Raciocínio e Decisão Usando LEI

Este exemplar corresponde à redação final Dissertação devidamente corrigida e defendida por Francisco Erivelton Fernandes de Aragão e aprovada pela banca examinadora.

Fortaleza, 14 de Dezembro de 2000.

Tarcísio Pequeno (DC-UFC) (Orientador)

Dissertação apresentada ao Mestrado em Ciência da Computação, UFC como requesito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Mestrado em Ciências da Computação
Universidade Federal do Ceará

Raciocínio e Decisão Usando LEI

Francisco Erivelton Fernandes de Aragão[1]

10 de Dezembro de 2000

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Tarcísio H. C. Pequeno (DC-UFC)

Prof. Dr. Arthur Buschsbaum (UFSC)

Prof. Dr. Marcelino Pequeno (DC-UFC)

Profa. Dra. Ana Teresa de Castro Martins (DC/UFC)

[1]Bolsista do CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa).

Agradecimentos

Carlos Drummond de Andrade redigindo um prefácio começou dizendo que gostaria de agradecer a seu ’Fulano’ o padeiro da sua cidade, a seu ’Cicrano’ o leiteiro, etc“, vendo que a lista de meritórios era enorme resolveu o problema com um único e certeiro golpe: “Agradeço a Itabira”.

Quando o agradecimento é coletivo e sincero dispensa explicitações. Todos que cruzaram comigo neste percurso sabem o que lhes devo. OBRIGADO.

Porém ...

Agradeço
a Tarcísio, meu *guru* por ter me visto,
a Erivalda, minha *guria* por eu tê-la visto.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Preâmbulo

Este trabalho oferece uma solução para o problema da tomada de decisão em situações de inconsistência. Em primeiro lugar identificamos que tipo de inconsistência é tratável e, depois, separamos o raciocínio e a decisão em momentos e abordagens diferentes. Propomos um sistema composto de uma lógica e de uma medida. A lógica será usada para descrever e manipular o conhecimento, inclusive nos casos de conhecimento contraditório, enquanto a medida será usada como auxílio final na decisão a ser tomada sobre o conhecimento tratado pela lógica. Em um único e homogêneo sistema manipulamos informações conflitantes através de uma linguagem lógica e faremos escolhas apoiados em um cálculo probabilístico desenvolvido especialmente para este fim. Uma vez identificado o tipo de contradição possível, adotamos um método adequado para tratá-la explorando todas as suas possibilidades, só então passaremos a uma segunda fase que é a tarefa de decisão propriamente dita. A separação entre raciocínio e decisão permite que as escolhas sejam feitas sem se afetar a consideração total dos elementos envolvidos.

A lógica usada como base do sistema é uma lógica não clássica cujas características peculiares nos permitirão implementar rotinas próprias ao raciocínio comum, usado no dia a dia, como a retração de conclusões, e o manuseio de informações contraditórias. A medida será desenvolvida de forma a corresponder à lógica não clássica em questão e, ao mesmo tempo, oferecer uma alternativa semântica com um nível de granulação superior ao da dicotomia verdadeiro-falso. Assim o produto resultante representa um passo adiante, no tocante à representatividade e ao poder de decisão, se comparado a sistemas puramente lógico ou puramente probabilísticos. A lógica empregada é de tal forma particular que permitirá o avanço mesmo com relação aos atuais sistemas lógico-probabilísticos.

O sistema resultante, apesar de se situar no delicado terreno que é a fronteira entre duas disciplinas, se revela uniforme e elegante principalmente por dois fatores: Primeiro, a medida especial se aplica diretamente sobre as sentenças descritas pela lógica e, segundo, por ter sido a medida definida diretamente a partir da estrutura semântica da lógica. Dessa maneira mantêm-se as características desejáveis tanto de uma disciplina quanto da outra e, como fecho, obtemos um cálculo lógico correto e completo com relação à semântica probabilística empregada.

