. Novos pontos também são inseridos em regiões não estritas para torná-las convexas e em alguns ciclos para alterar a paridade.

#### Ideia

Neste método é usado o locus de círculos máximos na região interna do polígono, isto é, o eixo médio, para criarem-se regiões parcialmente ortogonais. Regiões parcialmente ortogonais são aquelas que podem conter ângulos de  $90^\circ$ . Perpendiculares, ortogonais e retos são usados como sinônimos e querem dizer  $90^\circ$ . Círculos máximos à um polígono são aqueles que o tangenciam em pelo menos dois segmentos (Figura 4.36), este ponto de tangência forma um ângulo de  $90^\circ$  entre o segmento do domínio e o centro deste círculo. Os círculos máximos não podem cruzar os segmentos de um polígono em nenhuma hipótese, apenas tangenciá-los e podem ser sobrepostos, mas não coincidentes.

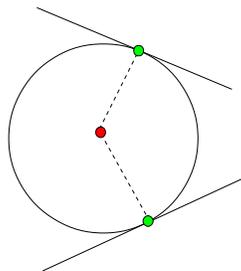


Figura 4.36: Projeção do centro de um círculo máximo, em dois segmentos quaisquer do polígono.

Para criar os círculos máximos, disparam-se segmentos (ou raios) a partir de cada vértice existente no domínio (Figura 4.37). Raios são disparados por meio das bissetrizes dos ângulos internos a um domínio. É claro que este raio cruzará o domínio em algum ponto definindo um segmento, mas o mais importante é que este raio cruza obrigatoriamente o eixo médio em pelo menos um ponto (Figura

4.38). Com esta informação, é possível realizar uma busca binária no segmento definido por um vértice e o ponto de intersecção de seu raio correspondente; Em  $O(\log n)$  é possível descobrir a localização do vértice do eixo médio, ou seja, o centro do círculo máximo.

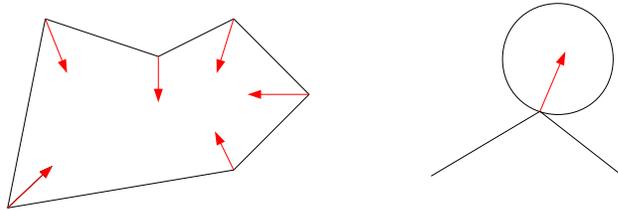


Figura 4.37: Disparam-se círculos através dos vértices na direção das bissetrizes que expandem até tangenciar o domínio.

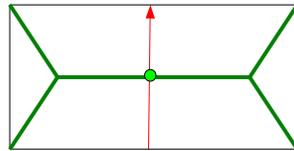


Figura 4.38: Eixo médio em verde e raio disparado (em vermelho) por um vértice de um hexágono retangular.

Como muitos círculos poderão ser gerados, usa-se de uma simplificação na quantidade de ciclos baseada na seguinte fórmula:

$$distancia(c_1, c_2) \geq a * (r_1 + r_2), \tag{4.6}$$

em que  $c_i$  é o centro de um círculo qualquer e  $r_i$  o seu raio. A constante  $a$  é definida pelo usuário como forma de aumentar ou diminuir a quantidade de círculos presentes no domínio. Foi observado que uma quantidade grande de círculos máximos pode inserir muitos quadriláteros convexos finos, e que uma quantidade pequena de círculos máximos pode aumentar a quantidade de quadriláteros do tipo boomerang ou Varignon. O usuário deve então interativamente procurar um equilíbrio.

Em seguida, os círculos máximos são usados para particionar o domínio. Para isto, adicionam-se os centros dos círculos, os pontos de tangência e os segmentos que os unem de forma a obter regiões parcialmente ortogonais com até quatro segmentos perpendiculares inseridos pelo método. Não há uma garantia de inserção de ângulos retos para todas as regiões, devido à presença dos ângulos côncavos. Pela Figura 4.39, pode-se perceber que se um círculo é tangente a dois vértices que definem ângulos côncavos, então não ocorre a formação de ângulo reto. Contudo, é possível observar pela prática que este caso não é a maioria, pois exige uma posição particular de dois vértices com ângulos côncavos. As regiões, normalmente, têm pelo menos um ou dois ângulos retos.

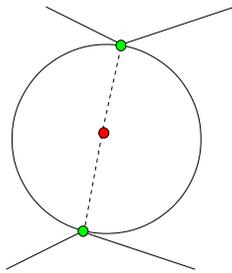


Figura 4.39: O círculo é tangente à dois vértices (ângulos côncavos), não há a formação de ângulo reto.

Uma vez que se tenha criado as regiões, é possível observar que a menor região formada terá no mínimo quatro vértices. Contudo, nem todas as regiões de quatro lados são convexas. Como uma quadrilaterização convexa de uma região deste tipo produz um *boomerang*, esta região é removida unindo-se os ciclos opostos (Figura 4.40). Calcula-se o ponto médio entre o vértice côncavo e o único vértice não adjacente a ele, e atualizam-se os ciclos correspondentes no polígono para ligarem-se com este ponto médio.

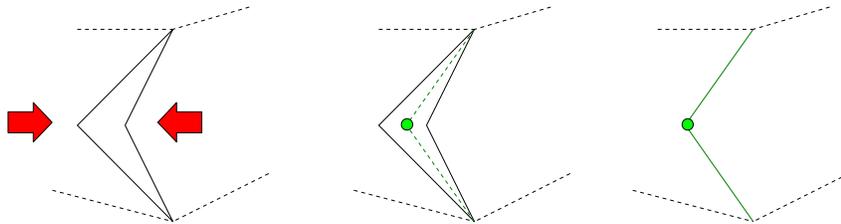


Figura 4.40: Remoção de uma região quadrilateral côncava.

Após, será forçado a mesma paridade par a todas as regiões. O processo de partição do domínio através de círculos máximos pode formar regiões com ciclos pares ou ciclos ímpares, e como já foi visto, é necessária uma fronteira par para poder quadrilaterizar uma região. Para transformar os ciclos ímpares em par pela inserção de um novo vértice, utilizam-se de dois métodos: pelo vértice de ligação ou pelo maior segmento. O vértice de ligação é um vértice que não é centro de um círculo máximo e é adjacente a dois centros de círculos máximos em uma mesma região. A Figura 4.41 mostra exemplos de regiões com vértices de ligação.

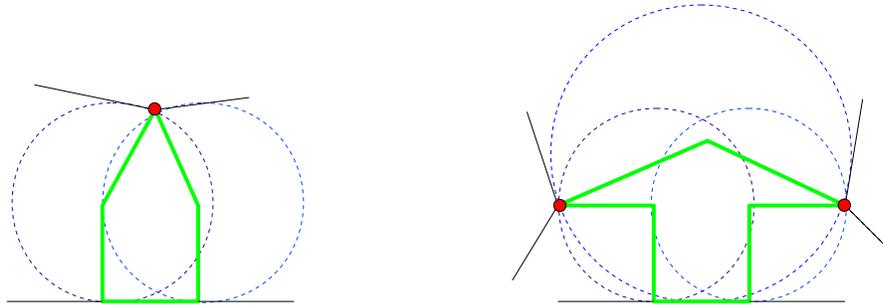


Figura 4.41: Exemplo de regiões, em verde, com vértices de ligação, em vermelho.

Para inserir um novo vértice através de um vértice de ligação, escolhe-se um segmento pertencente a uma região vizinha ao vértice de ligação, tal que este segmento pertence à um ciclo qualquer e que o próximo vértice no ciclo não é centro de um círculo máximo. Cria-se, então, um novo vértice na metade da distância entre o próximo vértice da região vizinha e o vértice de ligação. Desloca-se qualquer região adjacente com o vértice de ligação e a região que possui o segmento para ligarem-se à este novo vértice. De fato, o ângulo existente no vértice de ligação é aumentado, além de adicionar-se um ponto vértice (Figura 4.42). Desta forma, a região torna-se par e permiti-se a inserção de um elemento quadrilateral preferencialmente convexo. Quando um quadrilátero não convexo é formado, ele é quadrilaterizado convexamente pelo quadrilátero *boomerang* ou Varignon.

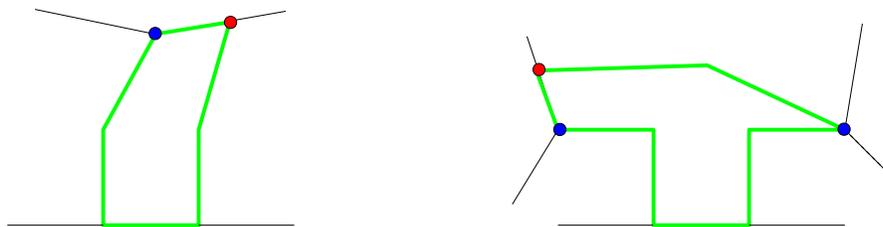


Figura 4.42: Inserção de um novo vértice em regiões com vértices de ligação. Novo vértice em vermelho.

Para transformar uma região ímpar em par pelo maior segmento, deve-se apenas tomar o cuidado de escolher o maior segmento pertencente a fronteira e depois inserir um novo vértice na metade deste segmento. Como este segmento pertence a fronteira, não irá afetar nenhuma outra região e o único ciclo que precisará ser alterado é o próprio ciclo em que o vértice foi inserido.

Uma vez que se tenha apenas regiões pares, é possível segmentá-las usando duas estratégias: aplicar novamente o ponto médio, ou dividir as regiões pares através de dois tipos de diagonais. Esta

segunda é a estratégia que é adotada. Diagonais que formam ciclos pares são chamadas de diagonais pares, e diagonais que formam ciclos ímpares são chamadas de diagonais ímpares (Figura 4.43). Se um ciclo possui uma quantidade de vértices par é claro que é possível dividi-lo de duas maneiras com uma diagonal: ou em dois ciclos pares, ou em dois ciclos ímpares. Seleciona-se, então, um ângulo côncavo preferencialmente, mas não necessariamente, para ser a origem de uma diagonal que se deve aproximar da bissetriz do ângulo. A prioridade mais alta é das diagonais pares pois elas formam quadriláteros, porém pode ser que não existam diagonais pares. Neste caso, insere-se uma diagonal ímpar, em que se insere um novo vértice em seu meio para manter a paridade das regiões vizinhas. Aplica-se sucessivamente esta estratégia até que as regiões formadas tenham apenas quatro vértices. Obtem-se, desta maneira, uma quadrilaterização de regiões pares. Na Figura 4.43b não havia a necessidade da inclusão de uma diagonal ímpar, e para evitar a inserção de novos pontos internos ao domínio, o ideal é que se use tão pouco quanto possível de diagonais ímpares. Contudo o uso de diagonais pares pode não ser possível, mesmo em regiões pares (Figura 4.44).

A Figura 4.44 reforça a razão pela qual o uso de diagonais ímpares deve ser evitado. É possível que se formem quadriláteros côncavos, e, pior que isto, quadriláteros triangulares (que possuem um ângulo reto). Nestes casos e após a quadrilaterização de uma região tiver sido concluída, aplica-se o quadrilátero *boomerang* ou o quadrilátero de Varignon apresentado no Capítulo 3 para quadrilaterizar convexamente as regiões remanescentes. Estas regiões são constituídas de cinco quadriláteros convexos com a inserção de quatro novos pontos internos às regiões originais.

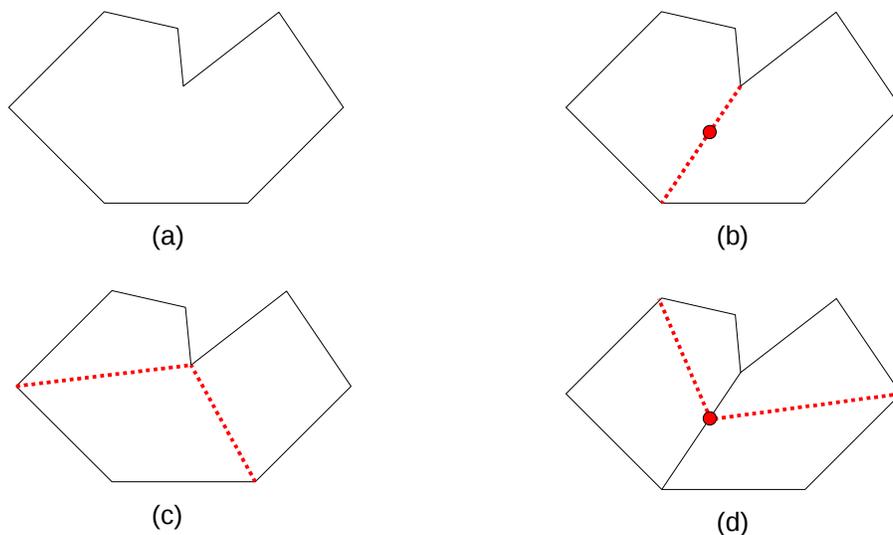


Figura 4.43: Exemplo de uma quadrilaterização: (a) Domínio original; (b) Inserção de diagonal ímpar; (c) Inserção de diagonais pares sem diagonal ímpar; e (d) Inserção de diagonais pares com diagonal ímpar.

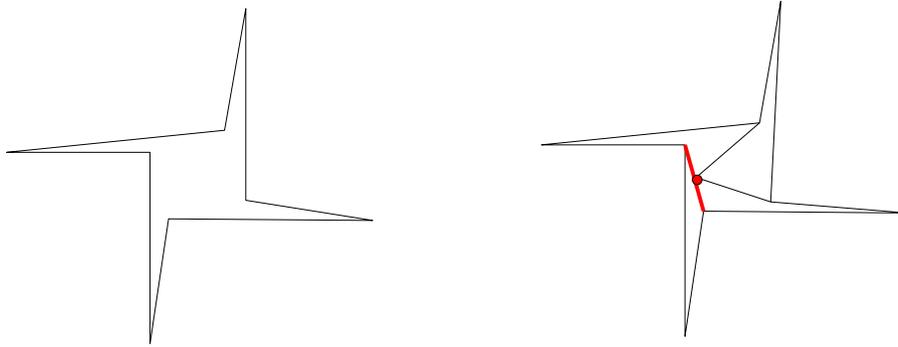


Figura 4.44: Exemplo de uso de diagonal ímpar (vermelho) para quadrilaterizar uma região.

## Algoritmo

O primeiro passo do algoritmo é gerar os círculos máximos cujos centros são vértices do eixo médio. Lançam-se raios a partir das bissetrizes dos ângulos (Algoritmo 4.8). Para isto, calculam-se previamente as normais e bissetrizes para cada lado e vértice do polígono. Uma vez que se tenha estas informações os raios são disparados. A Figura 4.45 exibe um exemplo de um domínio que será quadrilaterizado pelo método Ortoquad e os círculos que são inicialmente disparados através dos vértices de um domínio. Neste caso, disparam-se três raios para cada vértice côncavo de forma a produzir mais círculos. A bissetriz do ângulo, e as bissetrizes dos ângulos correspondentes.

```

01. Algoritmo defineEixoMedio()
02. Para cada vértice p do ciclo
03.     b = p.retornaBissetriz()
04.     raio = novo Raio(p, bissetriz)
05.     d_min = MAXIMO
06.     Para cada segmento do ciclo
07.         Se (segmento.vizinho(p))
08.             ignora este segmento
09.             d_aux = segmento.interceptaSegmento(raio)
10.             Se (d_aux < d_min)
11.                 d_min = d_aux
12.     atualizaDistancia(p, tiro, segmento, d_min/2)

```

Algoritmo 4.8: Descrição do método defineEixoMedio.

No Algoritmo 4.8, calcula-se a bissetriz dos ângulos internos. Com um vértice e a bissetriz de seu ângulo correspondente, cria-se um segmento de reta, ou raio. Verifica-se, então, qual o segmento mais próximo que o raio intercepta no domínio, obtendo-se uma distância mínima. A metade desta distância é o valor inicial para o posicionamento dos centros dos círculos que serão máximos. O posicionamento dos círculos é armazenado em cada vértice que foi origem do raio que o originou. Em seguida, o Algoritmo 4.9 descreve um método iterativo para ajustar o tamanho dos círculos ao domínio.

```

01. Algoritmo aproximaEixoMedio(iteracao)
02. Para cada vértice p do ciclo
03.     b = p.retornaBissetrizNormalizada()
04.     d_min = p.retornaDistancia()
05.     x = (d_min * b.retX()) + p.retX()
06.     y = (d_min * b.retY()) + p.retY()
07.     centro = novo Ponto(x, y)
08.     centro.defRaio(p.retDistancia())
09.     produto = 1
10.     Para cada segmento do ciclo
11.         Se (segmento.vizinho(p))
12.             ignora
13.             produto *= segmento.interceptaCirculo(centro)
14.             Se ((produto % 5 == 0) || (produto % 9 == 0))
15.                 pare
16.             Se (produto % 4 == 0)
17.                 produto = produto / 2
18.     atualizaDistancia(p, segmento, d_min, produto)

```

*Algoritmo 4.9: Descrição do método iterativo aproximaEixoMedio.*

O método apresentado no Algoritmo 4.9 é executado incrementalmente um número de vezes qualquer determinado pelo usuário, e a cada iteração aproxima o círculo de sua posição ideal como círculo máximo. O centro de cada círculo é calculado a partir de cada vértice, da distância mínima previamente armazenada e da bissetriz do ângulo correspondente. Ao final do algoritmo, calcula-se o novo valor da distância ou do raio do círculo. O método *interceptaCirculo* resulta em cinco ou nove se

o círculo tiver cruzado um segmento qualquer; dois se o círculo for tangente a todos os segmentos que intercepta; e um, caso o círculo não intercepte nenhum segmento. Finalmente, após sucessivas iterações do algoritmo obtêm-se os círculos em sua posição final, definida pelo usuário ou como círculo máximo.

Pode-se realizar, neste momento, uma redução na quantidade de círculos. Como os círculos são armazenados nos vértices do domínio, esta redução remove o excesso de círculos em vértices que contenham ângulos côncavos, e remove círculos sobrepostos de acordo com um limite, caso o usuário tenha feito poucas iterações. É importante perceber que um vértice que possua um ângulo côncavo pode armazenar infinitos círculos, pois é uma região em que o eixo médio realiza uma curva. A Figura 4.46 exibe dois possíveis exemplos de posicionamento final para os círculos máximos em um mesmo domínio.

Antes de aplicar o procedimento principal de Ortoquad, e para criarem-se as regiões parcialmente ortogonais, os centros dos círculos são projetados nos segmentos tangentes a cada círculo, criando diagonais entre o centro e seu ponto de intersecção. A Figura 4.47 exibe dois exemplos desta projeção dos centros dos círculos. O ajuste na direção dos ciclos é feito neste momento, como já foi discutido no Tópico 4.1. Esta necessidade existe sempre que se adiciona novos segmentos à um ciclo, e todos os ciclos são formados e ajustados de acordo com sua orientação. Em seguida, aplica-se o procedimento principal Ortoquad (Algoritmo 4.10).

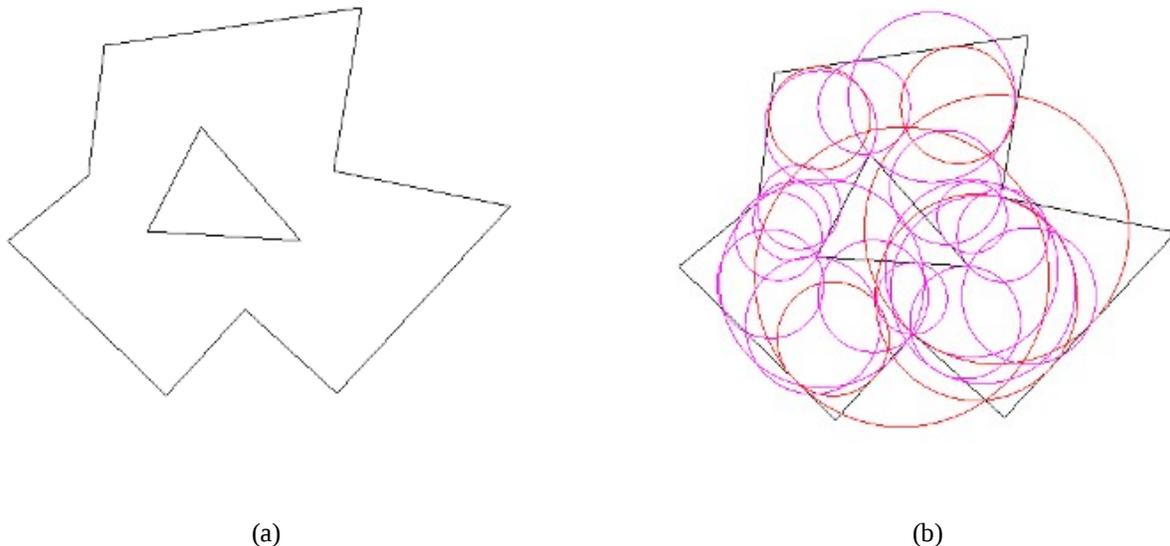


Figura 4.45: Início do método Ortoquad: (a) Um domínio qualquer; (b) Círculos produzidos pelo método inicialmente. Não são círculos máximos. Círculos em rosa pertencem à ângulos côncavos; círculos em vermelho pertencem à ângulos convexos.

```

01. Algoritmo ortoQuad(refino, erro)
02. Para cada segmento s
03.     pintaBranco(s)
04. Para cada segmento s branco
05.     aplicaOrtoQuad(segmento, refino, erro)

```

Algoritmo 4.10: Descrição do procedimento principal de ortoQuad.

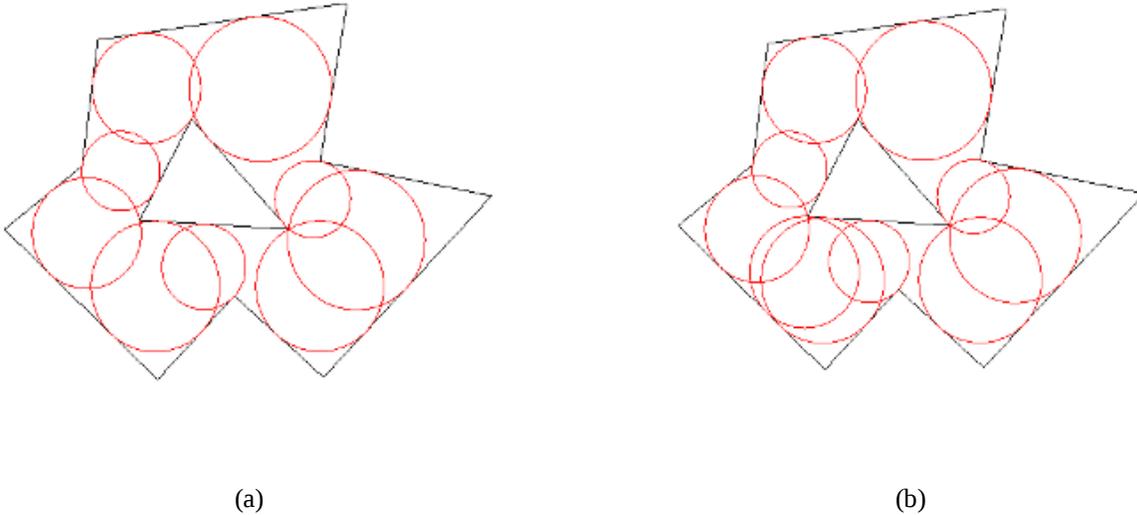


Figura 4.46: Posicionamento de círculos máximos com redução na quantidade de círculos: (a) Nove círculos máximos. (b) Dez círculos máximos.

O Algoritmo 4.10 garante que todas as regiões serão quadrilaterizadas convexamente. Ao final da projeção dos centros dos círculos, todo segmento que faça parte de uma restrição ou não, faz parte de algum ciclo, supondo-se que existam círculos suficientes no domínio. Logo, ao início todos os segmentos são pintados de branco. E sempre que uma região é quadrilaterizada convexamente seus segmentos são pintados de preto.

O Algoritmo 4.11 essencialmente adiciona diagonais ímpares ou diagonais pares até que os ciclos formados tenham apenas quatro vértices. As diagonais são adicionadas baseadas na proximidade da bissetriz dos ângulos, similar ao Tópico 4.1, mas o ângulo não precisa ser côncavo. Uma vez que se tenha um ciclo com quatro segmentos, efetua-se um último teste que o quadrilateriza convexamente, caso esta propriedade lhe falte. Se a região quadrilateral for convexa, o algoritmo conclui, caso contrário, o quadrilátero de Varignon ou *boomerang* são inseridos. Deste modo, o algoritmo *ortoQuad* quadrilateriza convexamente qualquer domínio desde que círculos máximo suficientes sejam inseridos internamente ao domínio.

```

01. Algoritmo aplicaOrtoQuad(segmento, refino)
02.   Se (tamanhoCiclo(segmento) <= 4)
03.     quadrilaterizacao(segmento, refino)
04.   Senão
05.     mc = maiorConcavo(segmento)
06.     Se (naoExiste(mc))
07.       mc = segmento
08.       p = mc.retPontoFinal()
09.       p.avaluaBissetriz()
10.     p = mc.retPontoFinal()
11.     paridade = 1
12.     q = procuraDiagonal(mc, p, paridade)
13.     Se (naoExiste(q))
14.       paridade = 0
15.       q = procuraDiagonal(mc, p, paridade)
16.     rs = segmentoMaisProximo(mc, p, q)
17.     u = mc
18.     v = mc.retProxima()
19.     s = segAnteriorLoop(rs)
20.     Se (paridade = 1)
21.       diagonal = Reta(p, q)
22.       diagonal_inv = Reta(q, p)
23.       pintaBranco(diagonal, diagonal_inv)
24.       adicionaCicloAtualiza(diagonal, diagonal_inv)
25.     Senão
26.       pm = pontoMedio(p, q)
27.       dl = Reta(p, pm)
28.       dl_2 = Reta(pm, q)
29.       dl_inv = Reta(q, pm)
30.       dl_2_inv = Reta(pm, p)
31.       pintaBranco(dl, dl_2, dl_inv, dl_2_inv)
32.       adicionaCicloAtualiza(dl, dl_2, dl_inv, dl_2_inv)

```

*Algoritmo 4.11: Descrição do método aplicaOrtoQuad.*

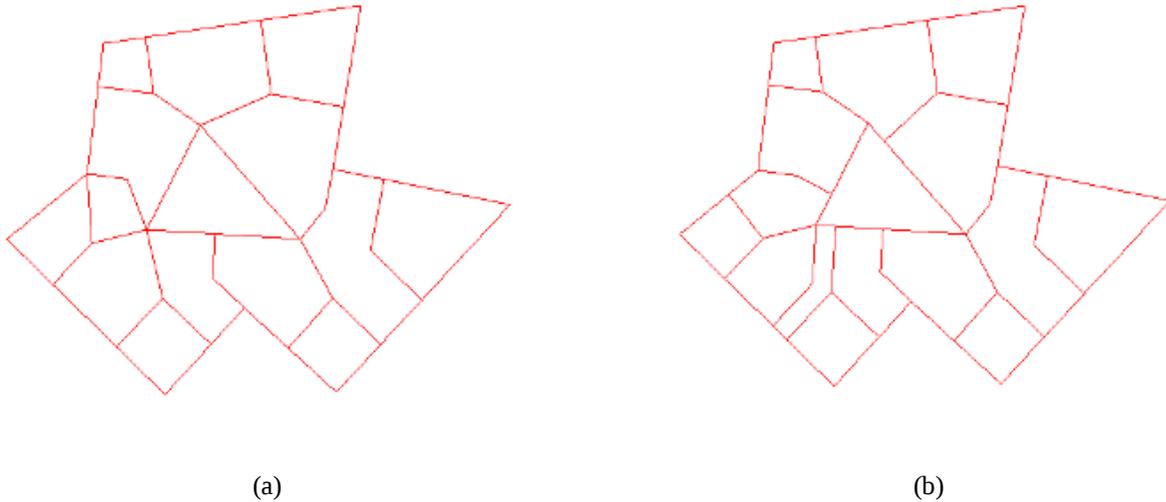


Figura 4.47: Adicionam-se segmentos que ligam os centros dos círculos máximos aos seus pontos de tangência. (a) Adição de segmentos baseada em nove círculos máximos. (b) Adição de segmentos baseada em dez círculos máximos.

O Algoritmo 4.12 realiza a quadrilaterização final no procedimento de *aplicaOrtoQuad*. Caso o quadrilátero não seja convexo, cria-se o quadrilátero Varignon (Algoritmo 4.13) ou o quadrilátero boomerang (Algoritmo 4.14) de acordo com o ângulo do vértice não convexo, que pode ser reto ou côncavo. Caso o quadrilátero seja convexo, o ciclo quadrilateral é apenas adicionado a malha. Na Figura 4.48, fornecem-se os elementos que servem de guia para esta quadrilaterização. Para refinar a malha dois métodos são utilizados: o primeiro pela adição do ponto médio, e o segundo pela adição do domínio convexo reduzido (Tópico 4.1). A Figura 4.49 exibe o resultado final da quadrilaterização convexa de um domínio. A Figura 4.50 exibe o refinamento de uma malha através da adição do ponto médio. E a Figura 4.51 exibe o refinamento de uma malha através da adição do ciclo convexo reduzido.

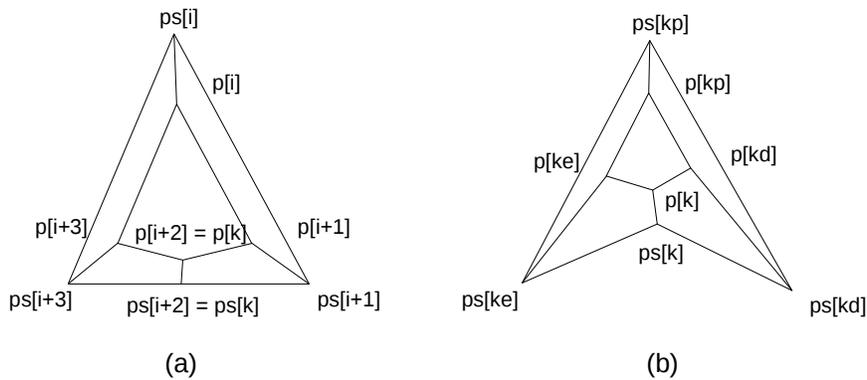


Figura 4.48: Modelos de referência para algoritmos de quadrilaterização: (a) Elemento Varignon; e (b) Elemento boomerang.

```

01. Algoritmo quadrilaterizacao(segmento, refino)
02.   Se (cicloConvexo(segmento))
03.     e = Elemento (p[0], p[1], p[2], p[3])
04.     malha.adicionaLista(e)
05.   Senão
06.     para cada vértice p[i] do Ciclo
07.       ps[i] = p[i]
08.     k = encontraAnguloNaoConvexoCiclo(segmento)
09.     Se (p[k].retAngulo() = 180)
10.       quadVarignon(k)
11.     Senão
12.       quadBoomerang(k)
13.   pintaCicloPreto()

```

*Algoritmo 4.12: Descrição do método de quadrilaterização para o algoritmo ortoQuad.*

```

01. Algoritmo quadVarignon(k)
02.   pm = calculaBaricentroCiclo()
03.   p[0] = pontoMedio(p[0], pm)
04.   p[1] = pontoMedio(p[1], pm)
05.   p[2] = pontoMedio(p[2], pm)
06.   p[3] = pontoMedio(p[3], pm)
07.   p[k] = pontoMedio(ps[k], p[k])
08.   e[0] = Elemento (p[0], p[1], p[2], p[3])
09.   e[1] = Elemento (ps[0], ps[1], p[1], p[0])
10.   e[2] = Elemento (ps[1], ps[2], p[2], p[1])
11.   e[3] = Elemento (ps[2], ps[3], p[3], p[2])
12.   e[4] = Elemento (ps[3], ps[0], p[0], p[3])
13.   malha.adicionaLista(e)

```

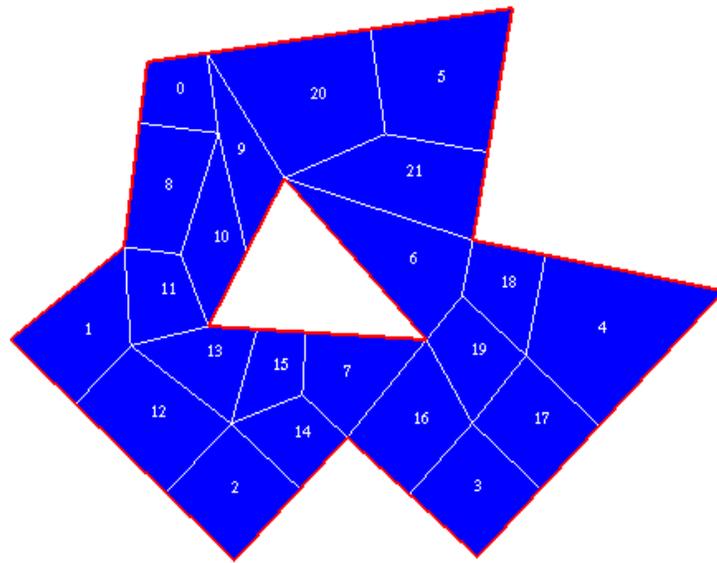
*Algoritmo 4.13: Descrição do método para adição de elemento Varignon.*

```

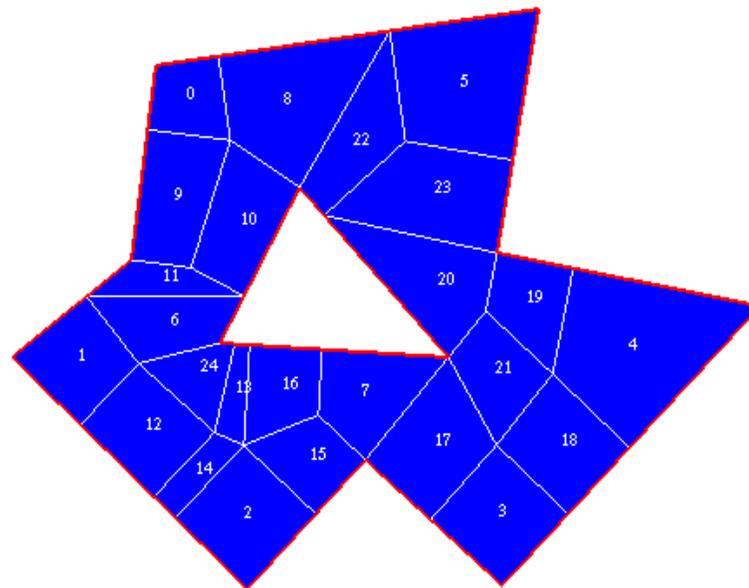
01. Algoritmo quadBoomerang(k)
02.     Se (k > 1)
03.         kp = k - 2
04.     Senão
05.         kp = k + 2
06.     kd = proximo(kp)
07.     ke = anterior(kp)
08.     r = Reta(ps[kd], ps[ke])
09.     tiro_final = ps[k] - ps[kp]
10.     tiro_final.normaliza()
11.     tiro = Reta(ps[kp], ps[kp] + tiro_final)
12.     D = tiro.interceptaSegmento(r)
13.     pm = pontoMedio(p[k], p[kp])
14.     p[k] = pontoMedio(p[k], pm)
15.     p[kp] = pontoMedio(p[kp], pm)
16.     v0 = ps[kd] - ps[kp]
17.     v0->normaliza()
18.     v1 = ps[ke] - ps[kp]
19.     v1->normaliza()
20.     d = p[k].distancia(p[kp])
21.     proporcao = d/D
22.     v0 = v0 * (ps[kd].distancia(ps[kp])*proporcao)
23.     v1 = v1 * (ps[ke].distancia(ps[kp])*proporcao)
24.     p[kd] = p[kp] + v0
25.     p[ke] = p[kp] + v1
26.     p[k] = pontoMedio(ps[k], p[k])
27.     e[0] = Elemento (p[0], p[1], p[2], p[3])
28.     e[1] = Elemento (ps[0], ps[1], p[1], p[0])
29.     e[2] = Elemento (ps[1], ps[2], p[2], p[1])
30.     e[3] = Elemento (ps[2], ps[3], p[3], p[2])
31.     e[4] = Elemento (ps[3], ps[0], p[0], p[3])
32.     malha->adicionaLista(e)

```

*Algoritmo 4.14: Descrição do método para adição de elemento boomerang.*

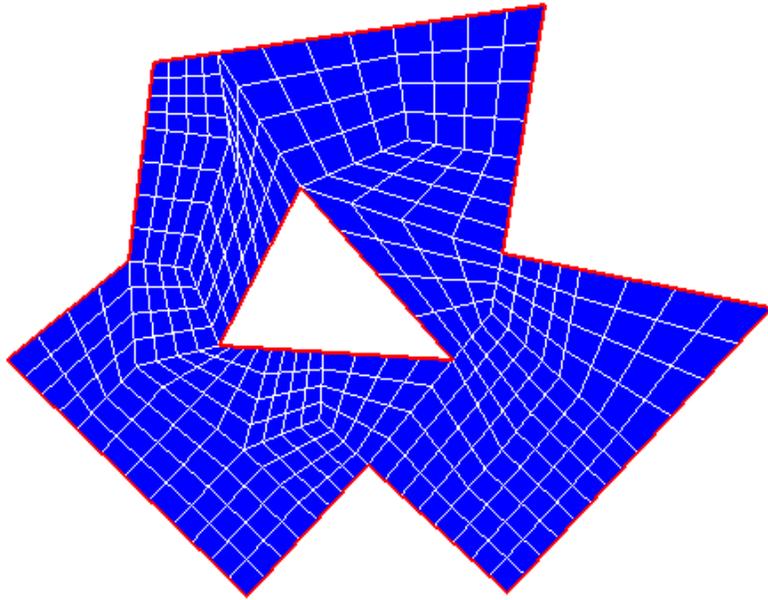


(a)

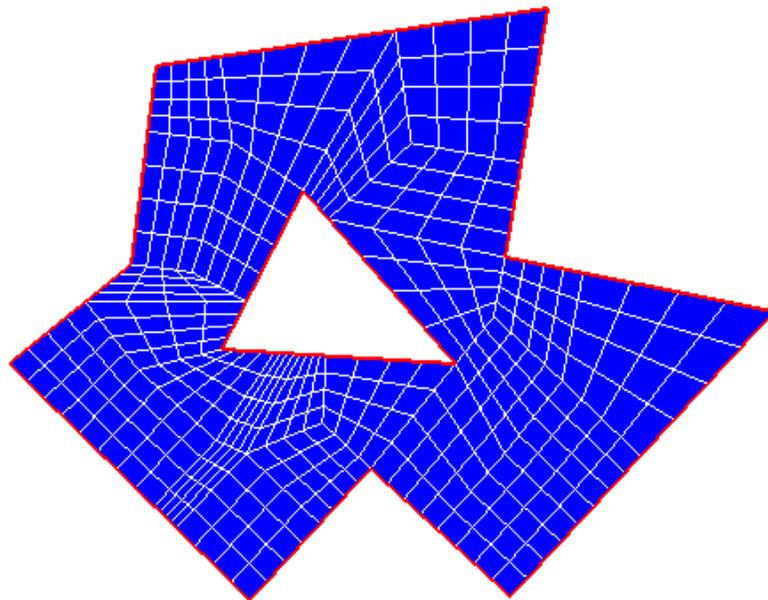


(b)

Figura 4.49: Resultado final da quadrilateralização convexa pelo procedimento ortoQuad. (a) Quadrilateralização convexa baseada em nove círculos máximos. (b) Quadrilateralização convexa baseada em dez círculos máximos.

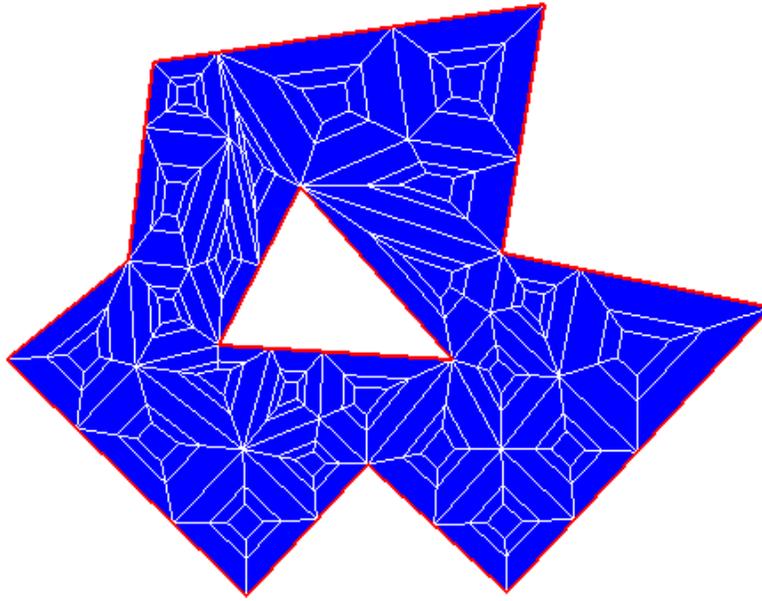


(a)

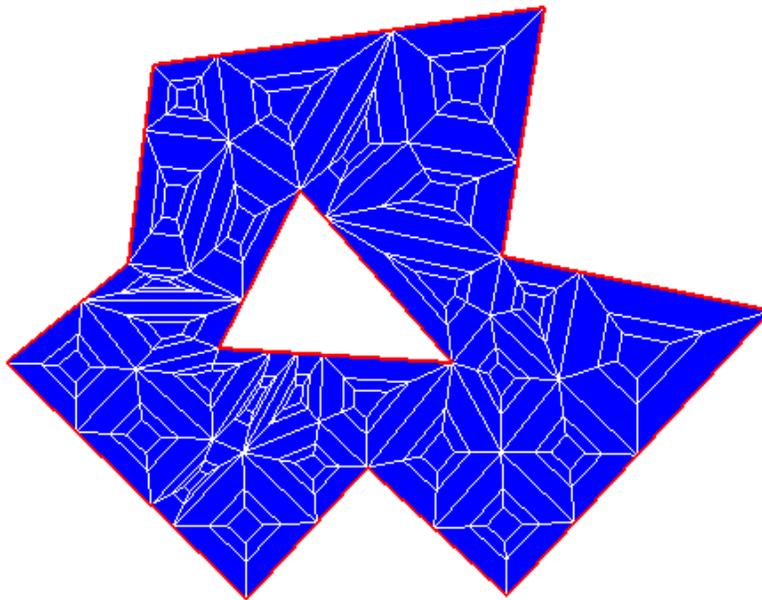


(b)

Figura 4.50: Refino da quadrilaterização convexa por meio de duas iterações do ponto médio: (a) Refino de quadrilaterização convexa baseada em nove círculos máximos. (b) Refino de quadrilaterização convexa baseada em dez círculos máximos.



(a)



(b)

Figura 4.51: Refino da quadrilaterização convexa por meio de duas iterações do domínio convexo reduzido: (a) Refino de quadrilaterização convexa baseada em nove círculos máximos. (b) Refino de quadrilaterização convexa baseada em dez círculos máximos.

## 4.4 Quadrilaterização Incremental

### Escopo

Esta técnica pode adicionar novos pontos internos a um domínio pela inserção de quadriláteros convexos no ciclo da fronteira. É capaz de quadrilaterizar convexamente de forma não estrita polígonos quaisquer sem restrições e com ângulos côncavos. O número de novos pontos é proporcional a quantidade de quadriláteros  $n$ -conexos adicionada com  $n \leq 3$ . Para um ciclo ímpar, adiciona-se um novo ponto no ciclo da fronteira ao início do algoritmo. Novos pontos também são inseridos em regiões não estritas para torná-las convexas.

### Ideia

Como já foi visto, quadrilaterizar um domínio pode ser feito apenas com diagonais, com a inserção de pontos de Steiner suficientes nas fronteiras e internamente ao domínio (Tópico 4.3). Tenta-se agora quadrilaterizar um domínio sem a inserção de novos pontos no ciclo da fronteira, desde que se utilize de um ciclo par inicial. É possível realizar isto ao usar apenas diagonais ímpares ou pares, mas envolve a formação de elementos de *boomerang* ou quadriláteros de Varignon. Busca-se, então, reduzir a quantidade destes elementos em uma malha, ao inserir quadriláteros convexos diretamente no domínio (Figura 4.52).

Então, será inserido uma quantidade de quadriláteros convexos proporcional a quantidade de vértices na fronteira no domínio, de forma que estes quadriláteros são sempre  $n$ -conexos com a mesma até obter uma quadrilaterização. Um quadrilátero ser  $n$ -conexo, em que  $1 \leq n \leq 4$ , implica a quantidade de vértices que o quadrilátero possui em comum com a fronteira, e já foi discutido mais profundamente no Capítulo 3. Um quadrilátero  $n$ -conexo será sempre convexo para este algoritmo. Estes elementos são sempre inseridos, não apenas com vértices em comuns com a fronteira, mas com arestas em comum, de forma que se obtenha uma quadrilaterização o mais breve possível.

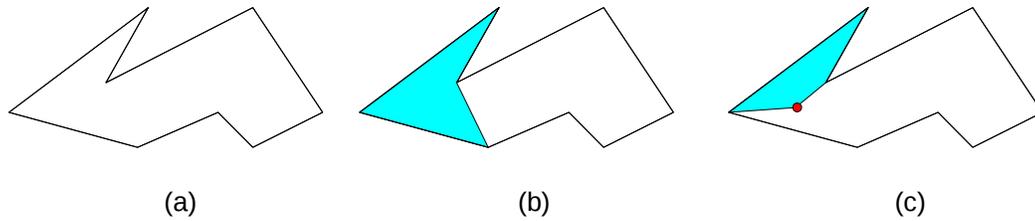


Figura 4.52: Inserção de quadriláteros: (a) Domínio, (b) Quadrilátero por diagonal par; e (c) Quadrilátero 3-conexo.

Na Figura 4.52, caso diagonais fossem usadas, ocorreria a formação de um quadrilátero côncavo ou triangular, o que por sua vez implicaria no uso de um quadrilátero *boomerang* ou de Varignon respectivamente. Porém, com o uso de um quadrilátero 3-conexo, consegue-se com a inserção de um ponto de Steiner gerar um quadrilátero convexo de melhor qualidade.

É fácil perceber que devido a natureza dos quadriláteros  $n$ -conexos, é possível entrar em um *loop* infinito de adição de quadriláteros convexos (Figura 4.56). Se não se possuir um determinado critério para reduzir a quantidade de vértices na fronteira, e por fim obter uma quadrilaterização, é possível entrar neste *loop* infinito. Por esta razão, não serão usados todos os tipos de quadriláteros  $n$ -conexos, e, sim, apenas aqueles para os quais  $n \geq 2$ . Sendo que os mais utilizados são os 3-conexo e os 4-conexo pelos seguintes motivos: O uso do elemento 4-conexo é essencial para uma quadrilaterização, pois ele diminui a quantidade de vértices na fronteira, mas seu uso nem sempre é possível; e o uso do elemento 3-conexo sempre é possível, pois um elemento 3-conexo remove pelo menos um triângulo do domínio.

A prioridade para inserção de elementos dados dois quadriláteros convexos  $n_i$ -conexo e  $n_j$ -conexo quaisquer é tal que a maior prioridade é daquele que  $n_i > n_j$ . O uso de elementos 2-conexo pode ser feito ao lidar com nuvens de pontos, e internamente a quadriláteros *boomerang* ou de Varignon. Outro critério adotado para a convergência em uma quadrilaterização convexa é o uso do teorema de Meisters (41). Este teorema determina que todo polígono possui pelo menos dois ângulos convexos chamados de orelhas, estes ângulos determinam um triângulo a princípio, e é possível chegar a uma triangulação pela remoção sucessiva de orelhas de um polígono quando não se lida com nuvem de pontos. Busca-se realizar o mesmo, mas com a remoção de quadriláteros conforme já foi feito e provado por Maharavo (56). Como a prioridade mais alta é sempre a formação de quadriláteros 4-conexos, é possível que o domínio convirja para uma quadrilaterização em um domínio sem restrições. Maharavo (56) provou que a inserção de um quadrilátero 3-conexo pode ser feita de tal maneira que o

ponto de Steiner adicionado permita a formação de um quadrilátero (4-conexo) convexo ou não vizinho. Garante-se assim a formação de uma quadrilaterização não necessariamente convexa. Para tornar os elementos convexos, Maharavo une quadriláteros côncavos com seus vizinhos formando hexágonos ou quadriláteros (Figura 4.54) e aplica o teorema de Bremner (23) que garante que qualquer hexágono pode ser quadrilaterizado pela inserção de três pontos de Steiner.

Nesta dissertação, adota-se uma estratégia diferente. Na estratégia adotada, remove-se pelo menos um triângulo do domínio através dos elementos 3-conexo ou 4-conexo sucessivamente até que se chegue a uma quadrilaterização. Estes triângulos não precisam estar em orelhas desde que ciclos pares sejam formados. A estratégia adotada, portanto, diferencia-se de Maharavo, pois apesar do que será apresentado nos algoritmos, estes triângulos não precisam estar em orelhas. Este critério é usado para obter um primeiro resultado com a técnica. Outras diferenças entre esta técnica e a técnica de Maharavo são: para um elemento 3-conexo, é adicionada uma diagonal par não necessariamente vizinha; para regiões côncavas, é feito o uso de *templates* próprios de quadrilaterização; e caso não seja possível adicionar um elemento 3-conexo com diagonal par, uma diagonal ímpar será adicionada ao domínio. Na Figura 4.53 são apresentados dois exemplos de quadrilaterização possível pela adição de quadriláteros  $n$ -conexos, nestes exemplos não se faz o uso de diagonais. Isto sugere que o uso de diagonais não é necessário e uma melhoria futura a ser implementada.

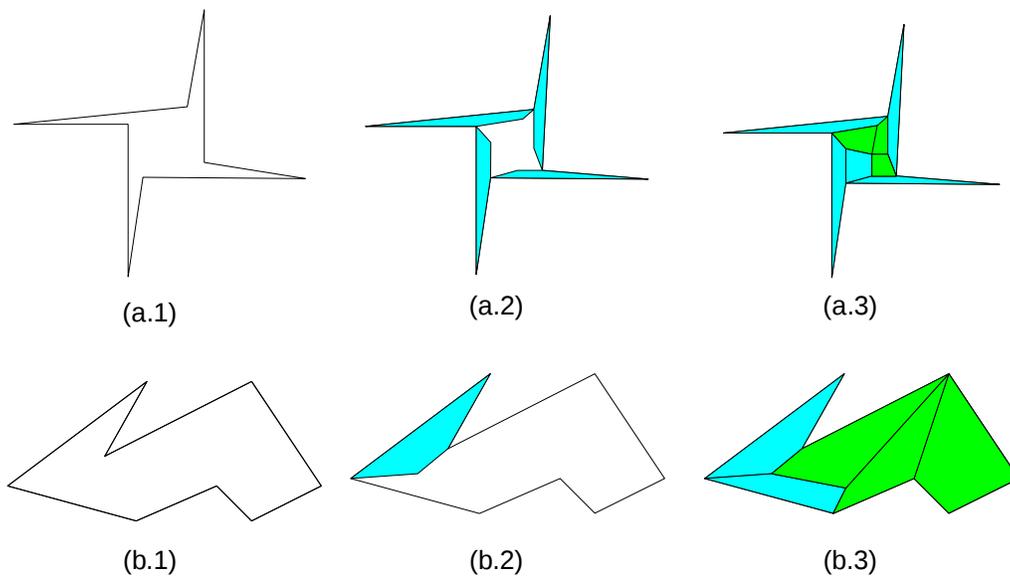


Figura 4.53: Quadrilaterização convexa pela adição de quadriláteros  $n$ -conexo: (a.1) e (b.1) Domínios originais; (a.2) e (b.2) Quadrilaterização parcial; (a.3) e (b.3) Quadrilaterização final.