1.2 Raciocínio Indutivo, Contradição e Inconsistência

Entre as diversas características do raciocínio encontra-se a habilidade de se tirar conclusões a partir de conhecimento incompleto. Esta capacidade pode, em certos casos, conduzir à contradição e, conseqüentemente à inconsistência. Tal prática caracteriza o raciocínio indutivo, aquele que amplia nosso conhecimento com conclusões cujo conteúdo transcende o das premissas. Um exemplo se dá quando usamos a informação 'Pássaros geralmente voam' para concluir que um certo pássaro, digamos Piu-piu, voa. O raciocínio usado em conclusões desse tipo é chamado de implicação default. É natural e esperado que, procedendo assim, cheguemos a informações sobre as quais não podemos atestar a veracidade. Neste exemplo, de fato, o que podemos pensar, baseados nas informações de que dispomos, é que Piu-piu deveria voar. Imagine, no entanto, que novos dados se tornem disponíveis e descubramos que Piu-piu é um pinto, e não um canário? Bom, um comportamento sensato seria abandonar a conclusão inicial e nos retratarmos, concluindo que, realmente, Piu-piu não voa. Da mesma maneira é possível que tal tipo de raciocínio conduza à contradição sem que, no entanto, surjam informações adicionais. Veja:

Sabíamos que Roberto Freire é comunista e que, em geral 'Comunistas são estatizantes'. Quando, pela imprensa descobrimos que Roberto Freire apoiou a privatização, concluímos, por um lado, que Roberto Freire é estatizante e, por outro, que Roberto Freire é não estatizante.

Obtivemos duas afirmações contrárias, ambas com direitos aparentemente iguais de existência. Qual delas devemos endossar? Baseados em que, escolheremos uma ou outra? Se tivermos tempo podemos aguardar por mais informações necessárias para chegarmos a uma conclusão. Em situações realistas, porém, geralmente não podemos aguardar por novas e esclarecedoras informações.

Veremos como estes problemas ligados ao raciocínio indutivo são tratados e, em seguida, mostraremos nossa solução que avança onde as atuais param: exatamente quando novos dados não se tornam disponíveis. Conseguimos tomar decisões com nosso sistema mesmo quando a esclarecedora informação adicional não vem.

1.3 Raciocínio Indutivo e Lógica

É largamente conhecido o fato da lógica clássica não ser adequada para tratar a contradição. Sistemas baseados nesse tipo de lógica, por respeitarem o princípio da não contradição, infelizmente se vêem paralisados ao lidarem com informação inconsistente.

Situações de inconsistência, geradas por informações contraditórias, requerem uma abordagem lógica especial onde certos preceitos clássicos sejam relaxados. Por exemplo, o perene valor das conclusões obtidas por dedução; Em outros termos, queremos dizer que a monotonia decorrente da dedução deve ser revista se queremos formalizar um raciocínio mais afeito a situações realistas como as que encontramos no dia a dia.

A possibilidade de se obter conclusões sem a rigidez dedutiva é alcançada desenvolvendo-se mecanismos lógicos que implementem o raciocínio 'default'. As lógicas não monotônicas enfrentam este desafio estendendo a lógica clássica de forma a permitir que novas premissas invalidem velhos teoremas. No campo da Inteligência artificial, 'defaults' são usados para representar conhecimento do senso comum, por exemplo, em diagnósticos, defaults representam a ausência de comportamento patológico; em sistemas hierárquicos, 'defaults' representam as propriedades das classes e em 'reasoning about change', representam a tendência das propriedades permanecerem invariantes.

Em lógica, a implementação da implicação 'default' leva a uma modificação fundamental no conceito de inferência. Enquanto na lógica clássica as inferências se baseiam apenas na derivação das sentenças, nas lógicas 'default' elas são aceitas também com base na consistência das fórmulas. Vejamos alguns exemplos:

2.2.1 McDermott & Reiter No mesmo volume da revista Artificial Inteligence (13, 1980) encontramos dois trabalhos onde o conceito de implicação 'default' é implementado, a lógica modal de McDermott e Doyle[MD80], e a lógica default de Reiter[REI80]. No primeiro trabalho, 'defaults' do tipo "Pássaros geralmente voam", são vistos como: "A's geralmente são B's". Tal abstração é interpretada na lógica como significando "Se x tem a propriedade A e, se é consistente afirmar que ele tem a propriedade B, então ele tem a propriedade B". Cabe observar que, nesta lógica, os 'defaults' são expressos na própria linguagem. No segundo trabalho encontramos a Lógica Default, onde, apesar de interpretar o conceito da mesma maneira, Reiter introduz uma diferença capital na implementação do conceito. No seu caso a linguagem não é estendida, quer dizer, os 'defaults' não são representados como expressões da linguagem e sim como regras adicionais de inferência, as chamadas regras default. Para serem aplicadas, no entanto, as regras adicionais passam por um teste de consistência. O uso dessas regras associado à verificação de consistência pode conduzir a resultados inesperados como, por exemplo, a obtenção de conclusões que não seriam deriváveis usando-se lógica clássica. Reiter resolveu este problema com a idéia de se separarem os grupos de conclusões conflitantes em múltiplas extensões.