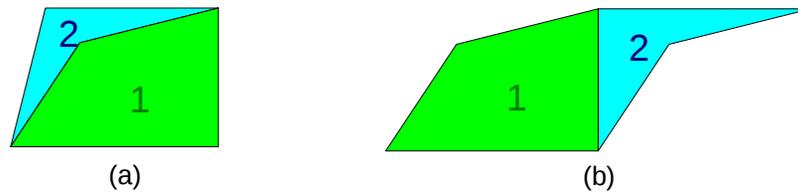


Figura 4.54: Resultado da união de dois quadriláteros: (a) Um quadrilátero, ou (b) Um hexágono.

Como foi dito, para garantir que a quadrilaterização convexa convergirá, adiciona-se uma diagonal par ao elemento 3-conexo. Esta diagonal par não necessariamente existe. A inserção de um novo vértice de Steiner associado a um elemento  $n$ -conexo modifica a fronteira. É claro que o ângulo formado no ciclo da fronteira será côncavo, pois é o ângulo externo de um quadrilátero convexo inserido. Já que uma triangulação sempre existe, deverá existir uma ou mais diagonais que dividem este novo vértice em ângulos menores que  $180^\circ$ , contudo, estas diagonais não são necessariamente pares. Por esta razão, em último caso, adiciona-se uma diagonal ímpar. É possível, claro, adicionar um elemento 3-conexo aliado a uma diagonal ímpar, mas estaria sendo adicionados dois vértices de Steiner ao domínio, quando apenas um era suficiente. Também é possível adicionar um elemento 2-conexo com uma diagonal par, mas no algoritmo apresentado nesta dissertação limita-se ao uso dos elementos 3-conexo e 4-conexo. A Figura 4.55 ilustra a prioridade de adição de elementos  $n$ -conexo.

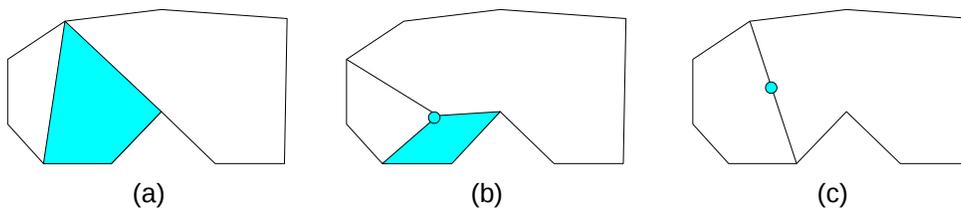


Figura 4.55: Adição de elementos  $n$ -conexo em ordem de prioridade: (a) 4-conexo; (b) 3-conexo com diagonal par; e (c) diagonal ímpar.

Pode ser que o melhor elemento a ser inserido no momento forme um ciclo vizinho côncavo ou triangular de quatro vértices, então, o uso de *templates* do quadrilátero de Varignon ou *boomerang* é necessário para obter uma quadrilaterização convexa. Além do caso citado, também pode ser possível que se formem quadriláteros côncavos ou triangulares ao final de uma redução com um ciclo de quatro vértices, novamente os *templates* serão utilizados. Na prática a inserção de quadriláteros  $n$ -conexos, que são convexos neste algoritmo, tenta ajustar o formato do ciclo da fronteira para que uma quadrilaterização convexa seja possível pelo uso de diagonais pares. Duas diagonais pares no caso de

um elemento 4-conexo, uma diagonal par no caso de um elemento 3-conexo, ou uma diagonal ímpar.

Ao tentar inserir quadriláteros  $n$ -conexos com  $n \geq 3$  em um ciclo côncavo de quatro vértices sem o uso de uma diagonal par, um loop infinito seria obtido, inserindo-se quadriláteros  $n$ -conexos cada vez menores (Figura 4.56). Por esta razão, diagonais são usadas. Contudo, é sugerido pelo uso de *templates*, que a inserção de um elemento 2-conexo pode resolver este *loop*. Como será discutido em trabalhos futuros, este algoritmo pode ser modificado para adicionar quadriláteros convexos  $n$ -conexos de ordem cada vez menor até que uma quadrilaterização convexa seja possível.

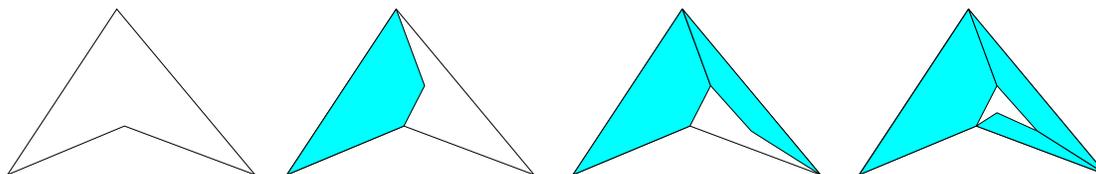


Figura 4.56: Loop infinito ao quadrilaterizar uma região convexamente por quadriláteros  $n$ -conexo com  $n \geq 3$ .

Resta apenas discutir o processo de construção de quadriláteros  $n$ -conexo quaisquer adotado nesta dissertação. Este processo não é único, e o seu método de construção pode ser alterado no futuro. Seleciona-se um ângulo convexo no ciclo da fronteira que defina um triângulo sem nenhum ponto interno ao mesmo (Figura 4.57). Qualquer outro vértice que se localize na região delimitada pelo ângulo convexo, desde que não se situe em seus extremos, forma um quadrilátero convexo quando são criados segmentos entre o vértice válido e os vértices adjacentes ao vértice com o ângulo convexo (Figura 4.58b). Este vértice é chamado de vértice válido, ao contrário, vértices fora da região delimitada pelo ângulo ou em sua fronteira são chamados de vértices ruins. O segundo triângulo formado por um vértice válido tem seus ângulos limitados pelos ângulos complementares externos do primeiro triângulo (Figura 4.58a) e não deve ter vértices internos. Logo, a união do primeiro triângulo, com o segundo triângulo obtido forma um quadrilátero convexo. Contudo, adicionar um quadrilátero convexo qualquer, mesmo 4-conexo, não garante uma quadrilaterização como foi visto no Capítulo 3. O vértice válido precisa formar, então, duas diagonais pares com os vértices adjacentes ao vértice que possui o ângulo convexo, só então, o elemento 4-conexo será considerado um elemento válido.

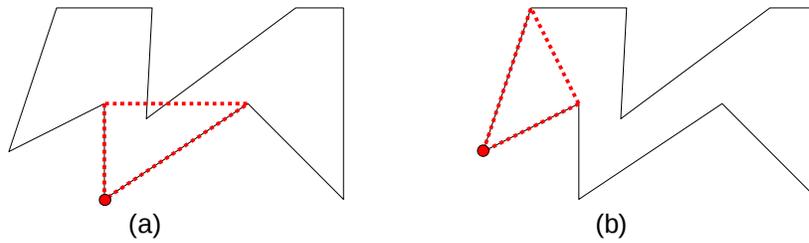


Figura 4.57: Exemplo de seleção de vértice com ângulo convexo (vermelho): (a) Triângulo base ruim; e (b) Triângulo base bom.



Figura 4.58: Regras para formação de quadrilátero  $n$ -convexo: (a) Ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares ao triângulo base (verde). Triângulo base em verde. Novo triângulo em azul; (b) Região válida para procura de vértices, vértices válidos em azul e vértices ruins em verde.

De forma natural, para saber se uma diagonal é par ou ímpar, é preciso contar a quantidade de vértices em cada ciclo. Contudo, se devido a decomposição do domínio existir apenas um ciclo, ou se o domínio constituir-se de um ciclo, é possível determinar ciclos pares e ímpares pela paridade dos vértices no domínio. Vértice par é aquele em que sua posição no ciclo é determinada por um número par. Vértice ímpar é aquele em que sua posição no ciclo é determinada por um número ímpar. Deste modo, uma diagonal par é um lado que une dois vértices de paridade diferentes e diagonal ímpar (com um vértice de Steiner em seu meio) é um lado que une dois vértices de mesma paridade. A Figura 4.59 exibe um exemplo de lançamento de diagonais pares e ímpares baseado na paridade dos vértices.

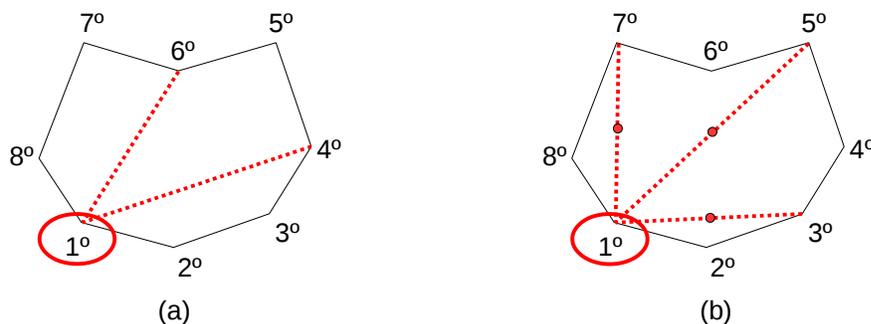


Figura 4.59: Lançamento de diagonais baseado na paridade dos vértices: (a) Diagonais pares; e (b) Diagonais ímpares.

Para inserir um ponto de Steiner no elemento 3-conexo, repete-se a mesma estratégia que aquela que foi usada para inserir 4-conexos a princípio, mas após a determinação do primeiro triângulo o segundo triângulo não é determinado pela busca de um vértice na região válida. Pois pode, inclusive, não existir vértices nesta região ou existir vértices que não formam diagonais pares. A Figura 4.60 ilustra o processo de criação de um vértice de Steiner para adição de um elemento 3-conexo. Traçam-se dois segmentos, um segmento que une os vértices vizinhos ao vértice que possui o ângulo convexo  $s_1$ , e um segundo segmento que parte do vértice convexo no sentido da bissetriz deste ângulo até cruzar pela primeira vez o domínio  $s_2$  (primeiro ponto de intersecção  $i_1$ ). Calcula-se, então, o segundo ponto de intersecção  $i_2$ , que é a intersecção entre os dois segmentos e finalmente o vértice de Steiner é adicionado pela média dos dois pontos de intersecção  $p_m$ .

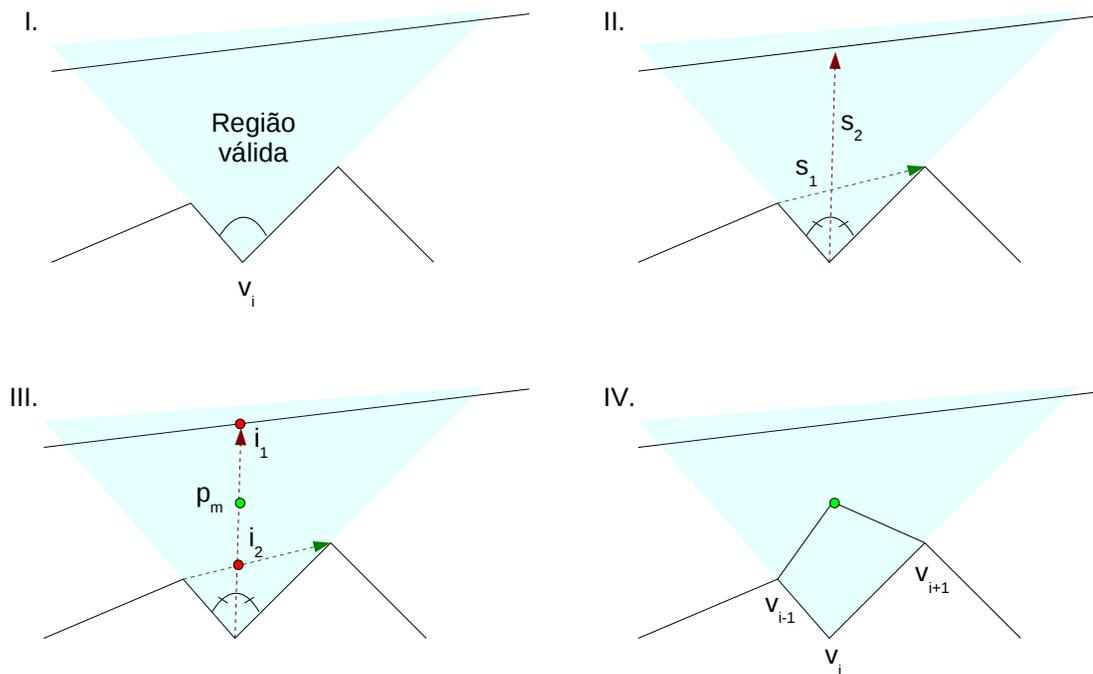


Figura 4.60: Processo de construção de um elemento 3-conexo: I) Determina-se a região válida a partir de  $v_i$ ; II) Disparam-se os segmentos  $s_1$  e  $s_2$ ; III) Encontra o ponto médio  $p_m$  de  $i_1$  e  $i_2$ ; IV) Liga-se  $p_m$  com os vértices adjacentes a  $v_i$ .

Após a adição do vértice de Steiner, é preciso verificar se não existem vértices internos ao segundo triângulo. Este teste é desnecessário se a região válida para inserção de elementos  $n$ -conexos for vazia. Com o vértice de Steiner, agora é preciso procurar uma diagonal par qualquer. A seguir serão discutidos os detalhes de implementação deste algoritmo.

## Algoritmo

No Algoritmo 4.15 está o procedimento principal do método *quadIncremental* em pseudocódigo. A adição de um novo vértice a fronteira é realizado caso a quantidade de vértices seja ímpar no método *criaCiclosPares*. Esta adição é feita na metade do maior segmento, mas qualquer outro método pode ser aplicado. Novamente, os ciclos são pintados de branco e, ao final da quadrilaterização convexa, pintados de preto para determinar o final do algoritmo. A Figura 4.61 exibe um domínio que será quadrilaterizado convexamente pelo Algoritmo 4.15.

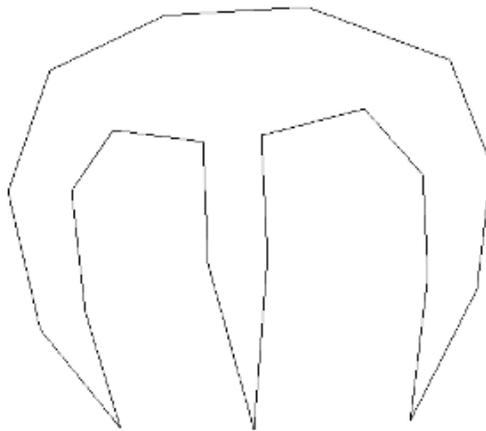


Figura 4.61: Domínio utilizado para o processo de quadrilaterização incremental.

```
01. Algoritmo quadIncremental()  
02.   criaCiclosPares()  
03.   pintaBrancoTodos()  
04.   quadInc(malha)
```

Algoritmo 4.15: Procedimento principal de quadrilaterização Incremental.

No Algoritmo 4.16 está a estrutura do algoritmo de quadrilaterização incremental. Esta estrutura segue aquela que foi utilizada em todos os outros algoritmos até então, mas com algumas modificações. Primeiramente estão os processos para adição de quadriláteros 4-conexos e 3-conexos com diagonais pares. E o processo para obter os polígonos A e B também possui uma diferença, pois ao adicionar um quadrilátero 4-conexo, pode ser que uma das diagonais pares seja na verdade lado do domínio (a

paridade é par por vacuidade). Neste caso, pode ser que o polígono  $A$  não exista, ou que só uma das diagonais exista. O algoritmo para quadrilaterização final, em caso de um ciclo com quatro vértices, é idêntico ao Algoritmo 4.12, inserindo um quadrilátero de Varignon ou *boomerang* de acordo com o caso.

O Algoritmo 4.17 descreve o processo para adição de um quadrilátero 4-conexo. Se o vértice for côncavo ou raso o procedimento retorna vazio. É, então, testado para cada vértice no polígono se é possível a adição de ciclos pares por diagonais, ignorando ciclos ímpares. Se for possível, o quadrilátero é criado. Então, é verificado se ele é convexo, e se existe algum ponto interno ao quadrilátero. Por fim, resta apenas verificar se estas diagonais pares cruzam o domínio. Devido a estas várias operações a complexidade do algoritmo é estimada em  $O(n^3)$ . Pois para cada vértice é verificado se existe um quadrilátero  $n$ -conexo com outro vértice do polígono que deve ser testado por intersecções, pontos internos e ciclos pares. Esta complexidade pode ser diminuída, contudo, através do uso de uma estrutura de dados que segmente o espaço como *quadtrees* ou *kd-tree*. Com o espaço segmentado, deve-se usar de vértices pares e ímpares, e a região válida para quadriláteros  $n$ -conexos com fim de limitar o domínio de busca.

O Algoritmo 4.18 descreve o processo para adição de um quadrilátero 3-conexo. Similar ao Algoritmo 4.17, se o vértice for côncavo ou raso a função retorna vazio. Em seguida, é verificado se no triângulo base existe algum vértice interno. Calcula-se a bissetriz do ângulo através da soma vetorial de dois vetores unitários, pois esta é a bissetriz do ângulo entre estes vetores no paralelogramo de lados iguais. O procedimento *vetorUnitário* divide um vetor qualquer pelo seu módulo. Para encontrar o vértice de Steiner, calculam-se os segmentos  $s_1$  e  $s_2$ , os seus pontos de intersecção  $i_1$  e  $i_2$ , e, finalmente, a média entre  $i_1$  e  $i_2$ . É verificado, então, se há algum ponto interno neste segundo triângulo. Com o quadrilátero 3-conexo, o Algoritmo 4.19 procura uma diagonal par, e adiciona os segmentos do quadrilátero 3-conexo ao ciclo. A Figura 4.62 exhibe o processo de quadrilaterização para o domínio apresentado na Figura 4.61. A Figura 4.63 exhibe a quadrilaterização final para o domínio apresentado na Figura 4.61. E por fim, a figura 4.64 apresenta o refino desta quadrilaterização convexa.

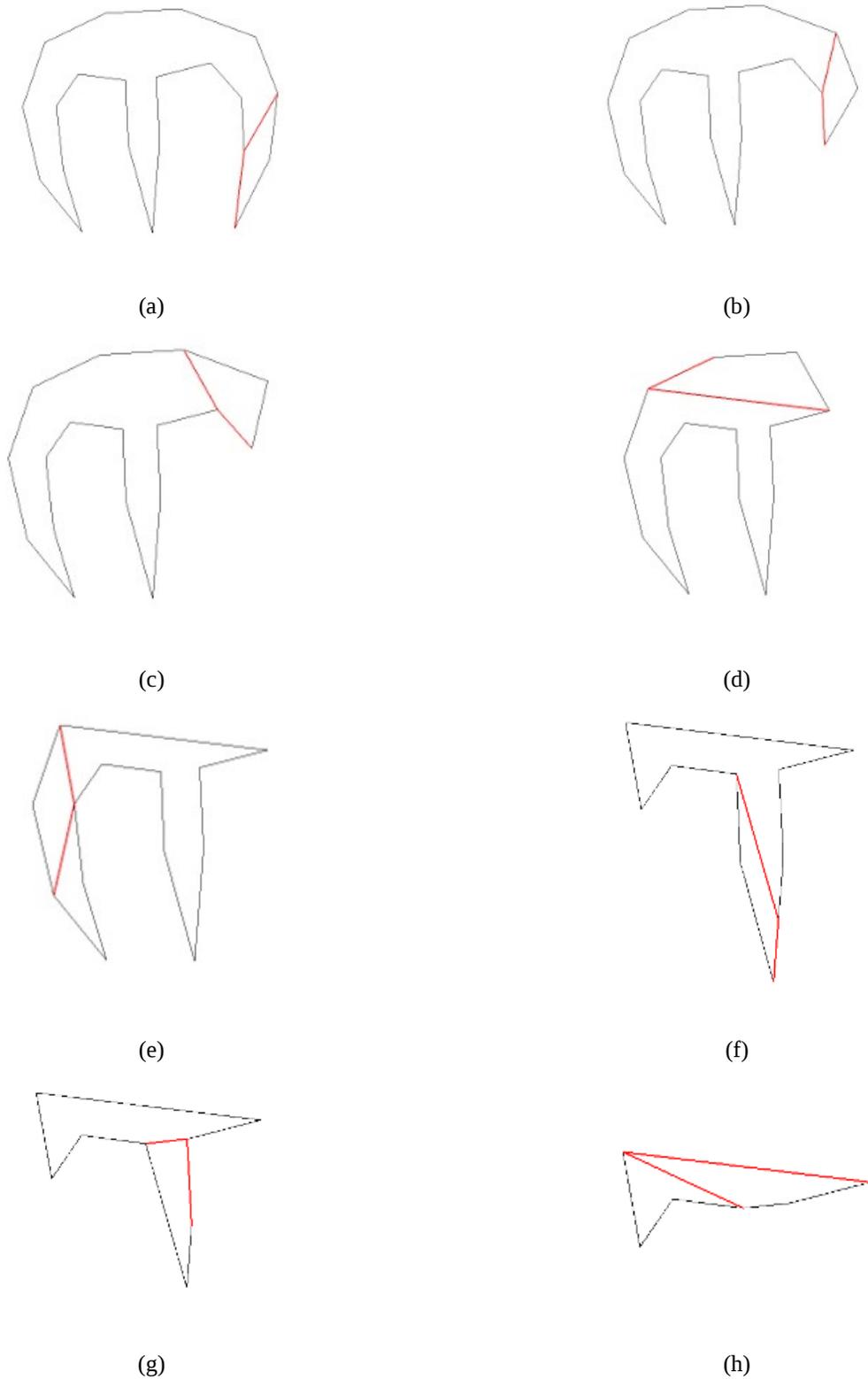


Figura 4.62: Adição de elementos  $n$ -conexo convexos. Quadriláteros 4-conexo são adicionados de (a) à (h). Nos passos (e) e (h) há a criação de quadriláteros côncavos que são preenchidos por elementos boomerang. O passo (e) demonstra que é possível a criação de dois ciclos ao adicionar um elemento 4-conexo.

```

01. Algoritmo quadInc(malha)
02.   Se (tamanhoCiclo() <= 4)
03.     quadrilaterizacao(malha)
04.   Senão
05.     Para cada vértice se nãoExiste(lista)
06.       lista = tentaInserir4conexo(vértice, malha)
07.     Se naoExiste(lista)
08.       Para cada vértice se nãoExiste(lista)
09.         lista = tentaInserir3conexoPar(vértice, malha)
10.     Se naoExiste(lista)
11.       Para cada vértice se nãoExiste(lista)
12.         lista = tentaInserirDiagonalImpar(vértice, malha)
13.     diagonal = lista.retReta(0)
14.     diagonal_inv = lista.retReta(1)
15.     precisaInverterCiclo()
16.     Se (diagonal.branca())
17.       poligonoA = criaPoligono(diagonal)
18.     Senão
19.       Se (diagonal_inv.branca())
20.         poligonoA = criaPoligono(diagonal_inv)
21.     Se existe(poligonoA)
22.       Se ((naoExiste(diagonal)) ou
23.         (poligonoA.possuiDiagonal(diagonal_inv)))
24.         adicionaHolesRetas(poligonoA)
25.         poligonoA.quadInc(malha)
26.       Senão
27.         poligonoB = criaPoligono(diagonal_inv)
28.         adicionaHolesRetas(poligonoA, poligonoB)
29.         poligonoA.quadInc(malha)
30.         poligonoB.quadInc(malha)

```

*Algoritmo 4.16: Descrição do método quadInc.*

```

01. Algoritmo tentaInserir4conexo( $v_i$ , malha)
02. Se (angulo(vértice)  $\geq$  180)
03.     retorna vazio
04. para cada vértice  $v_j$ 
05.     Se (ciclosImpares())
06.         continua
07.     e = Elemento( $v_{i-1}$ ,  $v_i$ ,  $v_{i+1}$ ,  $v_j$ )
08.     Se (convexo(e) = falso)
09.         continua
10.     interno = falso
11.     para cada vértice  $v_n$ 
12.         Se (( $v_n = v_{i-1}$ ) ou ( $v_n = v_i$ ) ou ( $v_n = v_{i+1}$ ))
13.             continua
14.         Se (internoTriangulo( $v_n$ ,  $v_{i-1}$ ,  $v_i$ ,  $v_j$ ))
15.             interno = verdade
16.             pare
17.         Se (internoTriangulo( $v_n$ ,  $v_i$ ,  $v_{i+1}$ ,  $v_j$ ))
18.             interno = verdade
19.             pare
20.     Se (interno)
21.         continua
22.      $d_1$  = Reta( $v_{i-1}$ ,  $v_j$ )
23.      $d_2$  = Reta( $v_j$ ,  $v_{i+1}$ )
24.     pintaBranco( $d_1$ ,  $d_2$ )
25.     Se (cruzaPoligono( $d_1$ ) ou cruzaPoligono( $d_2$ ))
26.         continua
27.     pintaPretoArestasQuadriláteroNconexo()
28.     malha.adicionaLista(e)
29.     retorna listaSeg( $d_1$ ,  $d_2$ )
30. retorna vazio

```

*Algoritmo 4.17: Descrição do método tentaInserir4conexo.*

```

01. Algoritmo tentaInserir3conexoPar( $v_i$ , malha)
02. Se (angulo(vértice)  $\geq 180$ )
03.     retorna vazio
04. para cada vértice  $v_n$ 
05.     Se ( $(v_n = v_{i-1})$  ou  $(v_n = v_i)$  ou  $(v_n = v_{i+1})$ )
06.         continua
07.     Se (internoTriangulo( $v_n$ ,  $v_{i-1}$ ,  $v_i$ ,  $v_{i+1}$ ))
08.         retorna vazio
09. vetor_1 = vetorUnitário( $v_{i-1} - v_i$ )
10. vetor_2 = vetorUnitário( $v_{i+1} - v_i$ )
11. bissetriz = vetorUnitário(vetor_1 + vetor_2)
12.  $s_1 = v_{i+1} - v_{i-1}$ 
13.  $s_2 = \text{Reta}(v_i, v_i + \text{bissetriz})$ 
14.  $d = s_2.\text{interceptaSegmento}(s_1)$ 
15.  $i_1 = v_i + (d * \text{bissetriz})$ 
16.  $d_{\min} = \text{VALOR\_MAXIMO}$ 
17. para cada segmento
18.      $d = s_2.\text{interceptaSegmento}(\text{segmento})$ 
19.     Se ( $d < d_{\min}$ )
20.          $d_{\min} = d$ 
21.  $i_2 = v_i + (d_{\min} * \text{bissetriz})$ 
22.  $v_s = \text{pontoMedio}(i_1, i_2)$ 
23. para cada vértice  $v_n$ 
24.     Se ( $(v_n = v_{i-1})$  ou  $(v_n = v_i)$  ou  $(v_n = v_{i+1})$ )
25.         continua
26.     Se (internoTriangulo( $v_n$ ,  $v_{i-1}$ ,  $v_{i+1}$ ,  $v_s$ ))
27.         retorna vazio
28. lista = procuraDiagonalPar( $v_s$ )
29. Se (lista  $\neq$  vazio)
30.     e = Elemento( $v_{i-1}$ ,  $v_i$ ,  $v_{i+1}$ ,  $v_s$ )
31.     malha.adicionaLista(e)
32. retorna lista

```

Algoritmo 4.18: Descrição do método tentaInserir3conexoPar.

```

01. Algoritmo procuraDiagonalPar( $v_s$ )
02. para cada vértice  $v_j$ 
03.     Se (ciclosImpares())
04.         continua
05.      $d_1 = \text{Reta}(v_s, v_j)$ 
06.      $d_2 = \text{Reta}(v_j, v_s)$ 
07.      $sq_1 = \text{Reta}(v_{i-1}, v_s)$ 
08.      $sq_2 = \text{Reta}(v_s, v_{i+1})$ 
09.     Se (  $\text{cruzaPoligono}(d_1)$  ou  $\text{cruzaPoligono}(sq_1)$  ou
10.          $\text{cruzaPoligono}(sq_2)$  )
11.         continua
12.     pintaBranco( $d_1, d_2, sq_1, sq_2$ )
13.     corrigeCiclos()
14.     pintaPretoArestasQuadriláteroNconexo()
15.     retorna lista( $d_1, d_2$ )
16. retorna vazio

```

Algoritmo 4.19: Descrição do método procuraDiagonalPar.

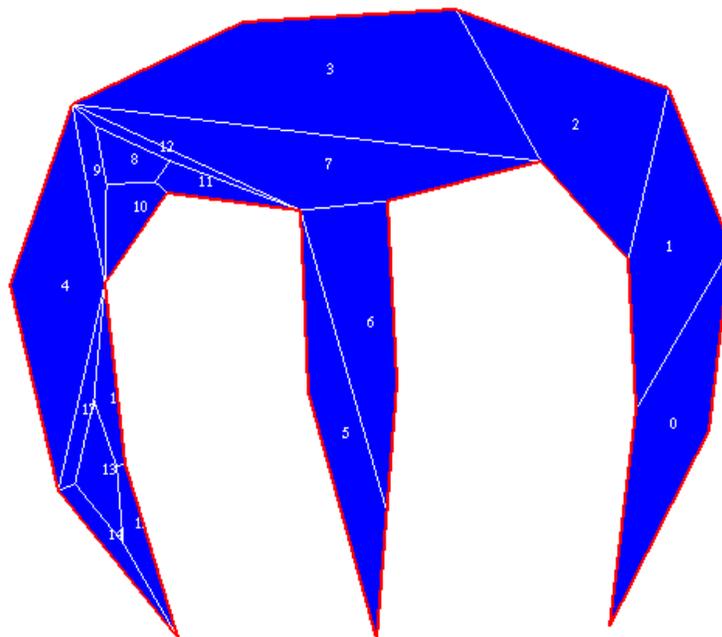
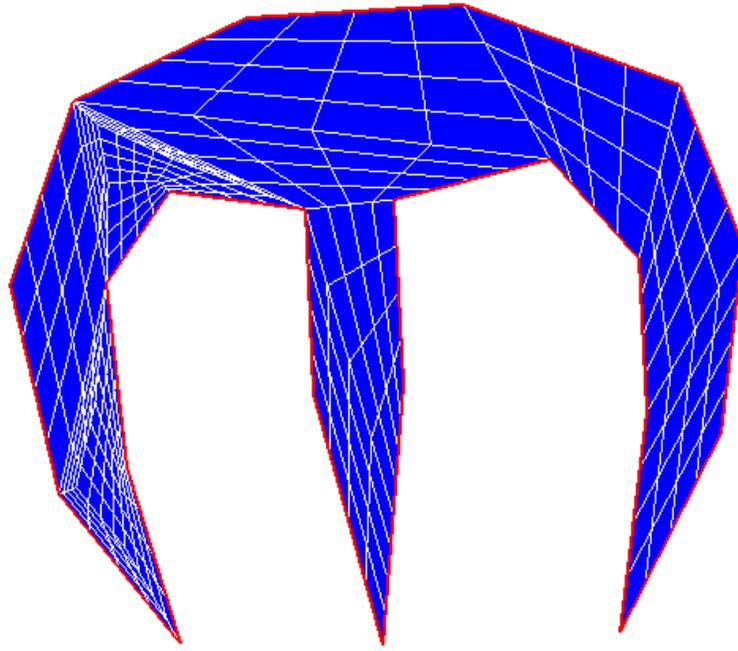
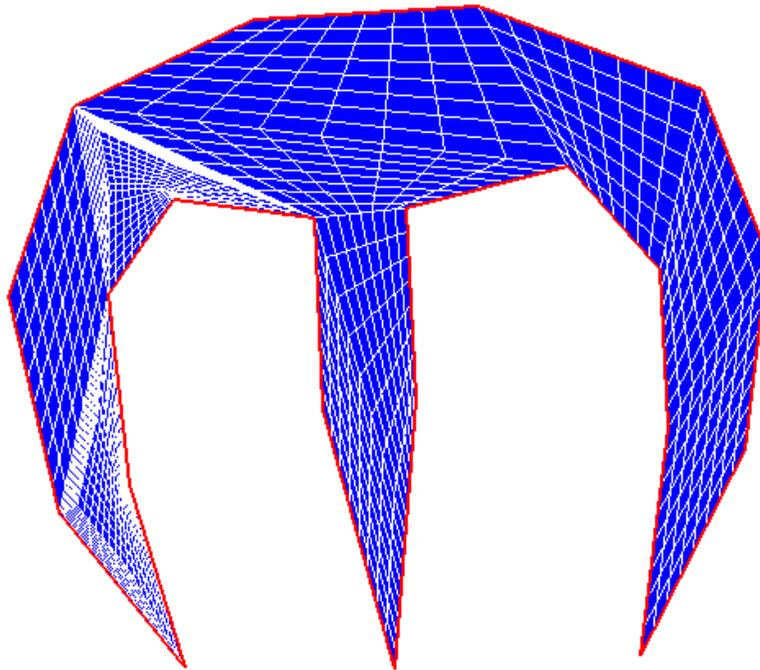


Figura 4.63: Quadrilaterização convexa final para um domínio através do processo de quadrilaterização incremental.



(a)



(b)

Figura 4.64: Refino de uma malha gerada por quadrilaterização incremental pelo uso do ponto médio. Elementos muito pequenos são formados em regiões com boomerang: (a) Duas iterações; (b) Três iterações.

## 4.5 Considerações Finais

Neste capítulo, os algoritmos desenvolvidos nesta dissertação foram detalhados. Todos os algoritmos apresentam seu escopo e sua ideia, antes de fornecer o pseudocódigo. A seção Ideia fornece os conceitos utilizados nos algoritmos, e somente ela já seria o suficiente para realizar uma implementação, mas os algoritmos são fornecidos para demonstrar o processo desenvolvido e fornecer algum formalismo as ideias. Alguns detalhes dos algoritmos não foram abordados apenas por questão de espaço, pois são operações triviais apesar de extensas e dependem unicamente da estrutura de dados utilizada.

No próximo capítulo, são apresentados: os resultados obtidos com os quatro métodos descritos, e uma análise da complexidade do código e da qualidade dos elementos gerados de acordo com o caso. Será feito também uma crítica dos algoritmos com mais profundidade de forma a denotar suas qualidades e defeitos. Por fim, os algoritmos são aplicados a exemplos reais e virtuais de modelagem do subsolo.

## 5. Análise e Comparação dos Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com as quatro técnicas e as analisa de forma comparativa através de um índice de topologia e de geometria. Usa-se a malha Cartesiana para avaliar a qualidade das malhas geradas, já que todos seus elementos são regulares e ortogonais. Para o cálculo do índice topológico  $i_t$  utiliza-se a seguinte fórmula:

$$i_t = \frac{\sum_{i=0}^n f(v_i)}{n}, \quad (5.1)$$

tal que  $n$  é a quantidade de vértices na malha e  $v_i$  é um vértice qualquer da malha. A função  $f(v_i)$  é definida como:

$$f(v_i) = \begin{cases} u-2, & \text{se } v_i \in C_f, \\ u-4, & \text{se } v_i \notin C_f, \end{cases} \quad (5.2)$$

em que  $u$  é a quantidade de quadriláteros que compartilham o vértice  $v_i$  e  $C_f$  é o ciclo mais externo da malha, ou o ciclo da fronteira. Ao final deste cálculo obtém-se um número próximo de zero, caso a malha seja próxima de uma malha Cartesiana, e igual a zero, caso a malha seja Cartesiana. Para o cálculo do índice de geometria  $i_g$  utiliza-se a seguinte fórmula:

$$i_g = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \frac{a(e_j)}{A(e_j)}, \quad (5.3)$$

tal que  $m$  é a quantidade de quadriláteros na malha e  $e_j$  é um quadrilátero qualquer da malha. A função  $a(e_j)$  é a fórmula de Brahmagupta (85) que define a área para quadriláteros quaisquer:

$$a(e_j) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \theta}, \quad (5.4)$$

em que  $s$  é o semiperímetro do quadrilátero,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são os comprimentos dos lados do quadrilátero e  $\theta$  é a média entre dois ângulos opostos quaisquer do quadrilátero. Por fim, A função  $A(e_j)$  é a área ideal de um quadrilátero regular, isto é,

$$A(e_j) = \max\{a, b, c, d\}^2, \quad (5.5)$$

em que  $\max$  é o maior comprimento entre os segmentos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$ . Para a Fórmula 5.3 o valor ideal deve ser igual a um para uma malha Cartesiana; e próximo de um para uma malha próxima de uma malha Cartesiana. Além dos índices de topologia e geometria, para cada técnica será exibido um

gráfico que apresenta a frequência dos ângulos na malha. Desta forma, uma malha que apresenta uma frequência alta de ângulos retos é considerada uma boa malha, já que a malha Cartesiana se compõe exclusivamente de ângulos retos. Todos os exemplos que serão apresentados são refinados pelo uso do ponto médio, já que para elementos quadrilaterais convexos, o ponto médio gera elementos de qualidade maior como será visto. Nos próximos exemplos, a técnica que possui os melhores índices, além de uma frequência alta de ângulos retos é a melhor técnica, pois se aproxima da malha Cartesiana, que é a melhor malha quadrilateral convexa existente.

## **5.1 Exemplo 1: Palavras em um quadrilátero convexo**

Neste exemplo serão aplicadas as técnicas do ponto médio (pm) e de triquad (tq) pelos métodos I (tq.I) e II (tq.II) que são as técnicas que, no momento, já são capazes de lidar com domínios que contêm de linhas poligonais. A técnica tq.I representa o método original de Mark De Berg citado por Everett (36) e serve como comparação secundária para as técnicas, após a malha Cartesiana que foi usada para construir os índices. As outras técnicas também podem ser aplicadas para estes casos, mas sua implementação será deixada para trabalhos futuros.

### **5.1.1 Descrição**

Este domínio define uma série de linhas poligonais que não se cruzam, mas podem estar muito próximas umas das outras dentro de um quadrilátero convexo com quatro vértices. A letra r é composta de quatro segmentos de reta e cinco vértices. A letra a é composta de três segmentos de reta e cinco vértices. A letra f é composta de três segmentos de reta e cinco vértices. A letra e é composta de quatro segmentos de reta e seis vértices. A letra l é composta de dois segmentos de reta e três vértices. A letra u é composta de três segmentos de reta e quatro vértices. A letra c é composta de três segmentos de reta e quatro vértices. Este exemplo serve para demonstrar a utilidade da técnica para linhas poligonais quaisquer. São poucas as técnicas de quadrilaterização existentes que buscam, além de produzir uma quadrilaterização convexa, tratar de restrições. Espera-se demonstrar assim a eficiência dos métodos e sua robustez para casos quaisquer. A Figura 5.1 exhibe um exemplo de domínio utilizado para uma quadrilaterização convexa. As figuras a seguir seguem a seguinte ordem lógica exibem primeiro a

malha para o domínio anterior de acordo com cada técnica, em seguida um detalhe para esta malha abaixo da letra l em uma figura posterior para demonstrar que os quadriláteros são convexos, apesar de finos: a Figura 5.2 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica do ponto médio e a Figura 5.3 exhibe um detalhe abaixo da letra l da quadrilaterização convexa produzida pela técnica; a Figura 5.4 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica de triquad pelo método I e a Figura 5.5 exhibe um detalhe abaixo da letra l da quadrilaterização convexa produzida pela técnica; a Figura 5.6 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica de triquad pelo método I e a Figura 5.7 exhibe um detalhe abaixo da letra l da quadrilaterização convexa produzida pela técnica.

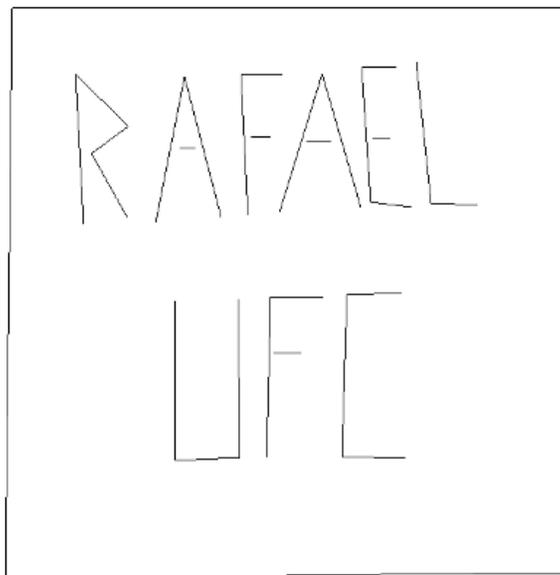


Figura 5.1: Exemplo de domínio a ser quadrilaterizado convexamente.

### 5.1.2 Motivação

Espera-se demonstrar a aplicabilidade das técnicas sobre modelos que são compostos por várias linhas poligonais, e definem regiões que podem ser quadrilaterizadas pelos métodos. Isso é muito importante em vários tipos de problemas, como para geração de malhas de reservatórios, que será abordado na próxima seção. É possível perceber neste exemplo todos os tipos de falhas estruturais e estratigráficas citadas no Capítulo 1. Os elementos não apresentam ainda as características necessárias para malhas desses tipos de modelos, como por exemplo elementos de tamanhos próximos. Contudo, acredita-se que as técnicas possam ser aperfeiçoadas e o resultado aqui apresentado não é final.

### 5.1.3 Resultados

Observou-se que a técnica do ponto médio foi a que melhor se comportou entre todas as técnicas. O ponto médio exibe o melhor coeficiente topológico e geométrico, além da melhor distribuição de ângulos pela malha para uma quantidade reduzida de quadriláteros na malha. Estes fatores indicam que a malha gerada se aproxima mais de uma malha Cartesiana, que é a melhor que existe. A Tabela 5.1 exibe os índices topológicos e geométricos para as malhas das Figuras 5.2, 5.4 e 5.6. Os Gráficos 5.1, 5.2, e 5.3 exibem a frequência dos ângulos nestas malhas. Pode-se perceber pela Tabela 5.1, que conforme o refino da malha aumenta por sucessivas iterações das técnicas, o índice topológico melhora consideravelmente após poucas iterações, enquanto que o índice geométrico melhora muito pouco. Isto é de se esperar, já que as regiões foram formadas sem se preocupar com o tamanho de seus elementos, e sim com a convexidade dos mesmos. A frequência dos ângulos indica que há uma concentração próxima a ângulos retos nos quadriláteros no intervalo de  $81^\circ$  e  $99^\circ$  para as técnicas pm e tq.II, o que pode indicar bons elementos sendo formados. A técnica tq.I, que representa o método original de Mark De Berg (36), exibe como a distribuição dos ângulos, apesar de convexa, pode-se encontrar concentrada em ângulos muito grandes ou pequenos para este método.

As malhas exibidas nas Figuras 5.2, 5.4 e 5.6 demonstram tanto os pontos fortes como fracos de cada técnica. É possível observar regiões com elementos muito bons, e regiões com elementos ruins também estão presentes e em destaque nas Figuras 5.3, 5.5 e 5.7. A complexidade de todas as técnicas aqui apresentadas no momento é estimada em  $O(n^2)$ , mas é possível reduzir este valor através de uma técnica mais eficiente de particionamento em regiões convexas.

Técnica	Iterações	$i_g$	$i_t$	Quantidade de Elementos
pm	1	0.227500	1.671642	196
pm	2	0.260590	0.443884	784
pm	3	0.282834	0.121789	3136
pm	4	0.296153	0.035621	12544
tq.I	1	0.169447	1.923954	258
tq.I	2	0.205455	0.501441	1032
tq.I	3	0.230388	0.133655	4128
tq.I	4	0.245310	0.037353	16512
tq.II	1	0.214401	1.719457	216
tq.II	2	0.244149	0.453608	864
tq.II	3	0.263871	0.123236	3456
tq.II	4	0.275388	0.035506	13824

Tabela 5.1: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.2, 5.4 e 5.6.

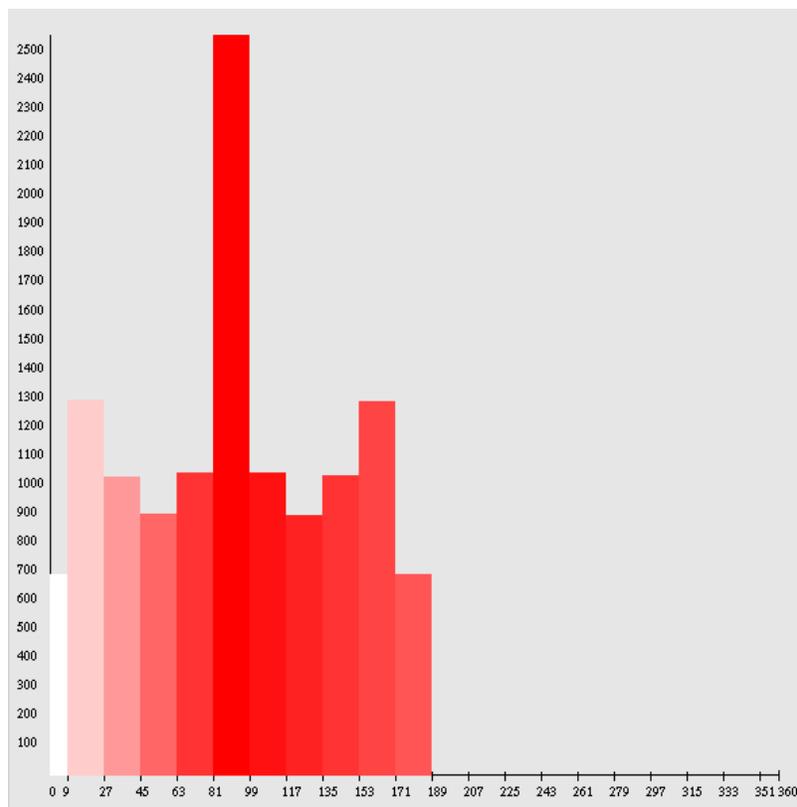


Gráfico 5.1: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.2. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

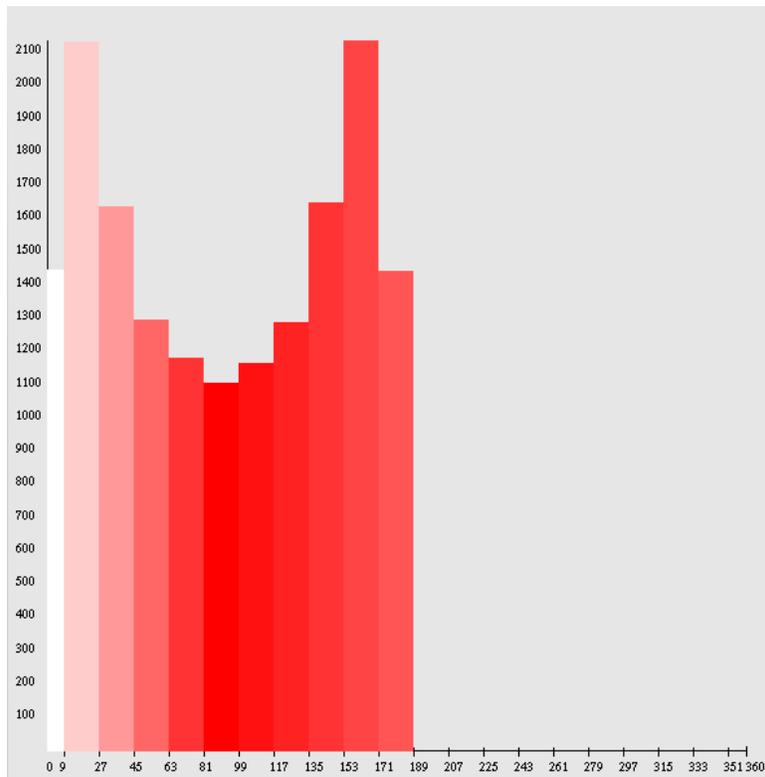


Gráfico 5.2: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.4. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

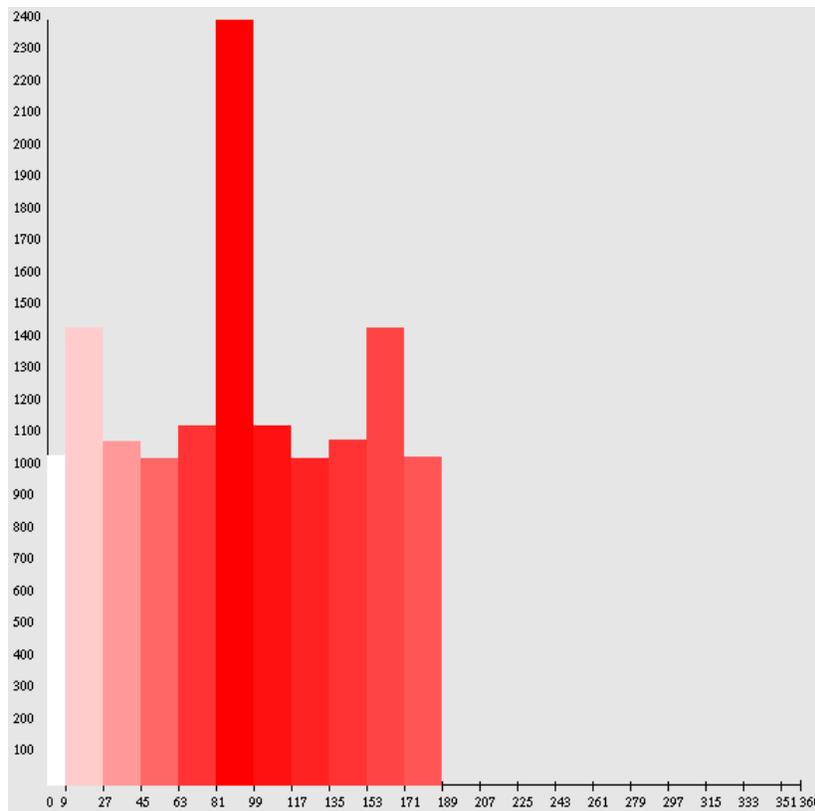


Gráfico 5.3: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.6. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

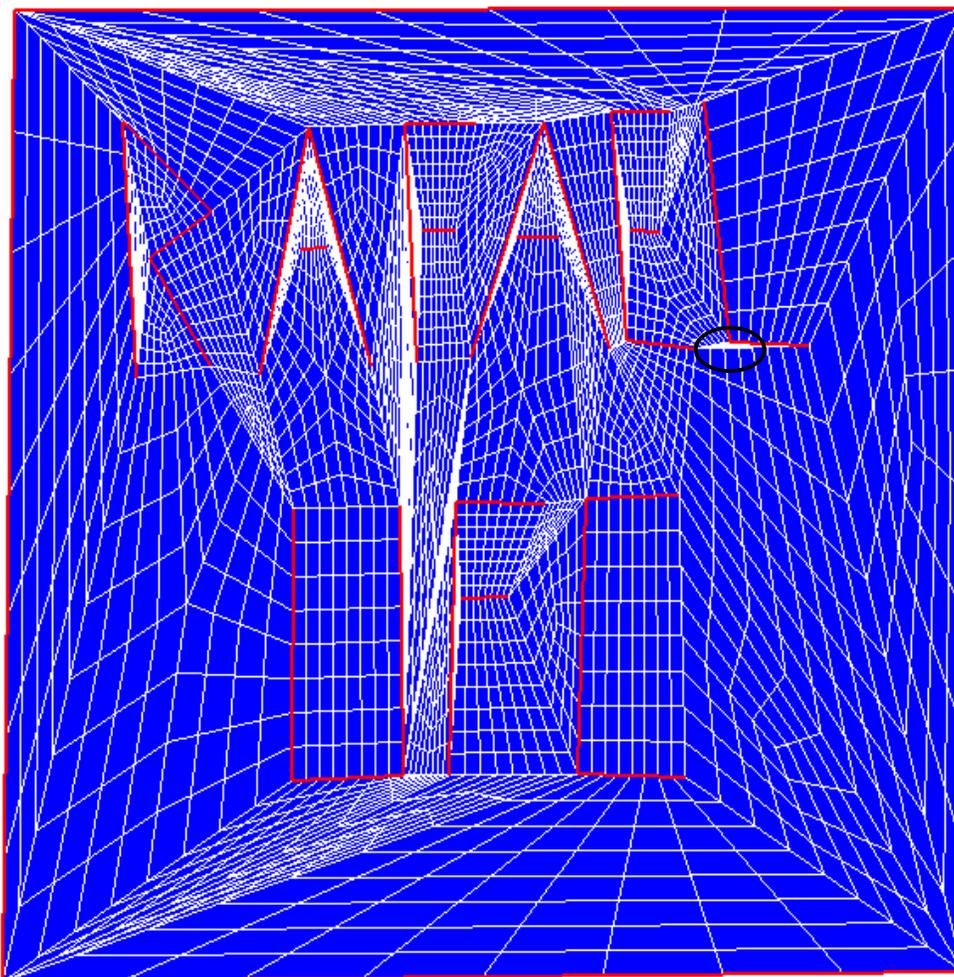


Figura 5.2: Exemplo de malha convexa gerada pela técnica do ponto médio com três iterações no domínio apresentado na Figura 5.1. A elipse nesta figura define uma região que é ampliada na Figura 5.3.