2.2.2 O Sistema IDL-LEI

O comportamento adequado perante os dois tipos de problema gerados pela aplicação do raciocínio indutivo, ou seja, a retratação e a tolerância diante de conclusões conflitantes, se encontram implementadas por Pequeno e colaboradores em um sistema que envolve uma lógica capaz de tolerar a contradição (LEI - Logic of Epistemic Inconsistence) [PB91] e uma lógica que suporta a retratação (IDL - Inconsistence Default Logic) [Peq90].

LEI

Esta lógica implementa o conceito de inconsistência epistêmica, isto é, a inconsistência que se situa na descrição de um fato e não nele próprio. Dessa forma, as contradições decorrentes da inconsistência epistêmica são fruto da imprecisão do nosso conhecimento e não de uma anomalia dos fatos em si. É ao tratar dessas contradições que LEI se permite relaxar o princípio da não contradição e possibilita que contradições sejam incorporadas em uma visão global da situação que as gerou. Quando se depara com contradições verdadeiras, digamos ontológicas, LEI respeita o princípio da não contradição.

Em LEI procede-se a uma discriminação em relação ao conhecimento seguro, aquele sobre o qual não pairam dúvidas, e o conhecimento plausível que aceitamos baseando-nos apenas em evidências.

Um dos resultados principais da lógica da inconsistência epistêmica é permitir o surgimento de teorias ao mesmo tempo inconsistentes e não triviais. Tal poder nos permite trabalhar com a contradição sem que ela, no entanto, seja indício de erro. Assim é possível enfrentarem-se aplicações práticas, onde o conhecimento disponível é, via de regra, incompleto.

O Cálculo de LEI

A linguagem de LEI é composta da linguagem tradicional de primeira ordem acrescida do símbolo de interrogação. Novas regras de formação regulam a possibilidade de construção das fórmulas marcadas com o novo símbolo. Tais fórmulas servem para representar o conhecimento incerto, por exemplo, o tipo de informação que advém da indução. As informações axiomáticas ou as obtidas apenas por dedução permanecem sem o novo símbolo. É fazendo esta sutil diferenciação entre os dois tipos de informação que LEI atinge o objetivo de suportar certo tipo de contradição sem recair na trivialização.

A Semântica de LEI

As fórmulas marcadas com o símbolo de interrogação exigem uma interpretação especial. Por exemplo, quando o valor veritativo de a vale 1, temos que a é verdadeira, entretanto, dizer o mesmo de a? significa apenas que existem indicações positivas de que a seja verdadeira.

A semântica da lógica da inconsistência epistêmica utiliza um conjunto de valorações clássicas. Estas valorações podem representar diferentes pontos de vista de uma mesma pessoa ou pontos de vista de diversas pessoas.

É uma intrincada análise das possibilidades de combinação entre as valorações clássicas que fornece, em última instância, o valor veritativo de uma proposição em LEI. Estas possibilidades são delineadas a partir da estrutura da fórmula, como acontece na lógica clássica, porém as semelhanças com a semântica tradicional logo se esgotam e inovações se tornam necessárias. Para atingir seu objetivo, a nova semântica tem que manipular duas abordagens distintas, uma maximal e outra minimal, que representam, respectivamente, os comportamentos crédulo e cético diante das proposições incertas, aquelas para as quais temos apenas indicações de sua veracidade.

A semântica de lei opta por uma abordagem crédula, quer dizer, basta que uma das valorações clássicas seja favorável a uma sentença para que ela seja considerada verdadeira, ou seja, um comportamento crédulo. Porém, para se analisar certas fórmulas é necessário se combinar as duas abordagens maximal (crédula) e minimal (cética).

O fato de representar a inconsistência epistêmica e acatar a contradição sem cair na trivialização faz de LEI uma lógica paraconsistente, mas cabe observar que, apesar disso, LEI é uma extensão MONOTÔNICA da lógica clássica, ou seja, novas premissas não afetam antigas conclusões. A habilidade de fazer retrações é conseguida quando LEI é usada como base da lógica 'default' IDL, que veremos adiante.

Porque uma lógica default da Indução e Inconsistência?