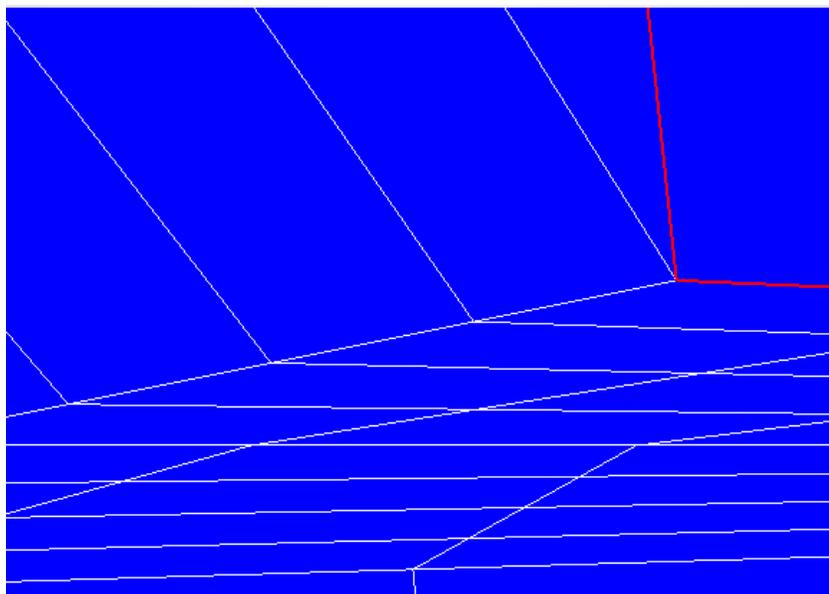


Figura 5.3: Região ampliada da malha presente na Figura 5.2.

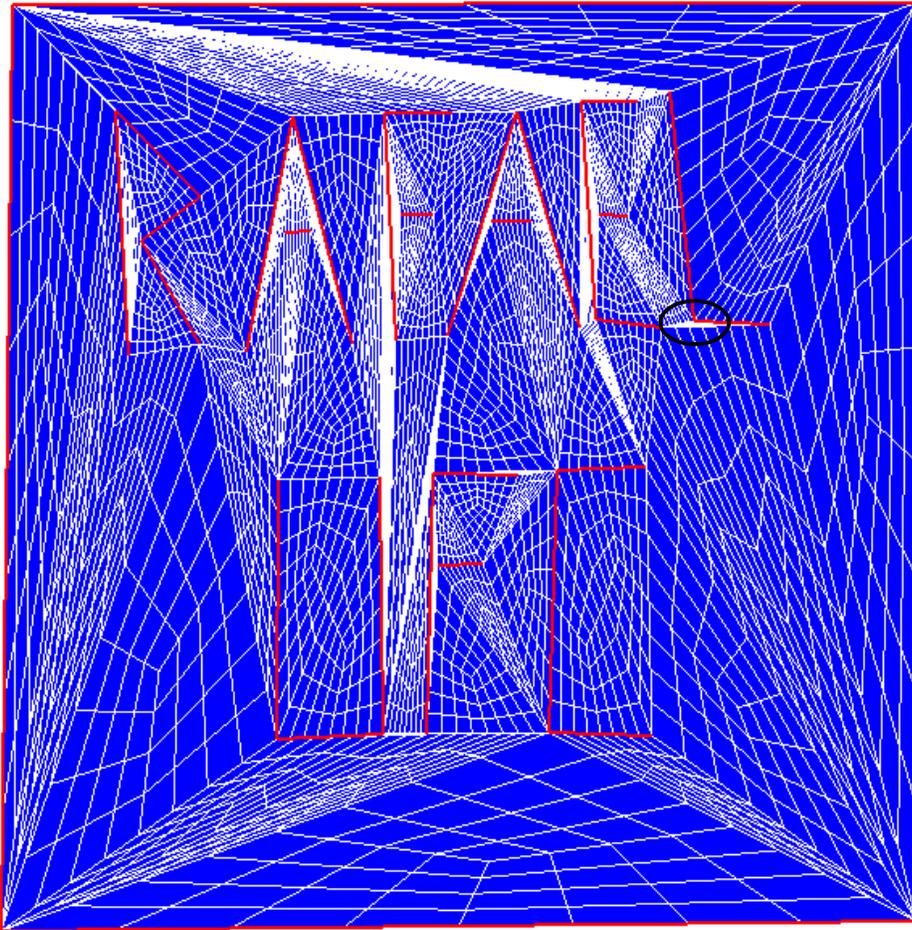


Figura 5.4: Exemplo de malha convexa gerada pela técnica triquad método I com três iterações no domínio apresentado na Figura 5.1. A elipse nesta figura define uma região que é ampliada na Figura 5.3.

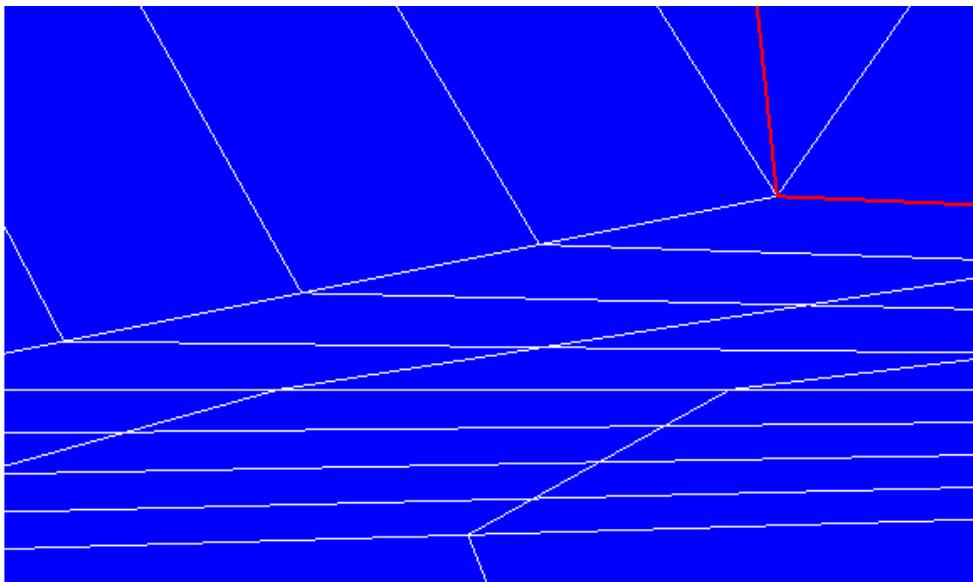


Figura 5.5: Região ampliada da malha presente na Figura 5.4.

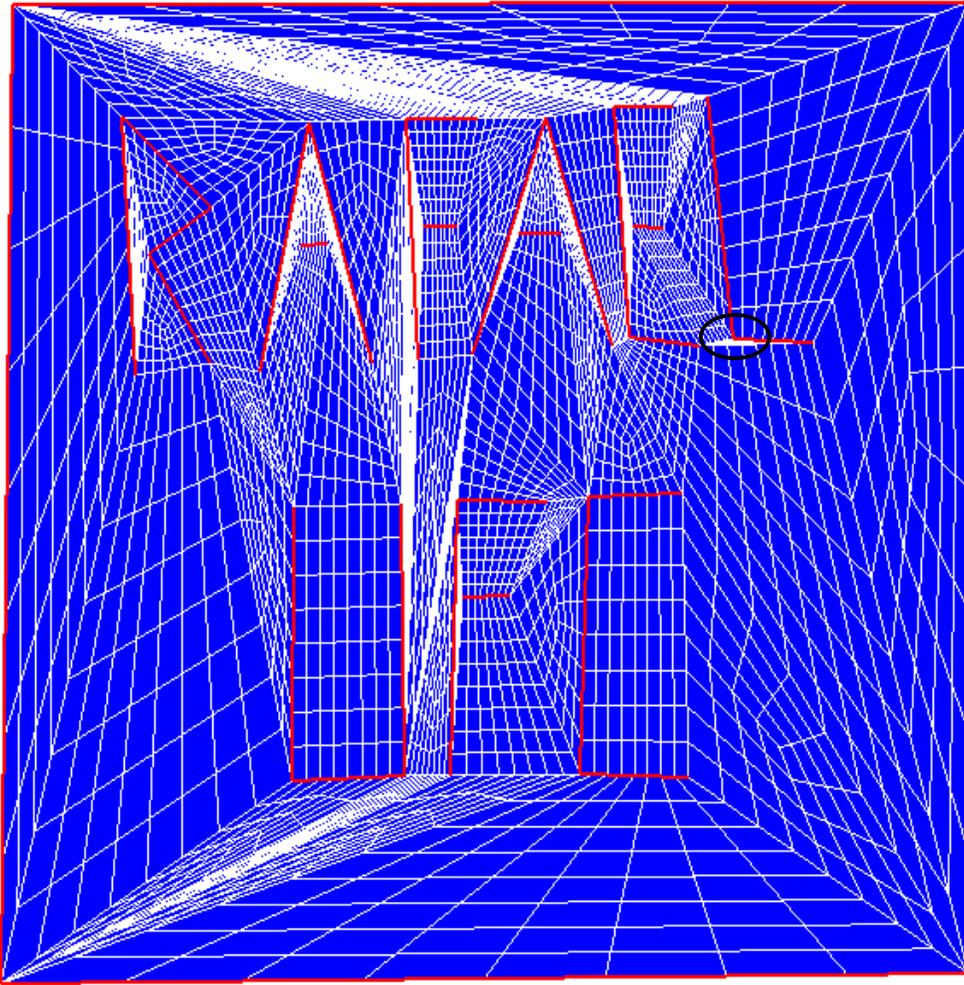


Figura 5.6: Exemplo de malha convexa gerada pela técnica triquad método II com três iterações no domínio apresentado na Figura 5.1. A elipse nesta figura define uma região que é ampliada na Figura 5.3.

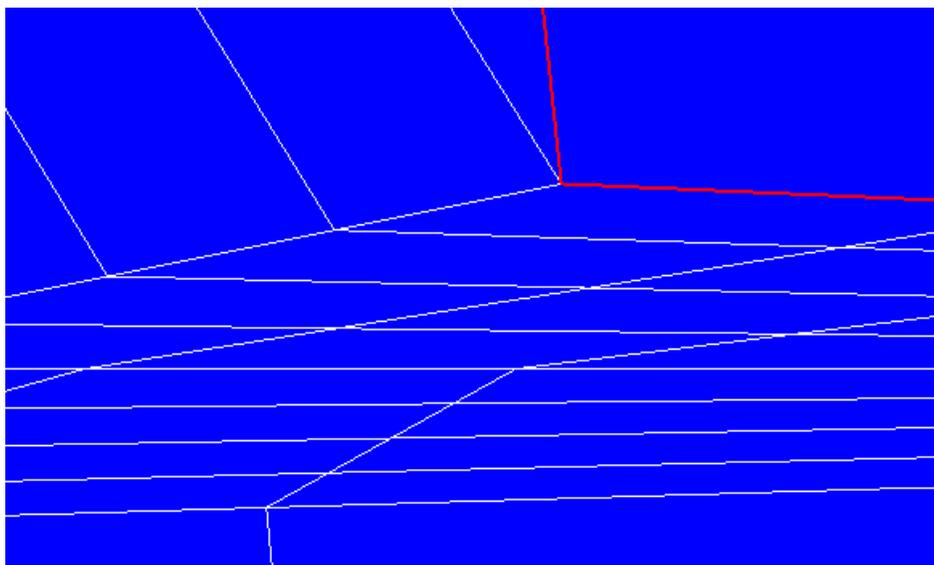


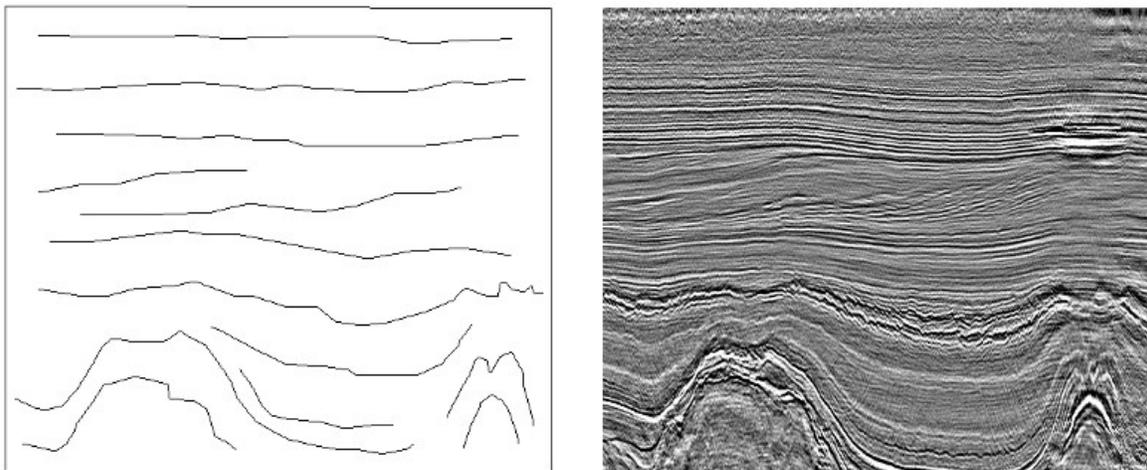
Figura 5.7: Região ampliada da malha presente na Figura 5.6.

## 5.2 Exemplo 2: Reservatório

Este exemplo mostra a geração de malha para um modelo de reservatório real. Observou-se que a técnica do ponto médio foi a que melhor se comportou entre todas as técnicas. Novamente são aplicadas as técnicas do ponto médio (pm) e de triquad (tq) pelos métodos I (tq.I) e II (tq.II) que são as técnicas que, no momento, já são capazes de lidar com domínios que contêm de linhas poligonais. A técnica tq.I representa o método original de Mark De Berg (36) e serve como comparação secundária para as técnicas, após a malha Cartesiana que foi usada para construir os índices.

### 5.2.1 Descrição

Este domínio define uma série de linhas poligonais que forma horizontes e falhas no reservatório. Estas linhas não se cruzam e podem estar muito próximas umas das outras dentro de um quadrilátero convexo com quatro vértices. Este exemplo possui quatorze linhas poligonais com quatrocentos e quatorze vértices distribuídos de forma heterogênea entre os segmentos. A Figura 5.8 exibe um exemplo de reservatório utilizado para uma quadrilaterização convexa. A Figura 5.9 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica do ponto médio. A Figura 5.10 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica de triquad pelo método I. A Figura 5.11 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica de triquad pelo método II.



*Figura 5.8: Exemplo de domínio a ser quadrilaterizado convexamente. À esquerda, um exemplo de reservatório simplificado, normalmente, trabalho feito por geólogos. À direita, os dados sísmicos de reservatório.*

## 5.2.2 Motivação

Espera-se demonstrar a aplicabilidade das técnicas sobre malhas de reservatórios, que são compostas por várias linhas poligonais, e que definem regiões que podem ser quadrilaterizadas pelos métodos. Este exemplo é utilizado de forma a exemplificar uma malha de reservatório. Os elementos não apresentam ainda as características necessárias para uma simulação no reservatório, como por exemplo elementos de tamanhos próximos. Contudo, acredita-se que as técnicas possam ser aperfeiçoadas e o resultado aqui apresentado não é final.

## 5.2.3 Resultados

Observou-se como era esperado que a técnica do ponto médio foi a que melhor se comportou entre todas as técnicas, pois exhibe o melhor coeficiente topológico e geométrico, bem como a melhor distribuição de ângulos pela malha para uma quantidade reduzida de quadriláteros na malha. A Tabela 5.2 exhibe os índices topológicos e geométricos para as malhas das Figuras 5.9, 5.10 e 5.11. Os Gráficos 5.4, 5.5 e 5.6 exibem a frequência dos ângulos nestas malhas. Pode-se perceber pela Tabela 5.2, novamente, que conforme o refino da malha aumenta por sucessivas iterações das técnicas, o índice topológico melhora consideravelmente após poucas iterações, enquanto que o índice geométrico melhora muito pouco. Também é possível perceber que regiões entre linhas poligonais com discretização próxima umas das outras produzem regiões de qualidade superior. A frequência dos ângulos indica que há uma concentração próxima a ângulos retos nos quadriláteros no intervalo de  $81^\circ$  e  $99^\circ$  para as técnicas pm e tq.II, o que pode indicar bons elementos sendo formados principalmente nestas regiões de discretização equivalente. A técnica tq.I, que representa o método original de Mark De Berg (36), exhibe como a distribuição dos ângulos, apesar de convexa, pode se encontrar distribuída de forma heterogênea entre os ângulos.

Técnica	Iterações	$i_g$	$i_t$	Quantidade de Elementos
pm	1	0.331217	1.660900	862
pm	2	0.375502	0.421174	3448
pm	3	0.405464	0.107756	13792
tq.I	1	0.206533	1.984837	1314
tq.I	2	0.251945	0.500285	5256
tq.I	3	0.282926	0.126705	21024
tq.II	1	0.327161	1.688541	1016
tq.II	2	0.361226	0.427204	4064
tq.II	3	0.383049	0.108892	16256

Tabela 5.2: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.9, 5.10 e 5.11.

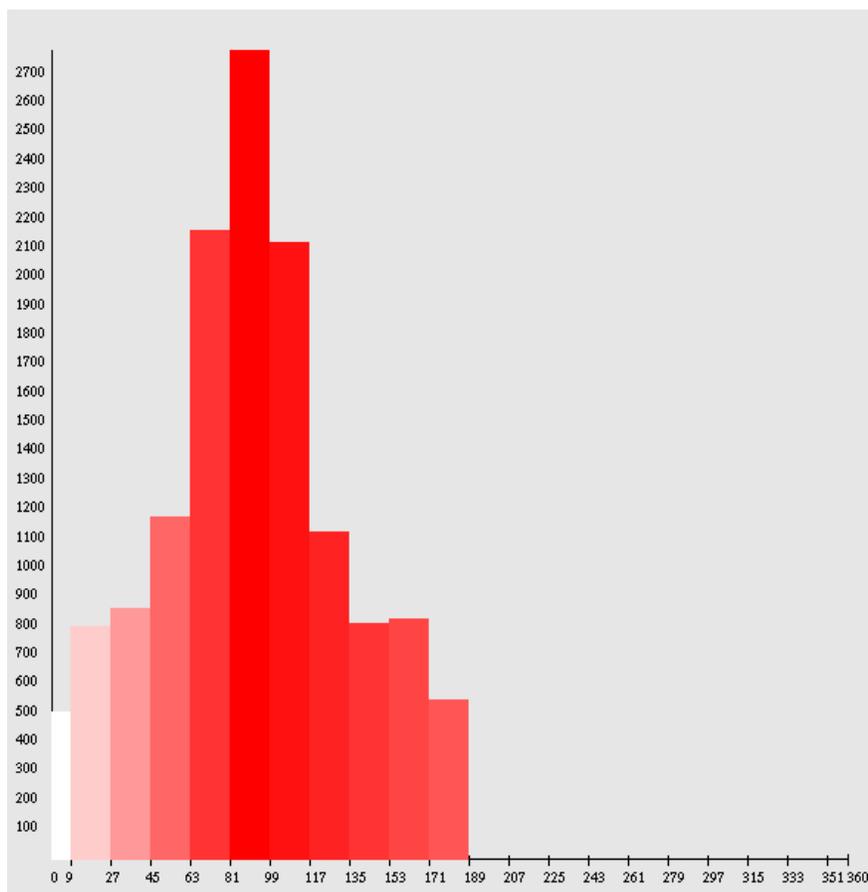


Gráfico 5.4: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.9. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

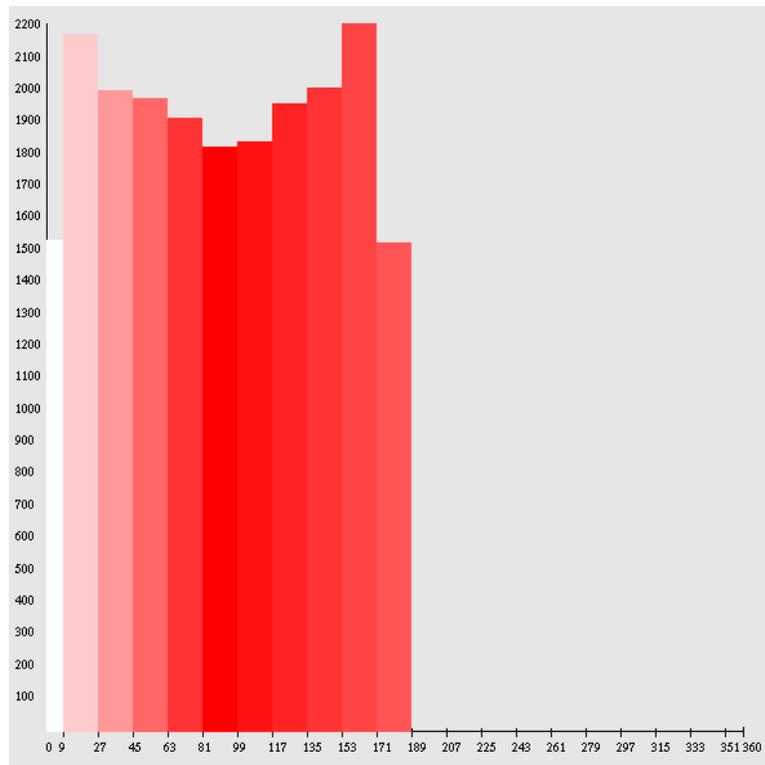


Gráfico 5.5: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.10. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

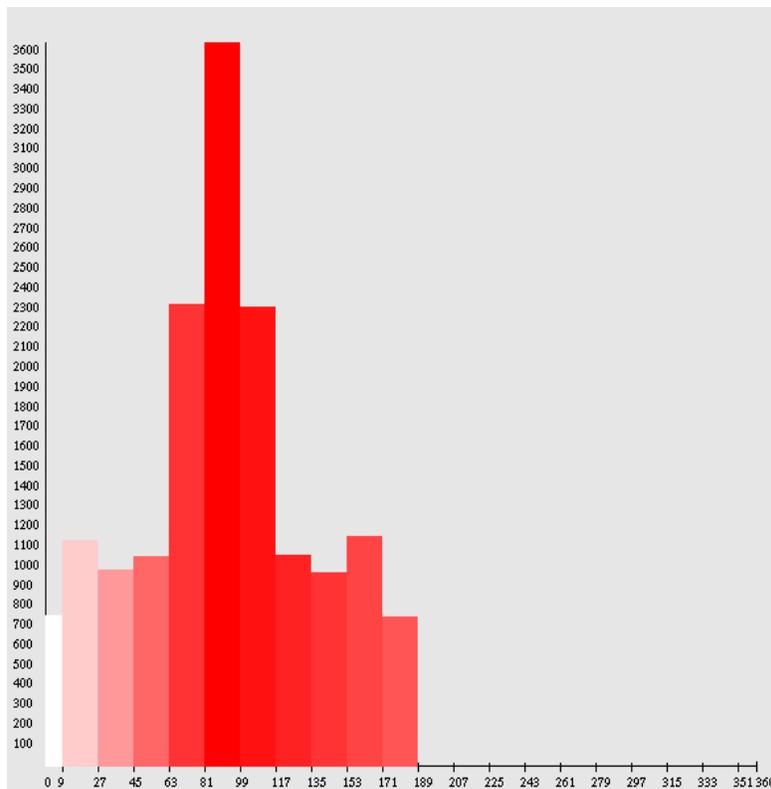


Gráfico 5.6: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.11. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

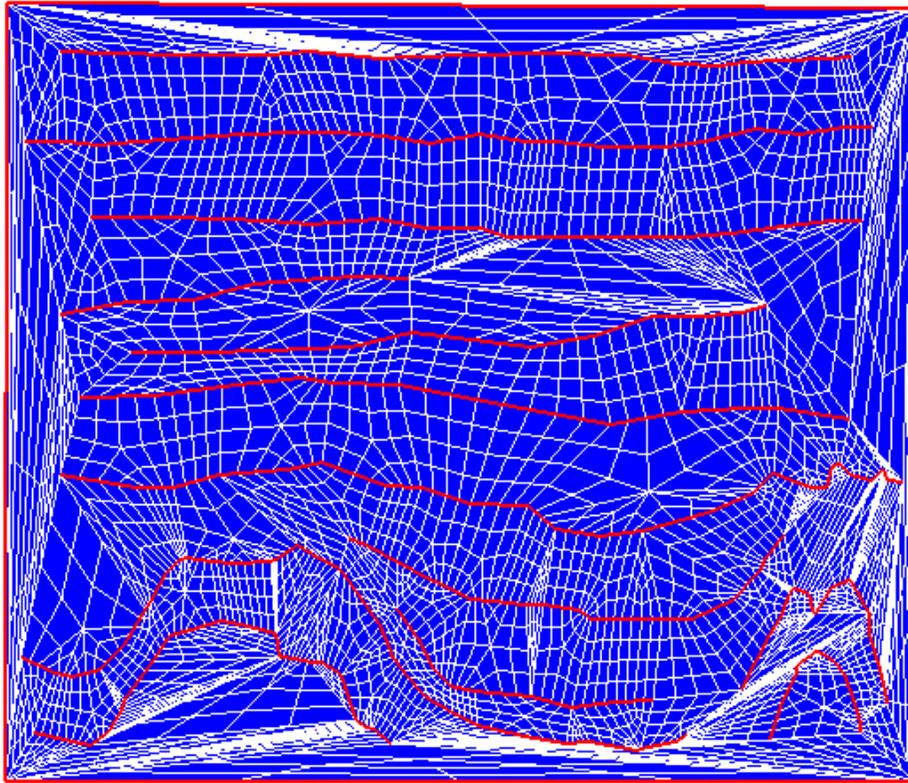


Figura 5.9: Exemplo de malha gerada pela técnica do ponto médio com duas iterações no domínio da Figura 5.8.

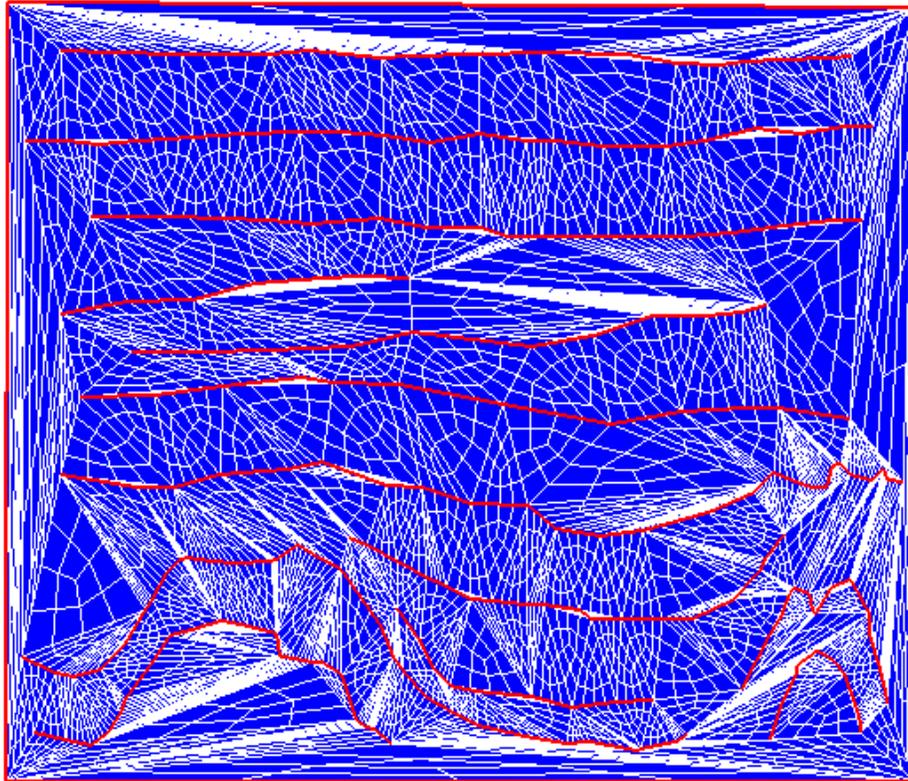


Figura 5.10: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método I com duas iterações no domínio da Figura 5.8.

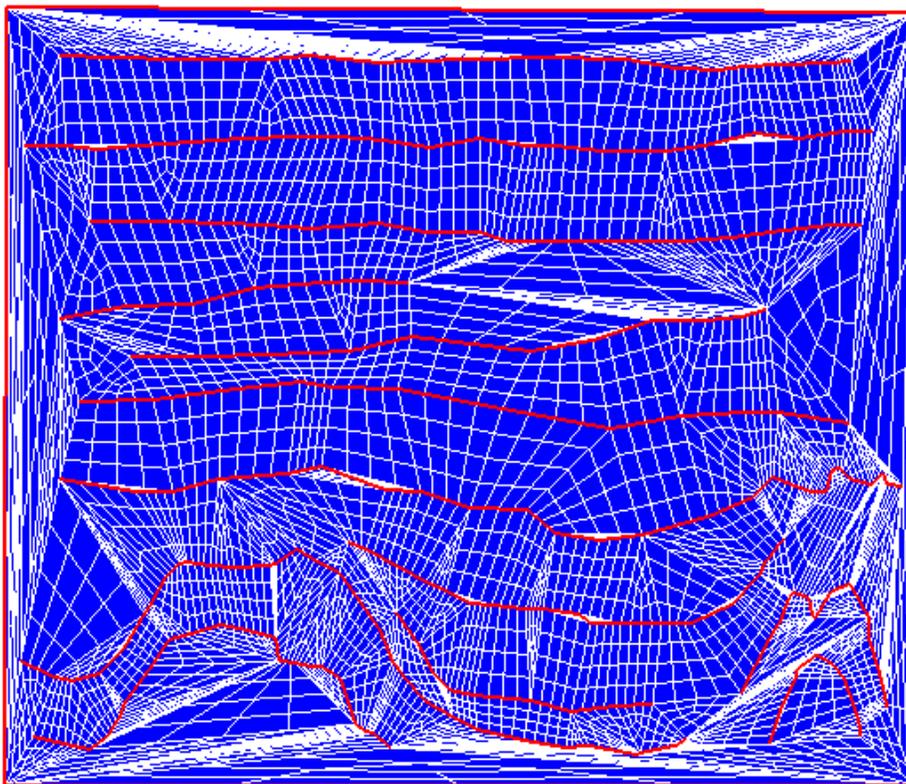


Figura 5.11: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método II com duas iterações no domínio da Figura 5.8.

### 5.3 Exemplo 3: Cadeira

Neste exemplo serão aplicadas as técnicas do ponto médio (pm), de triquad (tq) pelos métodos I (tq.I) e II (tq.II) e ortoquad (oq) que são as técnicas que, no momento, já são capazes de lidar com domínios que contêm buracos. A quadrilaterização incremental poderá ser aplicada para este caso como trabalho futuro.

#### 5.3.1 Descrição

Este domínio define um polígono com um buraco em seu interior. Este polígono é composto de trinta e um segmentos, dentre os quais quatro fazem parte do buraco. A Figura 5.12 exhibe o domínio utilizado para uma quadrilaterização convexa. A Figura 5.13 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica de ponto médio, enquanto que as Figuras 5.14, 5.15 e a 5.16 apresentam as malhas resultantes

depois de aplicadas as técnicas de triquad pelo método I, de triquad pelo método II e de ortoquad, respectivamente.

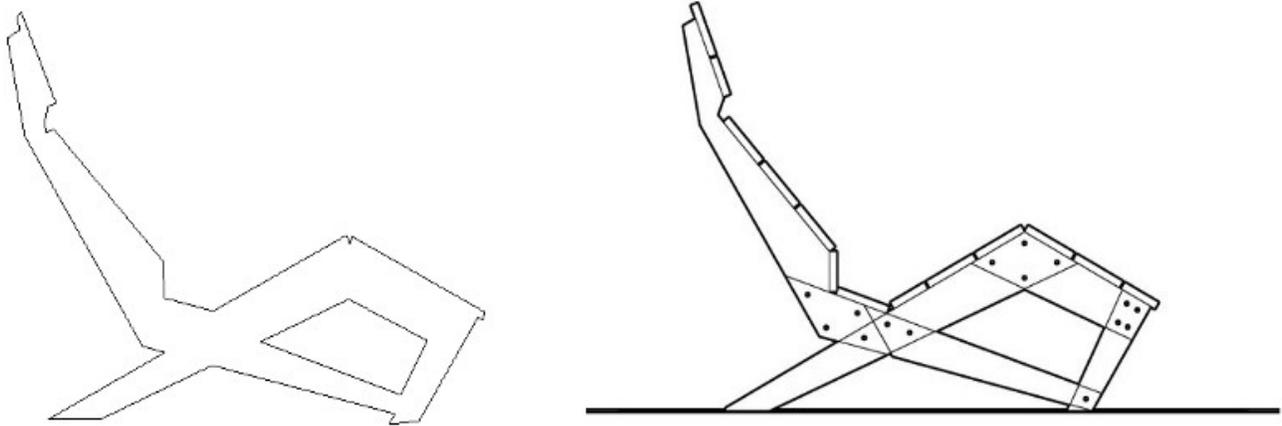


Figura 5.12: Domínio para ser quadrilateralizado convexamente. Desenho original à direita, simplificação à esquerda. O modelo original é de autoria de Dustin Wickham (86).

### 5.3.2 Motivação

Espera-se demonstrar a aplicabilidade das técnicas sobre polígonos quaisquer que possuam buracos, não importando sua quantidade ou tamanho. Este exemplo também tem como objetivo comparar as três técnicas que possuem a capacidade de lidar com buracos neste momento, e assim demonstrar as qualidades e defeitos de cada uma sobre este modelo.

### 5.3.3 Resultados

Observou-se que a técnica de ortoquad foi a que melhor se comportou entre todas as técnicas, pois exibe o melhor coeficiente topológico e geométrico, bem como a melhor distribuição de ângulos pela malha para uma quantidade reduzida de quadriláteros na malha. A técnica de ortoquad é superior neste caso, pois se utiliza indiretamente do eixo médio para guiar a construção de uma malha. Um caso particular acontece com a técnica do ponto médio: o índice topológico aumenta antes de diminuir.

Acredita-se que isto seja devido a um erro de aproximação entre dois ou mais baricentros que estariam muito próximos um do outro, resultando em uma contagem elevada, pois os dois seriam contados como um só vértice duas vezes. A Tabela 5.3 exibe os índices topológicos e geométricos para as malhas das Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16. Os Gráficos 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 exibem a frequência dos ângulos nestas malhas. Pode-se perceber pela Tabela 5.3, que conforme o refino da malha aumenta por sucessivas iterações das técnicas, o índice topológico melhora consideravelmente após poucas iterações, enquanto que o índice geométrico melhora muito pouco com exceção da técnica do ponto médio. A frequência dos ângulos indica que há uma concentração próxima a ângulos retos nos quadriláteros no intervalo de  $81^\circ$  e  $99^\circ$  para as técnicas oq, pm e tq.II, o que pode indicar bons elementos sendo formados principalmente nestas regiões de discretização equivalente. A técnica tq.I, que representa o método original de Mark De Berg (36), exibe como a distribuição dos ângulos, apesar de convexa, pode se encontrar distribuída de forma heterogênea entre os ângulos.

Técnica	Iterações	$i_g$	$i_t$	Quantidade de Elementos
pm	1	0.206461	0.532609	61
pm	2	0.241035	0.565359	244
pm	3	0.265424	0.382727	976
pm	4	0.279996	0.220857	3904
tq.I	1	0.143359	1.040323	93
tq.I	2	0.173488	0.582949	372
tq.I	3	0.194205	0.310794	1488
tq.I	4	0.206503	0.160806	5952
tq.II	1	0.174689	0.620000	69
tq.II	2	0.205824	0.550296	276
tq.II	3	0.226656	0.353420	1104
tq.II	4	0.239020	0.199400	4416
oq	1	0.302070	0.662252	108
oq	2	0.345458	0.525097	432
oq	3	0.376040	0.324211	1728
oq	4	0.394273	0.179713	6912

Tabela 5.3: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16.

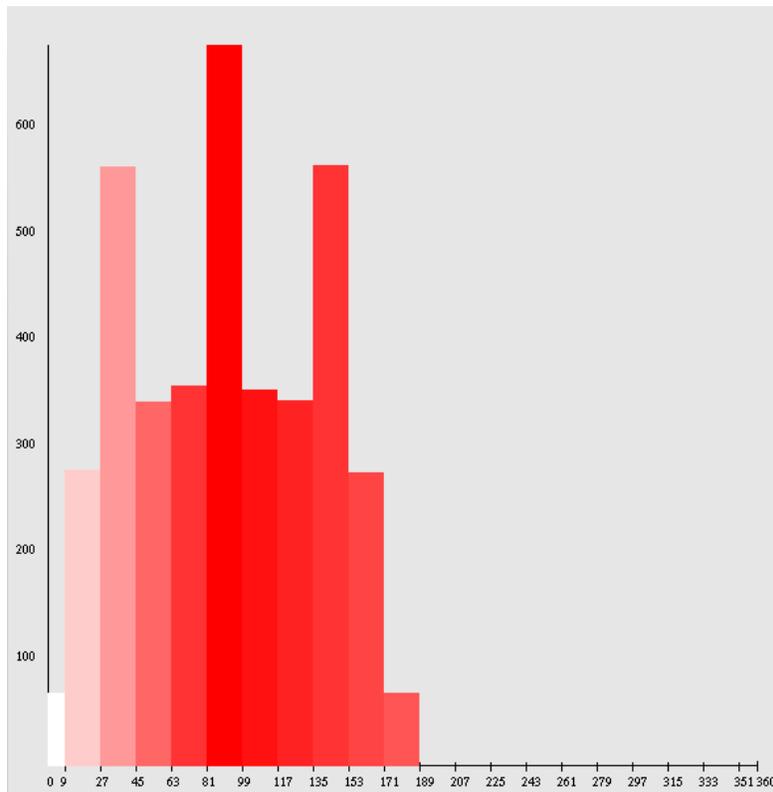


Gráfico 5.7: *Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.13. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.*

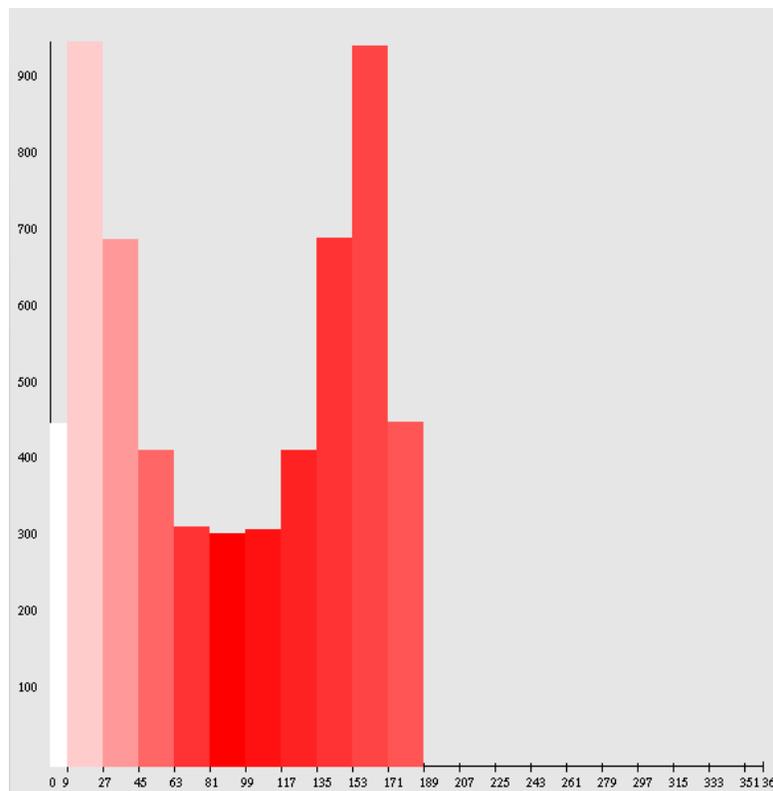


Gráfico 5.8: *Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.14. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.*

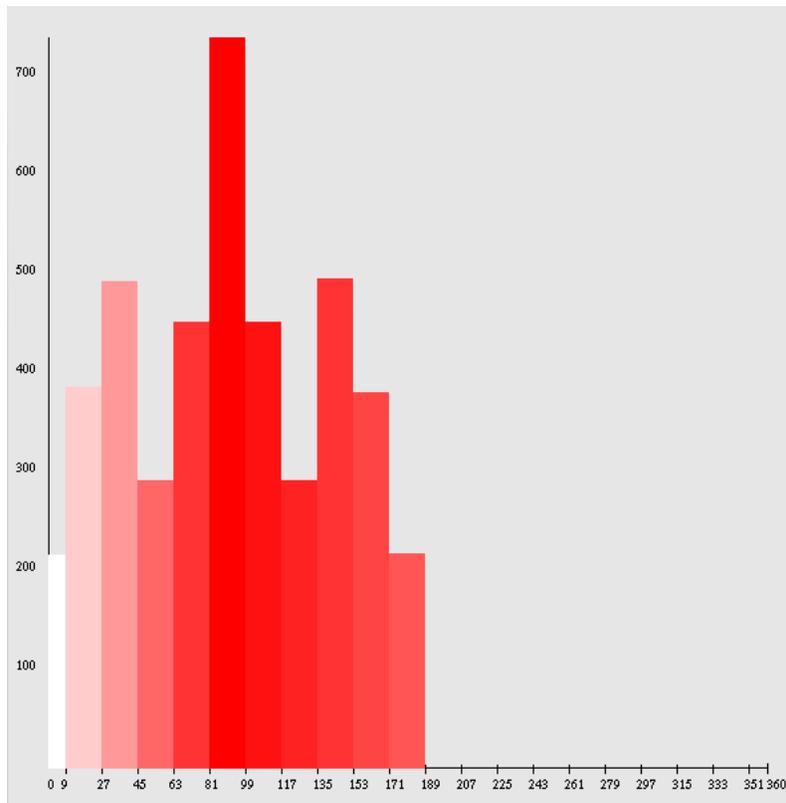


Gráfico 5.9: *Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.15. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.*

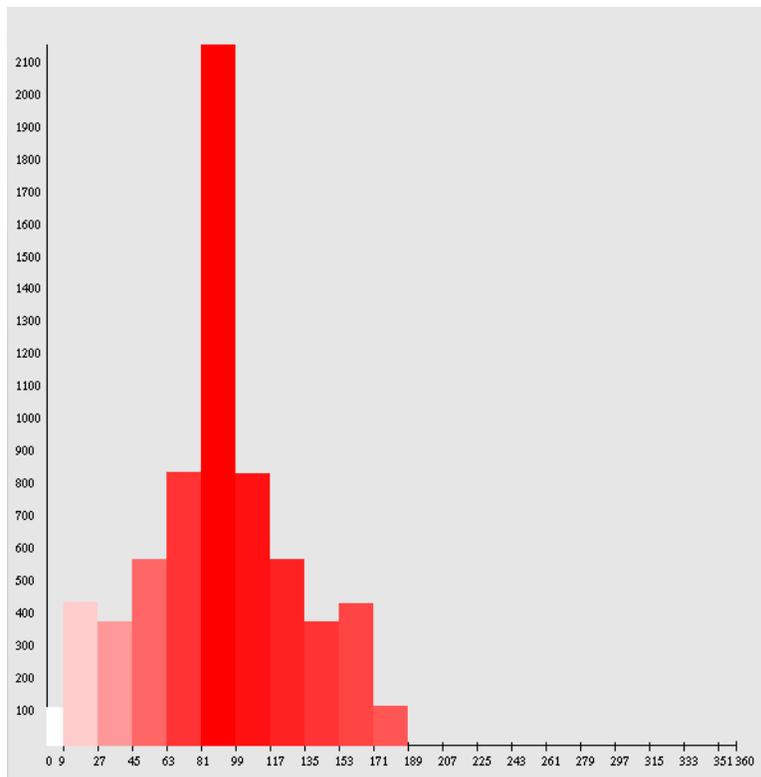


Gráfico 5.10: *Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.16. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.*

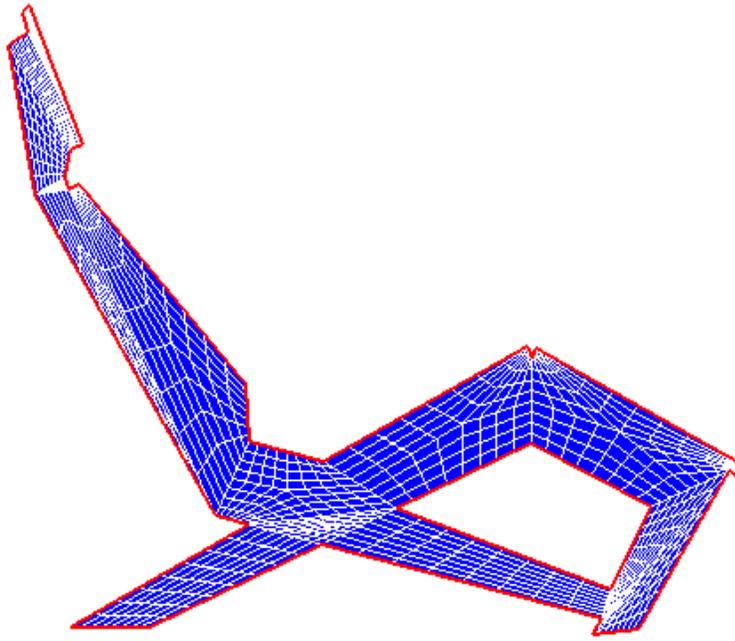


Figura 5.13: Exemplo de malha gerada pela técnica do ponto médio com três iterações no domínio da Figura 5.12.

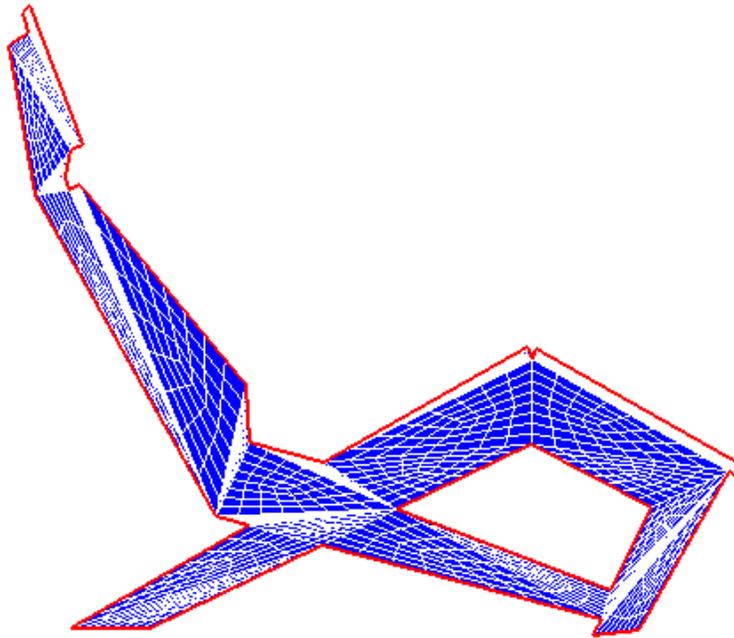


Figura 5.14: Exemplo de malha gerada pela técnica triquad método I com três iterações no domínio da Figura 5.12.

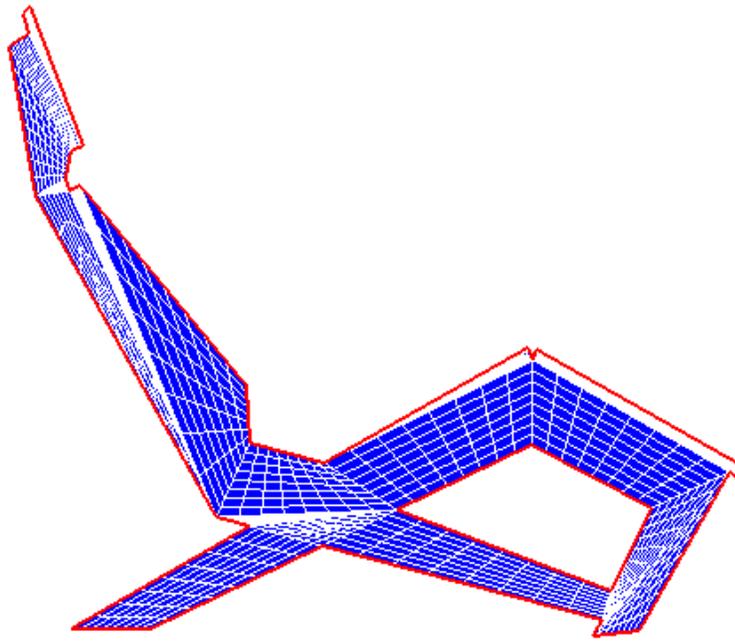


Figura 5.15: Exemplo de malha gerada pela técnica triquad método II com três iterações no domínio da Figura 5.12.

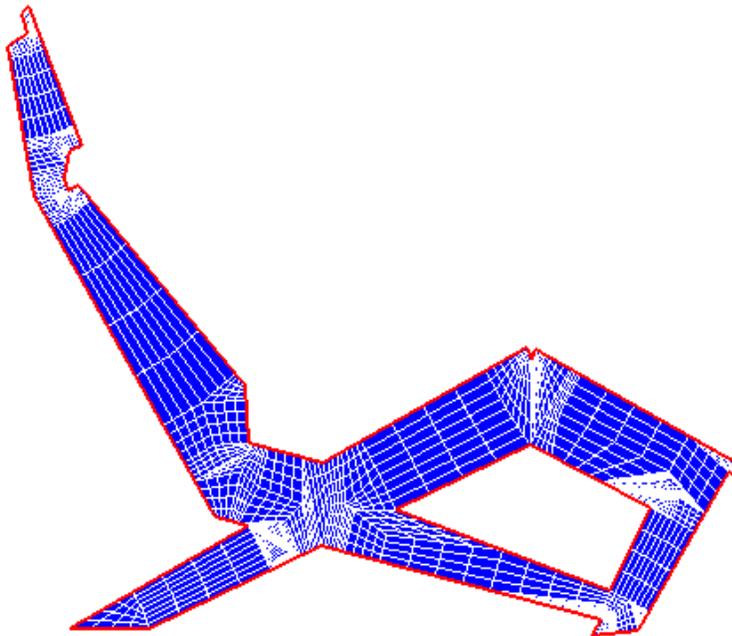


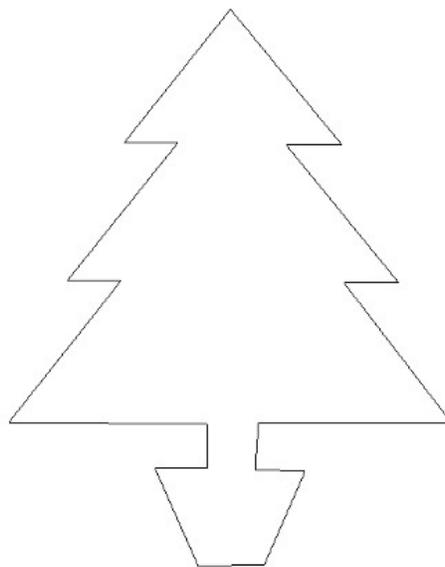
Figura 5.16: Exemplo de malha gerada pela técnica ortograd com três iterações no domínio da Figura 5.12.