As principais características do raciocínio não monotônico são o advento de conclusões contraditórias e a possibilidade da eliminação de conclusões já obtidas. Ambas se devem ao particular tipo de interferência que os argumentos não monotônicos exercem uns sobre os outros - pois, no curso do raciocínio, tais argumentos podem entrar em conflito e até mesmo invalidar o que já fora parcialmente concluído. Isso acontece, por exemplo, quando o conhecimento disponível não basta para solucionar os conflitos encontrados, e o ocasional conhecimento recém adquirido seja tal que cause a eliminação de conclusões anteriormente obtidas.

Contextos como o exposto acima conduziram ao aparecimento das lógicas 'default' que se caracterizam por possuírem um meio especial de obter conclusões. São regras meta-linguísticas usadas para representar raciocínios do tipo: "SE, CONCLUIR ALGO FOR CONSISTENTE COM O QUE JÁ SEI, ENTÃO EU CONCLUO". É por meio dessas regras especiais que se implementa a indução. Não é demais ressaltar que seu emprego é submetido a um teste de consistência, e assim, elas podem ter seu uso impedido, no decorrer de um raciocínio. Entretanto, lógicas 'default', como a de Reiter, não são capazes de impedir a aplicação de certas regras que, em alguns casos, levam a conclusões erradas. Tal falha advém do fato de Reiter não distinguir entre conclusões deduzidas e conclusões induzidas. Ou seja,

conclusões não monotonicas resultantes do emprego das regras 'default' não podem ter o mesmo 'status' que aquelas obtidas, dedutivamente, pelo uso das regras sintáticas intra-lógcas , que, naturalmente, subsistem nas lógicas 'default'.

É esta a idéia central que motivou a criação da lógica que vemos a seguir, uma lógica para o inconsistente raciocínio não monotônico.

IDL - Inconsistent Default Logic

As inferências em uma lógica não monotônica podem produzir conclusões parciais que apresentem conflito entre si, porém há situações em que consultar toda a evidência disponível possibilita uma escolha entres as conclusões parciais. IDL resolve este problema, pois é capaz de identificar as condições que o produzem e ainda possui mecanismo capaz de eliminar as conclusões indesejadas. Em IDL separa-se o conhecimento em dois tipos, o que veio de fontes seguras e aquele obtido pela aplicação do raciocínio indutivo. Este último é considerado de maneira particular, pois é marcado por um símbolo especial, é autorizado a aparecer em expressões que representam contradição e finalmente, é o tipo de conhecimento passível de retração.

A tarefa delicada de rever o aristotélico princípio da não contradição é realizada com sucesso no sistema IDL-LEI, pois nele se permite relaxar este princípio quando das contradições epistêmicas e, ao mesmo tempo, continua-se a respeita-lo quando das contradições reais.

Os autores de LEI e IDL sustentam que contradição e raciocínio não monotônico são praticamente indissociáveis , e essa opinião se reflete no fato de seu sistema relaxar a lei de não contradição e a monotonia. Desse modo IDL-LEI combina não monotonia e paraconsistência para se fortalecer naquele que é o ponto fraco da lógica de Reiter: o surgimento de extensões indesejadas e a posterior divisão da teoria em múltiplas extensões. Pois, sendo mais pormenorizada nos critérios de impedimento e autorização da aplicação das regras 'default', evita a obtenção de conclusões erradas e, assim, implementa o raciocínio default de forma a impedir o surgimento de tais conclusões.

1.4 Raciocínio Indutivo e Probabilidade

2.3.1 Introdução

As circunstancias em que floresceu a probabilidade são suficientes para explicar porque ela se presta à análise de situações onde o conhecimento é incompleto. Ela nasceu para ser um auxílio na compreensão de jogos de azar. Suas primeiras aplicações buscavam contemplar os diversos elementos envolvidos em um jogo com o objetivo de, na impossibilidade de uma resposta segura, pelo menos sugerir caminhos mais férteis que o simples comportamento ao sabor do acaso. Até chegarmos ao conceito moderno de probabilidade, o trabalho de diversos filósofos e matemáticos teve de vir à luz. No capítulo 2 apreciaremos essas contribuições, porém dois pontos relevantes merecem ser citados de antemão. Primeiro a preocupação de Carnap com o fato de o termo probabilidade representar dois conceitos filosóficos distintos, mas que se materializam em um único cálculo. Tal sutileza, inapercebida antes de Carnap, causou, e causa, discussões acirradas e desnecessárias no meio acadêmico. Segundo, a pertinente discussão se, realmente, a relação entre a intuição humana e as leis da proporção não é apenas uma coincidência. Pearl[Pea88] se faz esta pergunta e conclui:

"O objetivo da teoria da probabilidade é fornecer uma descrição coerente de como a crença se modifica baseada em informação parcial ou incerta".