## 5.4 Exemplo 4: Árvore de natal

Neste exemplo serão aplicadas as técnicas do ponto médio (pm), de triquad (tq) pelos métodos I (tq.I) e II (tq.II) , ortoquad (oq) e quadrilaterização incremental (qi) para domínios quaisquer sem restrições. Este exemplo pode conter qualquer ângulo situado no intervalo aberto de  $]0^\circ, 360^\circ[$ . Usa-se de uma geometria simétrica neste exemplo para testar como as técnicas se comportam neste domínio, mas é claro que a presença de simetria ou não, não afeta a capacidade de resolução das técnicas.

### 5.4.1 Descrição

Este domínio define um polígono simples com um eixo de simetria e várias pontas triangulares. A árvore possui dezenove segmentos e vértices. A Figura 5.17 exibe o domínio utilizado para uma quadrilaterização convexa. A Figura 5.18 apresenta a malha resultante depois de aplicada a técnica do ponto médio, enquanto que as figuras 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22 apresentam as malhas resultantes depois da aplicação das técnicas de triquad pelo método I, triquad pelo método II, ortoquad e quadrilaterização incremental, respectivamente.



*Figura 5.17: Domínio para ser quadrilaterizado convexamente.*

## 5.4.2 Motivação

Espera-se demonstrar a aplicabilidade das técnicas sobre polígonos quaisquer sem restrições. Este exemplo também tem como objetivo comparar as quatro técnicas, e assim demonstrar as qualidades e defeitos de cada uma sobre este modelo. Não há a necessidade de colocar mais exemplos para comparar a técnica de quadrilaterização incremental, pois esta técnica, no momento, não possui nenhum critério, além da convexidade, que a faria obter resultados melhores que as técnicas já apresentadas.

## 5.4.3 Resultados

Observou-se que a técnica de Mark De Berg (triquad pelo método I) foi a que melhor se comportou entre todas as técnicas, pois exhibe o melhor coeficiente topológico, e seu coeficiente geométrico está apenas à aproximadamente quatro centésimos do maior. O método de triquad possui a melhor distribuição de ângulos pela malha, mesmo que envolva uma quantidade maior de elementos. Isto demonstra que para determinados domínios, o melhor a ser feito é realizar uma triangulação anterior a uma quadrilaterização. Porém, depois de vários exemplos apresentados nesta dissertação, é possível perceber que este método não é ideal para qualquer situação, por três motivos: para cada triângulo ruim, serão gerados pelo menos três quadriláteros ruins; em todos os outros exemplos apresentados nesta dissertação, outras técnicas estão melhores qualificadas; e por fim, Lai (45) já provou que uma quadrilaterização direta possui vantagens geométricas sobre um método indireto. Em seguida, tem-se a técnica do ponto médio, que possui o melhor coeficiente geométrico e seu coeficiente topológico está à aproximadamente três centésimos do maior. Isto é de se esperar, ou seja que para domínios quaisquer ou a técnica do ponto médio, ou de ortoquad, se comportem melhor pois se guiam através de um elemento mediano do domínio. Os Gráficos 5.13 e 5.11 são similares, e isto acontece pois pode ser que várias regiões convexas obtidas pelo ponto médio sejam de fato quadrilaterais. A Tabela 5.4 exhibe os índices topológicos e geométricos para as malhas das Figuras 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22. Os Gráficos 5.11, 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15 exibem a frequência dos ângulos nestas malhas. A frequência dos ângulos para todas as malhas se concentram no intervalo de  $81^\circ$  e  $99^\circ$ , mas pode-se perceber que uma escala gradual a partir do intervalo ideal para os ângulos extremos, isto é, próximos de  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , é o que produz o melhor resultado para a técnica de triquad (tq.I).

Técnica	Iterações	$i_g$	$i_t$	Quantidade de Elementos
pm	1	0.432881	0.593220	39
pm	2	0.477649	0.569231	156
pm	3	0.508136	0.375178	624
pm	4	0.525269	0.214043	2496
tq.I	1	0.329998	0.971831	51
tq.I	2	0.401689	0.596708	204
tq.I	3	0.452293	0.332587	816
tq.I	4	0.481869	0.175885	3264
tq.II	1	0.394215	0.746032	43
tq.II	2	0.441039	0.582938	172
tq.II	3	0.473489	0.359477	688
tq.II	4	0.492238	0.199312	2752
oq	1	0.330233	0.622642	35
oq	2	0.384754	0.577143	140
oq	3	0.426558	0.376789	560
oq	4	0.451949	0.214135	2240
qi	1	0.300444	0.764706	23
qi	2	0.352261	0.584071	92
qi	3	0.393308	0.356968	368
qi	4	0.420047	0.197038	1472

Tabela 5.4: Índices topológicos e geométricos para as malhas nas Figuras 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22.

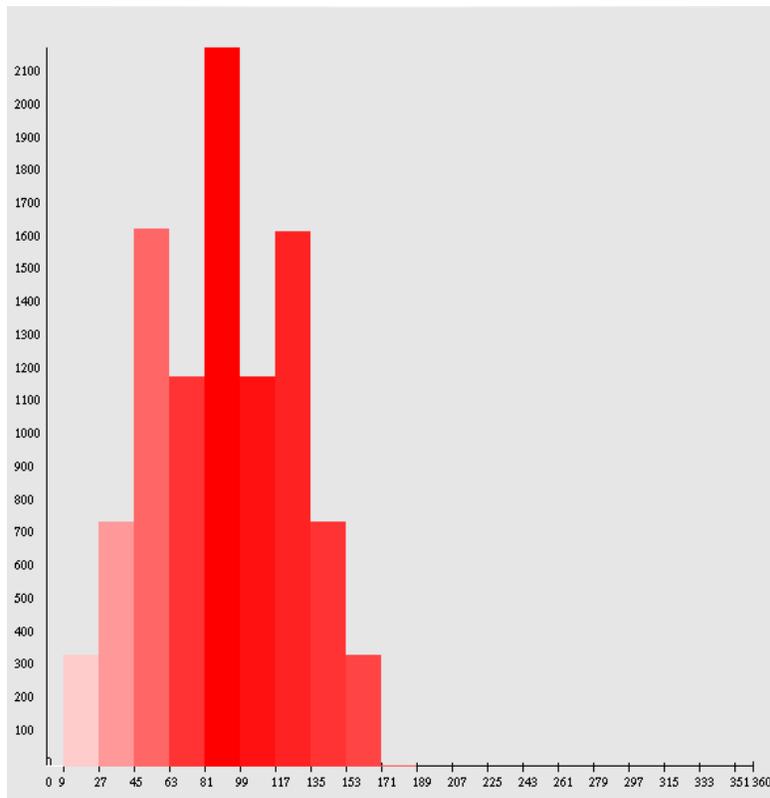


Gráfico 5.11: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.18. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

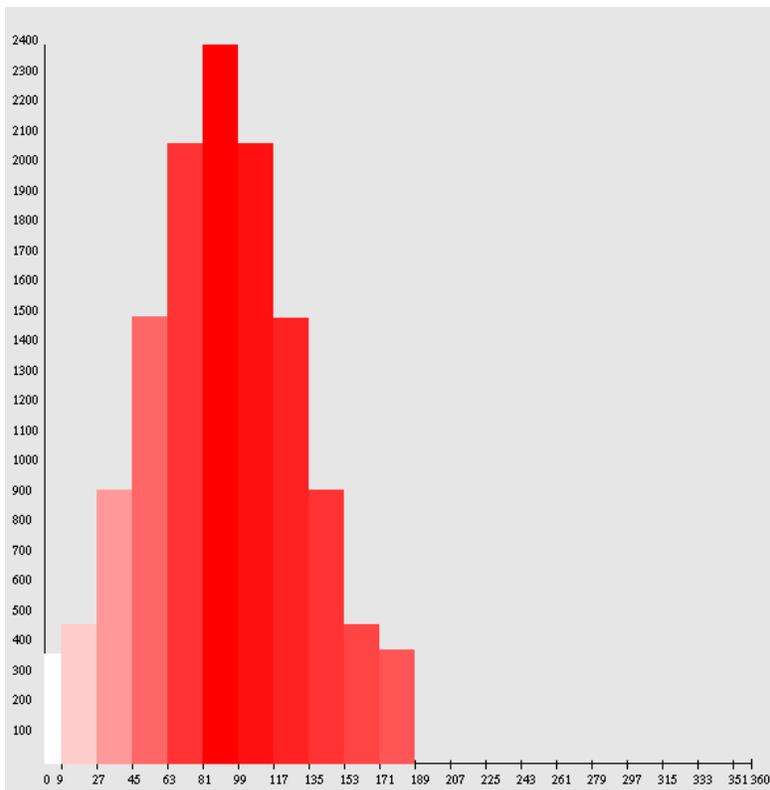


Gráfico 5.12: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.19. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

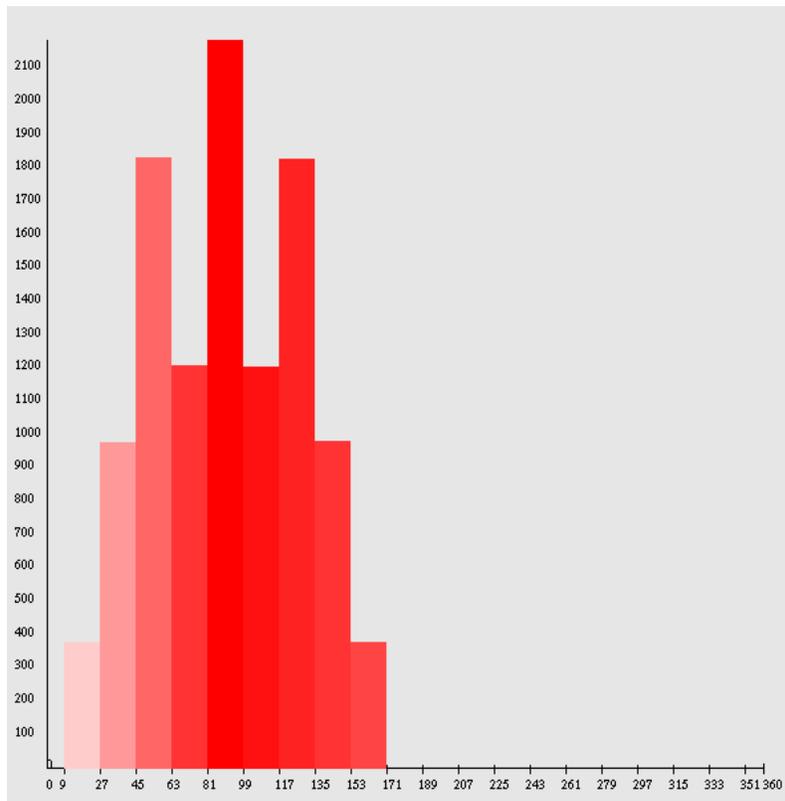


Gráfico 5.13: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.20. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

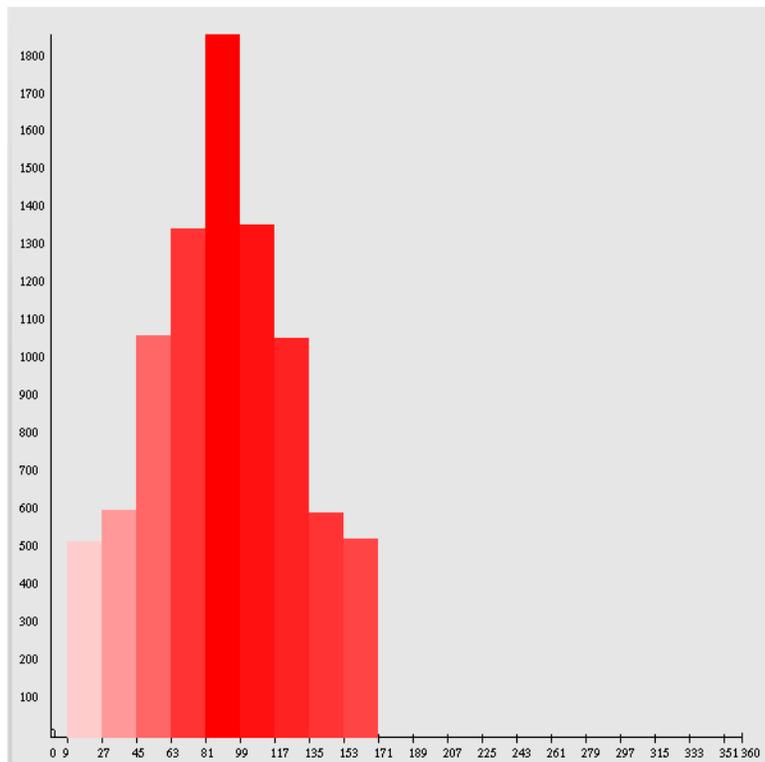


Gráfico 5.14: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.21. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

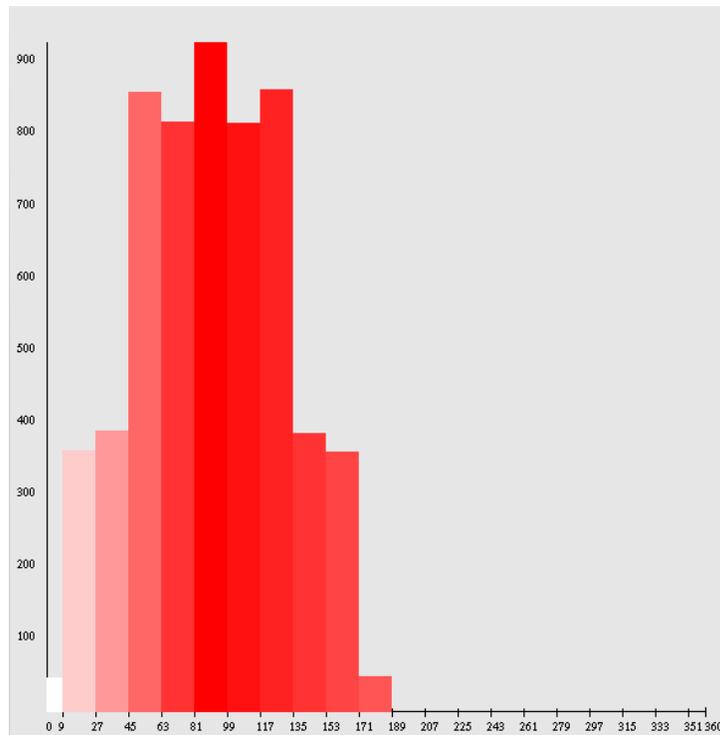


Gráfico 5.15: Frequência dos ângulos dos quadriláteros para a malha da Figura 5.22. Na vertical tem-se a frequência dos ângulos, e na horizontal os valores dos ângulos.

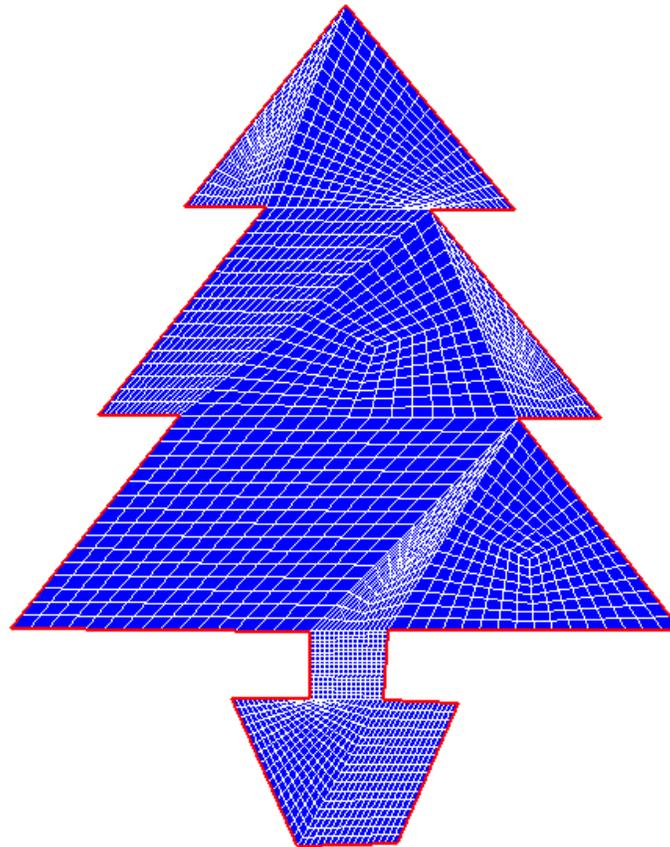


Figura 5.18: Exemplo de malha gerada pela técnica do ponto médio com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.

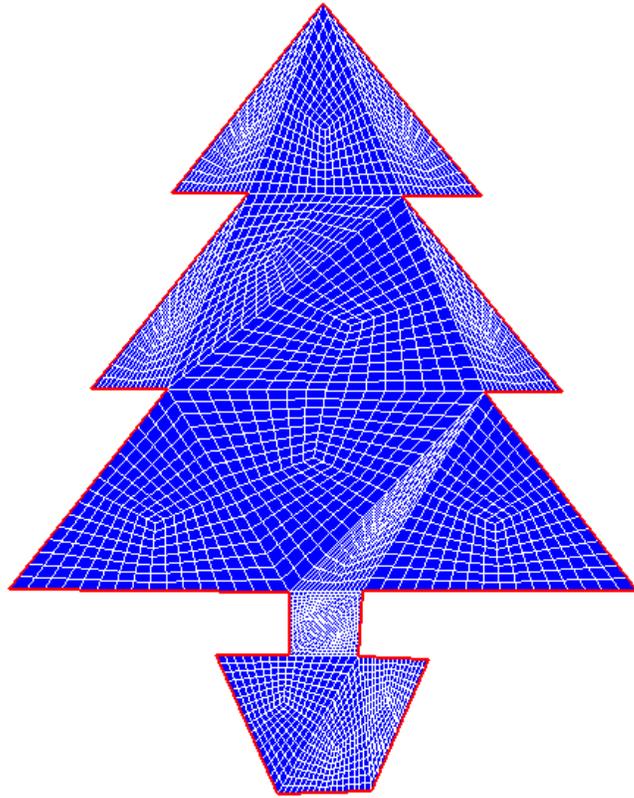


Figura 5.19: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método I com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.

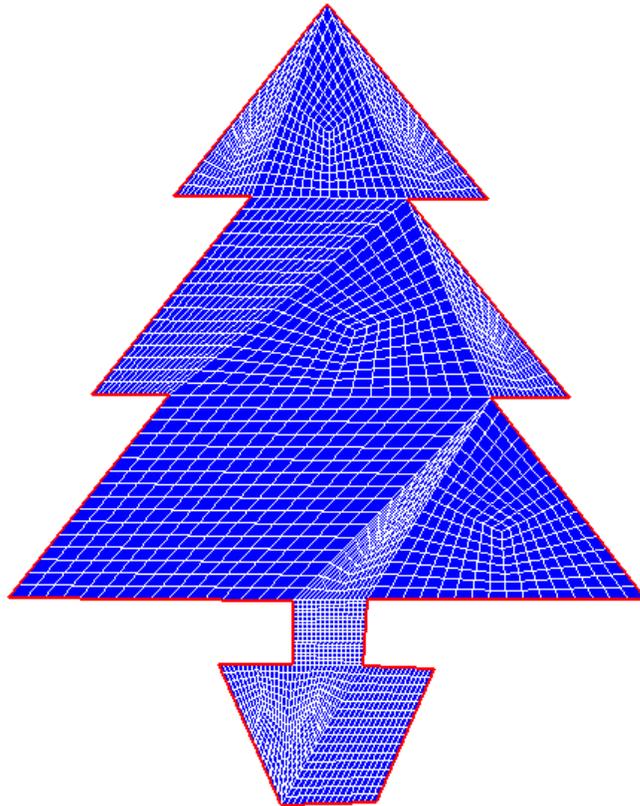


Figura 5.20: Exemplo de malha gerada pela técnica de triquad método II com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.

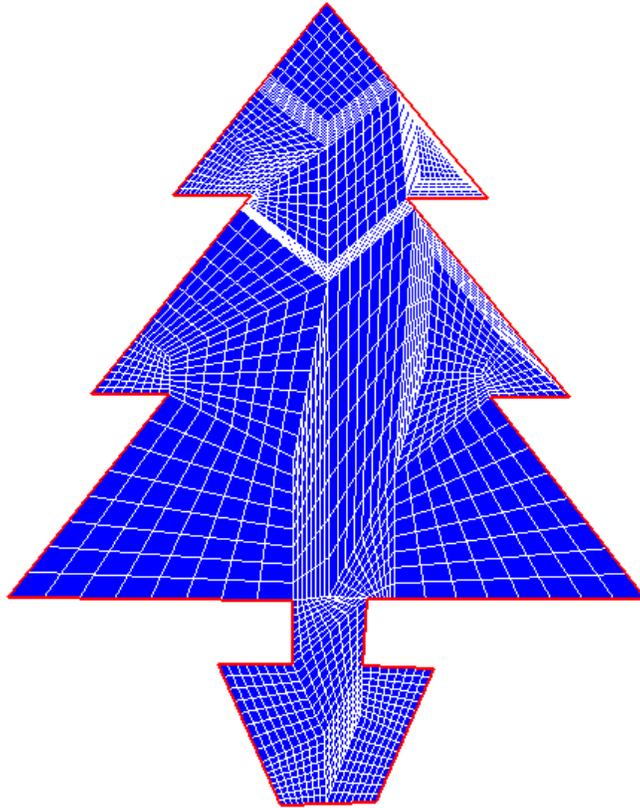


Figura 5.21: Exemplo de malha gerada pela técnica de ortoquad com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.

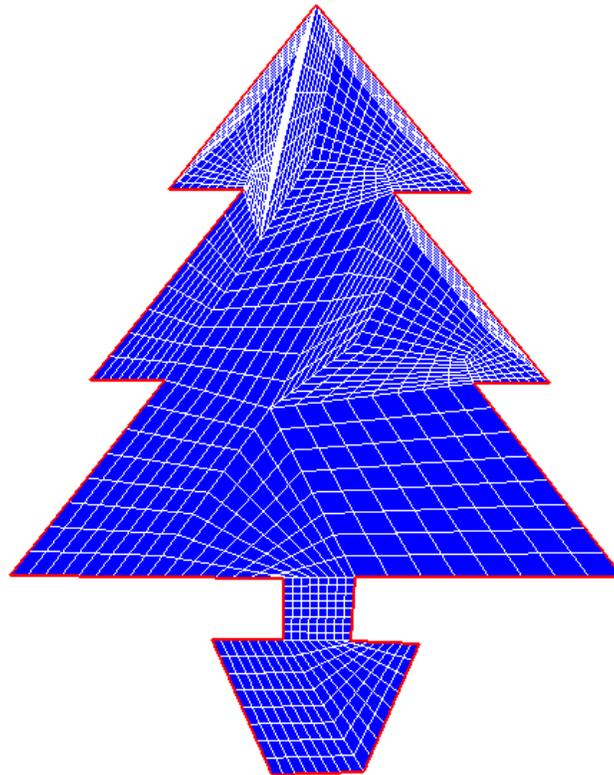


Figura 5.22: Exemplo de malha gerada pela técnica de quadrilateralização incremental com quatro iterações no domínio da Figura 5.17.

## 5.5 Considerações finais

As técnicas que possuem maior qualidade em geração de elementos são as técnicas do ponto médio e ortoquad, e isto pode ser afirmado, mesmo sem um critério de qualidade no momento de formação dos elementos, pois todos os critérios de qualidade utilizados nesta dissertação: o índice topológico, o índice geométrico e a frequência dos ângulos retos indicam uma proximidade da malha Cartesiana, que é a melhor que existe. Se for adotado portanto uma estratégia que siga os pontos fortes de cada técnica de forma a eliminar elementos ruins, a tendência é que se tenha várias técnicas excelentes de geração de malha quadrilateral convexa, isto é, as técnicas precisam ser aperfeiçoadas. Todas as técnicas geram elementos exclusivamente convexos, porém ainda falta um critério qualquer a ser determinado para cada técnica que aumente a qualidade dos elementos gerados e as aperfeiçoem. Este critério ainda não foi determinado no presente momento, já que que muito pouco se sabe sobre as propriedades estruturais de malhas quadrilaterais e algoritmos de quadrilaterização segundo Aurenhammer (8). Enquanto vários pesquisadores recorrem a heurísticas, que não garantem elementos convexos, ou malhas *quad-dominant*, que não garantem todos os elementos quadrilaterais, o estudo de malhas quadrilaterais exclusivamente convexas e de qualidade ainda precisa de inovações. Somente este estudo, no futuro, poderá esclarecer as propriedades de uma quadrilaterização convexa de qualidade, quando então será necessário adequar as técnicas aqui apresentadas a tais requisitos. No próximo e último capítulo serão discutidos as técnicas, e as melhorias futuras que poderão ser feitas para cada uma delas.

## 6. Conclusão

O objetivo desse trabalho foi apresentar contribuições à área de geração de malhas exclusivamente quadrilaterais, convexas e não estritas. Ao longo deste trabalho, foram apresentadas diversas propriedades destas malhas, além do início ao estudo de quadriláteros  $n$ -conexos que se acredita seja o caminho para a obtenção de uma quadrilaterização convexa de qualidade. Foram apresentadas quatro novas técnicas desenvolvidas que foram testadas, mas que ainda possuem melhorias a serem feitas. Nos parágrafos a seguir, são discutidas as técnicas de forma a apontar os seus pontos fortes e fracos. Esse capítulo também apresenta trabalhos futuros a serem realizados.

### 6.1 Ponto médio

A técnica do ponto médio divide um domínio qualquer com restrições em regiões convexas, e obtém uma quadrilaterização convexa pelo ponto médio de cada região ao final de sua execução. O ponto fraco desta técnica é que a divisão de um domínio qualquer com restrições em regiões convexas de qualidade não é um problema trivial e isso pode gerar regiões ruins e conseqüentemente malhas também muito ruins, a menos que essa divisão seja melhorada de alguma forma eficiente. Logo, é possível produzir quadriláteros finos e alongados no domínio. Estes quadriláteros convexas são resultantes de uma região convexa achatada ou fina, isto é, uma região ruim. Também é possível obter quadriláteros pequenos próximos de quadriláteros grandes, já que não se usa um critério para formação das regiões. É fácil perceber que o ponto médio é um vértice irregular, pois pode ser compartilhado por mais ou menos que quatro quadriláteros. Contudo, estes quadriláteros irregulares, que possuem o vértice irregular, podem ter seu efeito reduzido na malha ao aplicar a técnica do ponto médio por repetidas vezes, pois os quadriláteros convexas definem vértices regulares em seu ponto médio. O ponto forte desta técnica é que ela não depende da formação de ciclos pares ou ímpares e pode ser aplicada para qualquer domínio, desde que se permita inserir novos pontos em sua fronteira. Outro ponto forte é que como se trata de uma técnica simples pode ser combinada a outras técnicas de particionamento em regiões convexas ou de quadrilaterização existentes de modo a melhorar a qualidade da malha produzida.

## 6.2 Triquad

A técnica de triquad efetua uma triangulação anterior a quadrilaterização pelo uso do ponto médio. É possível observar que para determinados casos, uma triangulação pode ser vantajosa. Como a complexidade desta técnica reside na técnica de triangulação, pode-se determinar um limite inferior de  $\Omega(n \log n)$  para esta técnica, apesar do algoritmo de complexidade  $O(n^2)$  apresentado neste trabalho. Se a busca de eficiência é o foco para uma quadrilaterização convexa, para este momento da pesquisa, acredita-se que esta técnica seja o caminho. Contudo, a qualidade das malhas geradas pode ser inferior a outras técnicas como foi visto. Logo, tentar combinar triângulos aos pares antes de aplicar o ponto médio, já é em si o mínimo esperado para qualquer técnica que busque este caminho. Suas desvantagens estão diretamente ligadas às desvantagens de uma triangulação qualquer, como a geração de elementos finos e achatados que produzirá quadriláteros convexos ainda piores. E sua vantagem está principalmente na eficiência, e no amplo uso de técnicas de triangulação existentes que podem ser usadas como sujeito de teste para uma quadrilaterização convexa, como a triangulação Delaunay.

## 6.3 Ortoquad

Esta técnica insere círculos máximos no domínio através de um método iterativo antes de efetuar uma quadrilaterização convexa por meio de diagonais pares e ímpares. Este caminho parece ser uma das melhores oportunidades para o desenvolvimento de uma técnica de quadrilaterização convexa de qualidade. Ajustar o posicionamento dos círculos, e ajustar a discretização das bordas pode gerar quadriláteros convexos muito bons como foi visto. Contudo, ainda existe o problema de gerar regiões muito finas, devido a círculos muito próximos um dos outros, e de se determinar quais são os *branch points* do eixo médio. Estes *branch points* são pontos em que o eixo médio se subdivide para duas ou mais regiões de uma figura. Acredita-se que neste local é necessária a existência de um elemento irregular para cada região para gerar uma malha convexa de qualidade. Tentar aplicar as técnicas de *bubble mesh* ou *circle-packing* para esta técnica parece ser o caminho natural que poderá realmente demonstrar sua eficiência ou não para uma quadrilaterização convexa. Esta técnica também pode ser combinada com outros métodos de quadrilaterização para se verificar se é possível aumentar a qualidade dos elementos gerados. Sua complexidade no momento está estimada em  $O(n^2)$ .

## 6.4 Quadrilaterização Incremental

Esta última técnica insere quadriláteros  $n$ -conexos convexos em um domínio. Apesar de no momento isto estar sendo feito por meio de decomposição em regiões, também é possível adaptá-lo para um algoritmo de avanço de fronteira ou qualquer outra técnica de quadrilaterização. A pesquisa de uma quadrilaterização deste tipo poderá revelar as propriedades de uma técnica de quadrilaterização convexa de qualidade. Este algoritmo trata da essência de uma quadrilaterização convexa, e busca entender o que é necessário para que ela ocorra. Tentar inserir quadriláteros convexos  $n$ -conexos por meio de deltóides (*kites*) e losangos (*rhombus*) é o caminho natural para esta técnica, além de tentar inserir quadriláteros de ordem inferior que não foram abordados nesta dissertação: como os 2- -conexos ou 1-conexo. Esta técnica será desenvolvida e aperfeiçoada no futuro, e acredita-se que através dela será possível tratar o caso da hexaedralização para o espaço tridimensional.

## 6.5 Trabalhos Futuros

Como foi visto a inserção de novos pontos em um domínio pode ser essencial para uma quadrilaterização convexa. Por esta razão, um dos trabalhos futuros é, antes de realizar a quadrilaterização convexa por meio de uma das quatro técnicas, utilizar-se de técnicas para a inserção de novos pontos no domínio: o *circle-packing*, também chamado de teorema de Koebe-Andreev-Thurston (11), que consiste na inserção de círculos internos à geometria e nas fronteiras de forma a preencher o domínio; e o *growing neural gas*, desenvolvido em 1991 por Martinez (58) e aperfeiçoado por Fritzke (38) e Holmstrom (42). Nesta última técnica, pontos são adicionados incrementalmente com base em uma função de probabilidade responsável por gerar sinais. Tais sinais servem de guia para a construção de um esqueleto topológico baseado no domínio. Entretanto, outras técnicas de inserção de pontos de Steiner podem ser usadas para esse fim. Outro caminho natural, neste momento, é tentar expandir estas técnicas para o caso tridimensional. Além disso, existem algumas melhorias que podem ser feitas nas quatro técnicas aqui apresentadas:

- ⤴ Ponto médio: Escolha de diagonais horizontais e verticais como prioridade antes de dividir pela bissetriz de forma a buscar o eixo de simetria das figuras. Tentar usar um critério nos ângulos formados de forma a evitar elementos achatados e finos. Testar com outros algoritmos de particionamento de regiões convexas.
- ⤴ Triquad: Testar com outros algoritmos de triangularização, como triangularização Delaunay. Tentar aplicar a inversão de diagonais com quadriláteros vizinhos para tentar produzir quadriláteros convexos de qualidade superior.
- ⤴ Ortoquad: Aplicar a técnica de *bubble mesh*, criando forças de interação entre círculos vizinhos de forma a distribuí-los igualmente pelo domínio. Usar o baricentro das regiões como centro dos círculos produzidos. Combinar esta técnica com outras técnicas de quadrilaterização convexa.
- ⤴ Quadrilaterização Incremental: Tentar inserir quadriláteros convexos  $n$ -conexos de qualidade diretamente no domínio, como *kites* e *rhombus*. Observar limitações deste algoritmo. Combinar com outros algoritmos de quadrilaterização convexa, como o *onion peeling* de Prosenjit de forma a observar seus efeitos.

## Bibliografia

1. AICHHOLZER, O.; AURENHAMMER, F.; ALBERTS, D.; GARTNER, B. *A Novel Type of Skeleton for Polygons*. Journal of Universal Computer Science, vol. 1, n° 12, pags. 752-761. 1995.
2. ALVAREZ, Victor. *Bichromatic Quadrangulations with Steiner Points*. Journal Graphs and Combinatorics archive Volume 23 Issue 1. 2007.
3. ASANO, T. *Minimum Partition of Polygonal Regions Into Trapezoids*. Proc. 24<sup>th</sup> Annual IEEE Symp on Foundations on Computer Science, pags. 233-241. 1983.
4. ASANO, T.; IMAI, H. *Partitioning a polygonal region into trapezoids*. Journal of the ACM, 33, 2, pags. 290-312. 1986.
5. A. HEIGHWAY, E. *A Mesh Generator For Automatically Subdividing Irregular Polygons Into Quadrilaterals*. IEEE Transactions On Magnetics, vol. 19, n° 6, pags. 2535-2538. 1983.
6. A. S. LIZIER, Mario; F. SIQUEIRA, Marcelo; DANIELS, Joel; T. SILVA, Claudio. *Template-based Remeshing for Image Decomposition*. SIBGRAPI. 2010.
7. ATALAY, F.; RAMASWAMI, S. *Quadrilateral meshes with bounded minimum angle*. In 17<sup>th</sup> Int. Meshing Roundtable, pags. 73–91. 2008.
8. AURENHAMMER, F.; DEMUTH, M.; SCHFFER, T. *Computing convex quadrangulations*. In Proc. 5<sup>th</sup> Ann. Int. Symp. Voronoi Diagrams in Science and Engineering, Voronoi's Impact on Modern Science, volume4, page 32-43. 2008.
9. BABUSKA, Ivo; K. AZIZ, A. *On the Angle Condition in the Finite Element Method*. SIAM Journal on Numerical Analysis 13(2): pags. 214–226. 1976.
10. BERN, Marshall. *Linear-size Nonobtuse Triangulation of Polygons*. Proceedings 10<sup>th</sup> Annual Symposium Computational Geometry. 1994.
11. \_\_\_\_\_. *Quadrilateral Meshing by Circle Packing*. International Journal of Computational Geometry and Applications. 1997.
12. B. HALES, Hugh. *A Method for Creating 2-D Orthogonal Grids Which Conform to Irregular Shapes*. SPE Journal June 1996, pags 115-124. 1996.

13. BISHOP, C. J. *Quadrilateral meshes with no small angles*. Manuscript, 1991.
14. BISHOP, Christopher J. *Optimal Angle Bounds for Quadrilateral Meshes*, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 44, issue 2, pags; 308-329. 2010.
15. BLACKER, T. D.; M. B. Stephenson. *Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (4), pags 811–847. 1991.
16. BLUMM, Harry. *A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape*. *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pags 362 à 380. 1967.
17. BOMMES, David; ZIMMER, Henrik; KOBBELT, Leif. *Mixed-Integer Quadrangulation*. *Proceedings of the 2009 SIGGRAPH Conference*. 2009.
18. BOMMES, David; VOSSEMER, Tobias; KOBBELT, Leif. *Quadrangular Parameterization for Reverse Engineering*. *Lecture Notes in Computer Science*. 2009.
19. BOROUCAKI, Houman; J. FREY, Pascal. *Adaptive Triangular-Quadrilateral Mesh Generation*. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, vol. 41, pags. 915 – 934 . 1998.
20. BOSE, Prosenjit; TOUSSAINT, Godfried. *No Quadrangulation is Extremely Odd*. *Proc. Of the International Symposium on Algorithms and Computation*. 1995.
21. BOSE, P; TOUSSAINT, G. *Characterizing and efficiently computing quadrangulations of planar point sets*. *Computer Aided Geometric Design*, vol. 14, pags. 763-785. 1997.
22. BOSE, P.; RAMASWAMI, S.; TOUSSAINT, G.; TURKI, A. *Experimental results on quadrangulations of sets of fixed points*. *Computer-Aided Geometric Design* 19, pags. 533-552. 2002.
23. BREMNER, David; HURTADO, Ferrán; RAMASWAMI, Suneeta; SACRISTAN, Vera. *Small Convex Quadrangulations of Point Sets*, *Proceedings of the 12th International Symposium on Algorithms and Computation*, pags. 623-635, December 19-21. 2001.
24. BREMNER, David; HURTADO, Ferran; RAMASWAMI, Suneeta. *Upper and Lower Bounds for Strictly Convex Quadrilateral Meshes of Point Sets*. <http://en.scientificcommons.org/42650018>. 2007.
25. CASS, R. J.; BENZLEY, S.; MEYERS, R. J.; BLACKER, T. D. *Generalized 3-D paving: An*

- automated quadrilateral surface mesh generation algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (9), pags 1475–1490. 1996.
26. CHAIKEN, Seth. J. KLEITMAN, Daniel; SAKS, Michael; SHEARER, James. *Covering Regions by Rectangles*. *Siam J. Alg. Disc. Meth.*, Vol. 2, No. 4. 1981.
  27. CHVÁTAL, V. *A combinatorial theorem in plane geometry*, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 18: 39–41. 1975.
  28. CORRÊA, LUCAS PIVA ROCHA. Teorema da galeria de arte e triangularização de polígonos. Monografia USP. 2009.
  29. CORTES, Carmen. *Quadrangulations And 2-Colorations*. EWCG. 2005.
  30. DONG, Shen; BREMER, Peer-Timo; GARLAND, M.; PASCUCCI, V.; C. HART, J. *Quadrangulating a mesh using Laplacian eigenvectors*. Technical Report UIUCDCS-R-2005-2583. 2005.
  31. DONG, Shen; BREMER, Peer-Timo; GARLAND, Michael; PASCUCCI, Valerio ; C. HART, John. *Spectral surface quadrangulation*. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 25, nº 3. 2006.
  32. DONG, S.; KIRCHER, S.; GARLAND, M. *Harmonic functions for quadrilateral remeshing of arbitrary manifolds*. *Comput. Aided Geom. Des.*, pags. 392-423, vol. 22, issue 5. 2005.
  33. EGIDI, N; MAPONI, P. The heat equation to generate planar grids. *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 210, issues 1-2. 2007.
  34. E. CATMULL; J. CLARK. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Comput. Aided Design*, 10:350–365, 1978.
  35. E. LORENSEN, William; E. CLINE, Harvey. *Marching Cubes: A High Resolution*. *Computer Graphics*, Volume 21, Number4, July. 1987.
  36. EVERETT, H.; LENHART, W.; OVERMARS, M.; SHERMER, T.; URRUTIA, J. *Strictly convex quadrilaterizations of polygons*. *Proceedings of The Fourth Canadian Conference on Computational Geometry*, pags. 77-82. 1992.
  37. FEVENS, T.; MEIJER, H.; RAPPAPORT, D. *Minimum weight convex quadrangulation of a constrained point set*. In *Abstracts from 2th Annual CGC Workshop on Computational Geometry*. 1997.

38. FRITZKE , Bernd. *A Growing Neural Gas Network Learn Topologies*. Advances in Neural Information Processing Systems 7, MIT Press, Cambridge MA. 1995.
39. HEREDIA, M.; URRUTIA, J. *On convex quadrangulations of point sets on the plane*. Proc. China-Japan Joint Conference on Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory. 2005.
40. H. GOLDTHORPE, V.; Y. CHOV, S. *Unconventional Modelling of Faulted Reservoirs: A Case Study*. 8<sup>th</sup> SPS Symp. on Res. Sire. 1985.
41. H. MEISTERS, G. *Polygons Have Ears*. The American Mathematical Monthly, vol. 82, No. 6, pags. 648-651. 1975.
42. HOLMSTROM, Jim. *Growing Neural Gas: Experiments with GNG, GNG with utility and Supervised GNG*. Master's Thesis. 2002.
43. ITOH, T.; SHIMADA, K.; INOUE, K.; YAMADA, A.; FURUHATA, T. *Automatic conversion of 2D triangular mesh into quadrilateral mesh with directionality control*. 7<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 1998.
44. J. LAI, M. *Scattered data interpolation and approximation by using bivariate  $C^1$  piecewise cubic polynomials*. Comput. Aided Geom. Design, 13, pags. 81-88. 1996.
45. J. LAI, M.; L. SCHUMAKER, L. *Scattered data interpolation using  $C^2$  piecewise polynomials of degree 6*, SIAM J. Num. Anal., 34, pags. 905-921. 1997.
46. JOE, Barry. *Quadrilateral mesh generation in polygonal regions*. Computer-Aided Design, Vol. 27, No. 3, pags. 209-222. 1995.
47. J. OWEN, S.; A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology. In Proceedings of the 7th International Meshing Roundtable, pags. 239-267. 1998
48. J. OWEN, S.; L. STATEN, M.; A. CANANN, S.; SAIGAL, S. *Q-Morph: An indirect approach to advancing front quad meshing*. Intl. J. Num. Methods in Engineering 9, 1317–1340. 1999.
49. KAHN, J.; KLAWE, M.; KLEITMAN, D. *Traditional Galleries Require Fewer Watchmen*. SIAM Journal Alg. Disc. Math. Vol 4, pags 194-206, 1983.
50. K. LAI , Y.; KOBBELT, L.; HU , Shi-Min. *An incremental approach to feature aligned quad dominant remeshing*. In SPM '08: Proceedings of the 2008 ACM symposium on Solid and physical modeling, 137–145. 2008.
51. LEE, K.; IN-IL, KIM; D., CHO; T., KIM. *An algorithm of automatic 2D quadrilateral mesh*

- generation with line constraints*. Comput Aided Des, vol 35, pags. 1055-1068. 2003.
52. LIANG, Xinghua; S. EBEIDA, Mohamed; ZHANG, Yongjie. *Guaranteed-Quality All-Quadrilateral Mesh Generation with Feature Preservation Proceedings*. 18th International Meshing Roundtable, pags.45-63. 2009.
  53. LI, Xiang-yang. *Biting: Advancing Front Meets Sphere Packing*. 2<sup>nd</sup> Symposium Trends Unstructured Mesh Generation. 1999.
  54. LUBIW, A. Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals. In Proc. Of the 1<sup>st</sup> ACM Symposium on Computational Geometry, pags 97-106. 1985.
  55. MAHARAVO, Randrianarivony. *Geometric Processing of CAD Data and Meshes as Input of Integral Equation Solvers*. Phd's Thesis. 2006.
  56. MAHARAVO, Randrianarivony. *Quadrilateral Decomposition By Two-Ear Property Resulting in CAD Segmentation*. Word Academy Of Science, Engineering and Technology 44. 2008.
  57. MARINOV, M.; KOBELT, L. *Direct anisotropic quad-dominant remeshing*. In Proc. Pacific Graphics. 2004.
  58. MARTINETZ, T. M.; SCHULTEN, K. J. A “neural-gas” network learns topologies. In KOHONEN, T.; MÄKISARA, K.; SIMULA, O.; KANGAS, J., editors, Artificial Neural Networks, North-Holland, Amsterdam, pags. 397-402. 1991.
  59. MOURA, Francisco. *Fast Medial Axis Transform for Planar Domains With General Boundaries*. XXII SIBGRAPI. 2009.
  60. MULLER-HANNEMANN, M. *High quality quadrilateral surface meshing without template restrictions: a new approach based on network flow techniques*. In Proc. 6th Int. Meshing Roundtable, pags. 293–307. 1997.
  61. MULLER-HANNEMANN, M.; WEIHE, K. *Minimum strictly convex quadrangulations of convex polygons*. Proc. 13th Symp. Computational Geometry, pp. 183–202. ACM, June 1997. 1997.
  62. M. ZHOU, J. *A New Approach To Automatic Quadrilateral Mesh Generation*. IEEE Transactions On Magnetics, vol. 29, n° 2, pags. 1910-1913. 1993.
  63. NOWOTTNY, D. *Quadrilateral mesh generation via geometrically optimized domain decomposition*. Proceedings of the Sixth International Mesh Round Table. 1997.

64. O'ROURKE, J.; SUPOWIT, K. *Some NP-hard polygon decomposition problems*. Information Theory, IEEE Transactions on Mar 1983, vol. 29-2, pags 181-190. 1983.
65. O'ROURKE, J.; TEWARI, G. *Partitioning orthogonal polygons into fat rectangles in polynomial time*. In In Proc. 13th Canadian Conference on Computational Geometry, pages 97–100. 2001.
66. O'ROURKE, J.; PASHCHENKO, I.; TEWARI, G. *Partitioning orthogonal polygons into fat rectangles*. In Proc. 13th Canad. Conf. Comput. Geom., pags. 133–136. 2001.
67. RAMASWAMI, Suneeta. *Converting triangulations to quadrangulations*. Computational Geometry 9, pags 257-276. 1998.
68. RAMASWAMI, S; SIQUEIRA, M.; SUNDARAM, T.; GALLIER, J.; GEE, J. *A new algorithm for generating quadrilateral meshes and its application to FE-based image registration*. Proc. 12th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 159–170. 2003.
69. RAMASWAMI, S; SIQUEIRA, M.; SUNDARAM, T.; GALLIER, J.; GEE, J. *Constrained quadrilateral meshes of bounded size*. Intern. Journal of Comput. Geometry & Applications, vol. 15, no. 1, pp. 55–98, 2005.
70. ROCA, Xevi. *Paving: The Path Towards Automatic Hexaedral Mesh Generation*. Doctoral Thesis. 2009.
71. R. QUADROS, W. *LayTracks: A New Approach To Automated Geometry Adaptive Quadrilateral Mesh Generation Using Medial Axis Transform*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, pags 209-237. 2004.
72. R. WHITE, David; KINNEY, Paul. *Redesign Of Paving Algorithm: Robustness Enhancements through Element by Element Remeshing*. 6<sup>th</sup> International Meshing Roundtable. 1997.
73. SAMET, H. *The quadtree and related hierarchical data structure*. ACM Comp. Surv. 16-2, pags. 187-260. 1984.
74. SARRATE, Josep; HUERTA, Antonio. *Efficient unstructured quadrilateral mesh generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering vol.49, pags. 1327-1350. 2000.
75. SCHALL, Oliver; ZAYER, Rhaled; SEIDEL, Hans-Peter. *Controlled field generation for quad-remeshing*. Proceedings of the 2008 ACM symposium on Solid and physical modeling.

2008.

76. SHIMADA, K. *Bubble Mesh: Automated Triangular Meshing of Non-Manifold Geometry by Sphere Packing*. Proceedings 3<sup>rd</sup> ACM Symposium Solid Modeling & Applications, pags 409-419. 1995.
77. SHIMADA, K.; LIAO , J. *Quadrilateral Meshing with Directionality Control through the Packing of Square Cells*. In 7th Intl. Meshing Roundtable, pags 61–76. 1998.
78. S. LAU, T.; H. LO, S.; K. LEE, C. *Generation of Quadrilateral Mesh over Analytical Curved Surfaces*. Finite Elements in Analysis and Design, vol 27, pags. 251-272. 1997.
79. STATEN, M. L.; KERR, R. A.; OWEN, S. J.; BLACKER, T. D. *Unconstrained paving and plastering: Progress update*. In Proceedings, 15th International Meshing Roundtable, pags. 469–486. 2006.
80. TCHON, Ko-Foa. *Quad-Dominant Mesh Adaptation Using Specialized Simplicial Optimization*. Proc of 15<sup>th</sup> International Meshing Roundtable. 2006.
81. TONG, Y.; ALLIEZ, P.; COHEN-STEINER, D.; DESBRUN, M. *Designing quadrangulations with discrete harmonic forms*. Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing, pags. 201-210. 2006.
82. TOUSSAINT, G. *Quadrangulations of planar sets*. In Proceedings of the 4th International Workshop on Algorithms and Data Structures, pages 218–227. 1995.
83. VELHO, Luiz. *Quadrilateral meshing using 4-8 clustering*. In Proc. CILANCE'00, pags 61-64. 2000.
84. VISWANATH, N.; SHIMADA, K.; ITOH, T. *Quadrilateral Meshing with Anisotropy and Directionality Control via Close Packing of Rectangular cells*. 9th International Meshing Roundtable. 2000.
85. WEISSTEIN, Eric W. "Brahmagupta's Formula." de *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/BrahmaguptasFormula.html>. Acesso em: 15 de fevereiro de 2011.
86. WICKHAM, Dustin. 5 Degree Lounge. <http://dustinwickham.blogspot.com/>. 4 de agosto de 2010. Acesso em: 15 de fevereiro de 2011.

87. WOLFENBARGER, P.; JUNG, J.; R. DOHRMANN, C.; R. WITKOWSKI, W.; J. PANTHAKI, M.; H. GERSTLE, W. *A global minimization-based, automatic quadrilateral meshing algorithm*. In Proceedings, 7th International Meshing Roundtable, pages 87–103. 1998.
88. X. WANG, W. *Generation of Triangular Mesh with Specified Size by Circle Packing*. Advances In Engineering pags 133-142. 2006.
89. YAMAKAWA, Soji; SHIMADA, Kenji. *Quad-Layer: Layered Quadrilateral Meshing of Narrow Two Dimensional Domain by Bubble Packing and Chordal Axis Transformation*. Proceedings of ASME Design Automation Conference. 2001.
90. YAMAKAWA, S.; SHIMADA, K. *Triangular/Quadrilateral Remeshing of an Arbitrary Polygonal Surface via Packing Bubbles*. Proceedings of Geometric Modeling and Processing, pags. 153-162. 2004.
91. YAO, Chih-Yuan; CHU, Hung-Kuo; JU, Tao; LEE, Tong-Yee. *Compatible quadrangulation by sketching*. Computer Animation and Virtual Worlds, vol 20. 2009.
92. ZADRAVEC, Mirko; SCHIFTNER, Alexander; WALLNER, Johannes. *Designing Quad-dominant Meshes with Planar Faces*. Eurographics Symposium on Geometry Processing, vol 29, n° 5. 2010.
93. ZHANG, Muyang; HUANG, Jin; LIU, Xinguo; BAO, Hujun. *A wave-based anisotropic quadrangulation method*. ACM SIGGRAPH 2010 papers. 2010.