De fato, o cálculo probabilístico é capaz de embutir padrões qualitativos do raciocínio do senso comum, como por exemplo, a não monotonicidade. Assim pode, naturalmente, ser usado para tratar a indução, o que nos leva a concluir que o atual interesse pela probabilidade no campo da inteligência artificial advém do fato dela prover relações quantitativas entre crenças e possuir um cálculo matematicamente sólido que permite o manuseio dessas relações de forma a gerar conclusões plausíveis.

2.3.2 Geffner.

Uma implementação do raciocínio 'default' baseada em probabilidades se encontra em(referência), onde a definição de probabilidade condicional é usada como uma aproximação do raciocínio indutivo. A probabilidade condicional é uma medida relativa. Considerados dois eventos, chamamos de condicional a probabilidade de um deles acontecer diante do fato do outro ter acontecido. Por exemplo:

Se A representa 'Ser pássaro' e B representa 'voar', então a expressão:

P(B /A)

significa a probabilidade condicional de voar dado que se é pássaro.

Geffner implementa o raciocínio indutivo associando probabilidades condicionais extremas à implicação 'default'. Quando a probabilidade de A dado B é extremamente próxima de um ou de zero, esta probabilidade representa uma implicação 'default'.

Por exemplo:

Se P(B/A) @ 1, ou seja, a probabilidade de A dado B é aproximadamente igual a um, diz-se que 'Tendo-se A então geralmente tem-se B'.

A Partir dessa associação é construído um elegante sistema de derivação probabilística. Tal sistema se chama P e se baseia em um conjunto de cinco regras,

1. Regra Default. Se temos o 'default' p Þ q, então q é derivável. 2. Regra de Dedução. O que é derivável em lógica clássica também é em P. 3. Regra de Aumentação. As conclusões derivadas em P podem ser assimiladas como novas evidências sem afetar conclusões anteriores. 4. Regra de Redução. Pode-se remover informação do conjunto de evidências se ela for derivável do conjunto reduzido. 5. Regra de Disjunção. Se for possível se deduzir a mesma informação r a partir de p e q isoladamente, então r também é dedutível a partir da disjunção p v q.

Este conjunto básico de regras admite uma interpretação probabilística pura, mas é bastante limitado quando, por exemplo, por se basear no conceito de probabilidade extrema, não consegue representar a transitividade dos 'defaults'. Uma sexta regra acrescenta-se a este conjunto inicial com o objetivo de prover condições de verificação da independência entre regras 'default'. Porém o preço é alto, pois se perde a correspondência com a interpretação probabilística.

O sistema P implementa a retração de informações e ainda captura, na sua implementação, duas características fundamentais do raciocínio 'default', a especificidade e a irrelevância.

2.4 RACIOCÍNIO INDUTIVO EM LÓGICA & PROBABILIDADE

Lógica e probabilidade são duas disciplinas que, cada uma a seu modo, conseguem representar o raciocínio indutivo. Semear pontos de encontro entre as duas pode resultar em terreno frutífero para ambas, sobretudo no que concerne às aplicações práticas. Faremos agora um breve apanhado do que já se logrou neste afim.

2.4.1 Carnap Um dos expoentes do positivismo lógico, Carnap procurou construir um sistema formal de lógica indutiva, cujo conceito central era o grau de credibilidade, ou de probabilidade, que é possível se atribuir a uma hipótese. Carnap tentou capturar o raciocínio indutivo num contexto puramente lógico. Acreditando que as hipóteses científicas (nem sempre) podem ser completamente verificadas, definiu o conceito probabilístico de grau de confirmação. Acreditando que o máximo que se pode fazer é a confirmação das hipóteses científicas, Carnap desenvolveu uma lógica indutiva, o mais possível, nos moldes da lógica dedutiva, que lhe servisse como ferramenta na descrição do fenômeno da indução. Seu ponto de partida foi a percepção de que a maior parte dos desentendimentos neste assunto se deve, na verdade, a problemas de terminologia.

As discordâncias a respeito do verdadeiro significado da palavra probabilidade, eram vãs uma vez que uns e outros estavam falando de conceitos diferentes que, perigosamente eram designados, pelo mesmo termo, a saber, PROBABILIDADE. Carnap cunhou então dois termos, probabilidade1 e probabilidade2 e a eles se referiu como representando conceitos diferentes. Estes conceitos foram elegantemente desenvolvidos na lógica que ele pensara ser a linguagem apropriada para as ciências. A leitura da obra de Carnap, "Logical Foundations of Probability", nos causou profundo efeito. Inspirados em seu trabalho, insistimos, por um lado na homogeneidade lingüística mesmo lidando com duas disciplinas diferentes, e, por outro, mantivemos em pauta os dois significados distintos, mas não opostos, da palavra probabilidade. 2.4.2 A lógica de Bacchus. Claramente influenciado pela obra de Carnap, Bacchus considera dois conceitos distintos de probabilidade, a probabilidade proposicional e a probabilidade estatística. Elabora então duas lógicas de primeira ordem, uma para representar a probabilidade proposicional e outra para representar a probabilidade estatística. Desenvolve um mecanismo de inferência direta que funciona como um sistema de raciocínio 'default'. A probabilidade estatística é definida sobre um conjunto de indivíduos; elas descrevem propriedades e não os indivíduos em si. Por exemplo, quando falamos da probabilidade de um fumante de 40 anos de idade contrair câncer, esta probabilidade não se refere a um indivíduo em particular e sim à proporção de fumantes de 40 anos que contraem câncer. A probabilidade proposicional, por sua vez, é aquela atribuída a proposições referentes a indivíduos em particular. Por exemplo, podemos falar da probabilidade de João, um fumante de 40 anos de idade, contrair câncer. Bacchus considera que, neste caso, o conceito de proporção não está envolvido. Como ele diz neste exemplo, "João vai ou não contrair câncer". A probabilidade dessa proposição pode ser extraída das indicações fornecidas pela probabilidade de outros fatos associados ao sujeito João e ao predicado ter câncer. A diferença fundamental entre estes dois conceitos reside no fato de que as probabilidades estatísticas representam afirmações objetivas sobre o mundo, enquanto que probabilidades proposicionais representam afirmações sobre as crenças de um agente, ou seja, são afirmações subjetivas. Uma importante aplicação da probabilidade proposicional se dá em teoria da decisão, onde serve como guia para a ação diante de incerteza. Outra aplicação está na própria análise do raciocínio 'default'. O tipo de probabilidade envolvido neste caso também é a probabilidade proposicional, pois nas decisões a respeito do raciocínio 'default' estamos interessados em afirmações sobre indivíduos, por exemplo "Piu-piu voa"e não em afirmações sobre proporções como "A maioria dos pássaros voa". Vejamos a lógica desenhada por Bacchus:

Lógica para probabilidades proposicionais

É uma lógica de primeira ordem e possui duas modificações importantes com relação à lógica de primeira ordem clássica. Do ponto de vista sintático, surge uma nova regra para a construção de termos, os chamados termos numéricos e surge também um novo tipo de predicado, o predicado probabilístico. Tal predicado, quando aplicado aos termos numéricos, criará novas fórmulas. A segunda modificação é sintática e acontece na maneira de interpretar os termos numéricos. Para isso foi necessária a introdução de um segundo domínio, no caso um subconjunto dos reais. A lógica se torna assim 'bi-tipada', com um domínio tradicional, o domínio do discurso, onde serão interpretadas as fórmulas convencionais e um domínio numérico onde serão interpretadas as fórmulas que representam asserções probabilísticas, ou seja, as fórmulas criadas a partir dos termos numéricos.

O autor conclui que uma lógica apropriada para representar probabilidades proposicionais (graus de crença probabilísticos) naturalmente não está apta a representar probabilidades estatísticas e vice-versa. A impossibilidade reside nas diferenças concretas entre os conceitos de probabilidade vistos acima, que se originam, de fato, em noções diferentes de probabilidade.

1.5 A Medida da Plausibilidade

As abordagens desenvolvidas até aqui consideram a verdade e a falsidade como dois lados de uma mesma grandeza ou, quando muito, como grandezas complementares. Isto acontece com a teoria dos conjuntos, com a probabilidade e com a lógica, inclusive as multivaloradas. A verdade epistêmica, ponto central de LEI, apesar de ser dicotômica, possui características especiais que permitem as delicadas considerações necessárias à conclusão de que a verdade e a falsidade não são complementares . O que faremos, quando formos quantificar as sentenças da lógica epistêmica, será aferir a propensão das proposições a serem verdadeiras ou falsas. Pleiteamos que estas propensões, apesar de interagirem entre si, não respeitam a lei da complementaridade. Concluímos que a probabilidade não é suficiente para o trabalho de quantificação a que nos propusemos. É necessário um recuo e a consideração de uma idéia mais genérica, da qual a probabilidade é um caso particular: o conceito de medida. As características peculiares da lógica da inconsistência epistêmica -notadamente a capacidade de acatar a contradição sem cair na trivialização - nos levaram à convicção de que uma nova medida era necessária. Acreditando que a confecção de uma medida o mais próximo possível da probabilidade bastaria, começamos a construí-la fazendo modificações mínimas nos axiomas de Kolmogorov. O desenvolvimento desta medida seguiu critérios de adequação que, por fim, forçaram a idéia um pouco mais e chegamos à conclusão de que uma nova ferramenta seria indispensável . Desenvolvemos então o que se chamou feixe de medidas. Trata-se de uma família de medidas que, além de compartilharem imagem e domínio, necessitam umas das outras para sua própria definição. Neste trabalho, em particular, deu-se que um feixe de tamanho dois foi suficiente, e estas duas medidas em conjunto receberam o nome de feixe de plausibilidade.

Desta maneira conseguimos resolver problemas delicados como a decomposição da medida de fórmulas complexas em termos das medidas de suas sub-fórmulas, passo indispensável para a elaboração de uma semântica recursiva. Além de ser a única maneira de se associar significado a sentenças lógicas, esta decomposição é um resultado importante porque permite a medida da plausibilidade da negação epistêmica. O que é impossível com a probabilidade tradicional uma vez que esta negação não corresponde ao conceito de inverso simétrico. Note-se que em LEI é possível afirmar e negar sem se contradizer. Conseguimos também a decomposição da medida da implicação material, pois distinguimos e codificamos uma sutil distinção entre a medida da propensão à verdade e a medida da propensão à falsidade.

Em IDL-LEI é possível, como já sabemos, a obtenção de proposições contraditórias que possuam o mesmo 'status' epistêmico. Um sistema automático de decisão que utilize IDL-LEI não seria capaz de uma escolha em tais situações. A medida de plausibilidade, desenvolvida neste trabalho, possibilita, quando aplicada a LEI, a quantificação do grau epistêmico das proposições e, conseqüentemente, uma posterior decisão entre elas, uma vez que conseguimos obter medidas diferentes, para fórmulas contraditórias com o mesmo valor veritativo.

Quando usamos a medida de plausibilidade estamos fazendo estatística sobre estados de crença. Medimos a proporção de estados mentais e a proporção de combinações de estados mentais que corroboram uma proposição. As valorações de verdade, na semântica de LEI, representam pontos de vista subjetivos, não estatísticos. A estes pontos de vista são associados pesos iniciais que nada mais são que probabilidades proposicionais . Desenvolvemos então um cálculo que parte destas valorações e, seguindo a estrutura sintática das fórmulas, se espelha na semântica original de LEI para, finalmente, atribuir valores quantitativos às proposições. Em resumo: aplicamos uma medida sobre representações de pontos de vista, logo usamos em conjunto, os dois tipos de medida identificados por Carnap em "Logical Foundations of Probability"

Um dos critérios de adequação que nortearam o desenho da nova medida foi a necessidade de um tratamento uniforme para o conjunto de fórmulas da lógica. Sabendo que a linguagem de LEI se compõe de duas partes fundamentalmente distintas no tocante a seus significados, i.e. o conhecimento seguro e o conhecimento retratável, conciliamos unidade de tratamento e diferenciação de resultados. É importante salientar que, assim como a dinâmica de IDL-LEI se torna clássica quando aplicada a fórmulas livres de "?", a medida da plausibilidade, nas mesmas condições se torna bivalorada. Ou seja, quando aplicada à porção clássica da linguagem de LEI, a medida assume apenas os valores extremos ZERO e UM.

3.2 Discussão

O sistema formado por IDL-LEI e a medida de plausibilidade passam a contar com uma semântica quantitativa que reúne as vantagens das duas áreas que nos propusemos investigar. No processo de obtenção de tal resultado resolvemos alguns problemas ainda pendentes em abordagens anteriores.

Em Geffner. Geffner representa a implicação default através do conceito de probabilidade condicional o que torna impossível o encadeamento das conclusões indutivas.

Por associar a indução às probabilidades extremas, seu sistema não consegue representar a transitividade da implicação default. Esta é uma deficiência séria, pois facilmente encontramos exemplos de implicação desse tipo que são naturalmente transitivas.

Nem sempre quando dizemos 'A geralmente conduz a B' estamos nos referindo a uma correlação quantitativa, nem estamos querendo dizer que a maioria dos A's são também B's, e sim que, de alguma forma, é natural que indivíduos com a propriedade A também possuam a propriedade B por motivos qualitativos. Este tipo de implicação, embora indutiva, respeita a transitividade; o que esse sistema não faz.

Outro ponto não menos restritivo é o fato do sistema de Geffner desconsiderar os 'defaults' não-normais deliberadamente.

Em Bacchus. Bacchus desenvolve uma lógica que acata expressões probabilísticas na própria linguagem. Isso o leva a trabalhar, no tocante à semântica, com dois domínios, um dos quais é forçosamente numérico, o que, de forma inevitável, torna sua lógica incompleta. Além disso, envolve considerações quantitativas no seio mesmo do sistema dedutivo. Evitamos esta, digamos, contaminação quantitativa, ao aplicarmos nossa medida da plausibilidade apenas, e somente, quando todas as conclusões possíveis já foram obtidas em IDL-LEI. Convém frisar que o esforço dedutivo e indutivo é puramente lógico, a medida da plausibilidade só se aplica uma vez terminada a fase de inferência lógica.

Em Pequeno & Bushbaum O sistema IDL-LEI implementa com sucesso o raciocínio default, não apresenta os problemas citados acima, pois representa a transitividade da implicação indutiva, codifica os 'defaults' não-normais e é correto e completo do ponto de vista semântico. Consegue lidar com a inconsistência sem trivializar e permite que a inconsistência epistêmica seja eliminada ao obterem-se novas informações. Porém, na prática, quando trabalhamos com situações realistas vemos surgir as seguintes limitações:

· nem sempre dados relevantes se tornam disponíveis ou,

· em certos momentos espera-se uma decisão urgente.

É neste ponto que nosso trabalho se mostra útil e inovador. Enquanto um sistema baseado apenas em IDL-LEI estacionaria aguardando informação adicional e sistemas puramente probabilísticos falham por não representar certas nuances do raciocínio, nossa solução acrescenta a habilidade computacional, vinda de uma medida das plausibilidades, que permitirá decisões seguras mesmo quando os atuais sistemas, sejam lógicos ou probabilísticos, paralisam-se impossibilitando uma decisão.

Em Pequeno & Buchsbaum [referencia] lemos,

"Não há garantia de que todo possível conflito seja resolvido. Pode perfeitamente acontecer duas conclusões parciais opostas com o mesmo direito de existir ou, até mesmo, conclusões parciais opostas, mas sem simetria, ou seja, com direitos diferentes".

Nestes casos, o sistema IDL-LEI outorga a estas conclusões o mesmo status, e não oferece meio, e nem fora esse o intuito, para se proceder a uma escolha entre elas. A solução que apresentamos é capaz de detectar e exprimir esta distinção, uma vez que, sendo composta de IDL-LEI e de uma medida possui o poder indutivo e a expressão quantitativa necessária para tal.

Em suma temos que a plausibilidade aplicada a IDL-LEI,

. Por manipular o raciocínio usando uma lógica não monotônica, supera os problemas de expressividade na representação do raciocínio.

. Por distinguir os dois tipos de conhecimento, implementa a correta retração de conclusões errôneas.

. Por adiar a decisão para depois do raciocínio concluído, pode aproveitar o dinamismo de uma medida sem cair na 'cegueira localizada', pois leva em conta todo o conhecimento disponível.

. E por fim, tem poder dedutivo e indutivo suficiente para ser usado como máquina de inferência eficaz em um sistema de inteligência artificial aplicável a situações práticas realistas.

1.6 Conclusão

O vago e fértil ponto de partida deste trabalho foi a investigação da fronteira entre lógica e probabilidade. Depois de uma revisão do que fora feito a este propósito decidimos estabelecer um contato entre a Lógica da Inconsistência Epistêmica e a Teoria da Probabilidade. Concluímos, contudo que não só a probabilidade não era apropriada para nosso propósito como teríamos que expandir a idéia mesmo de medida. Vimos que a criação do feixe de medidas - produto final deste trabalho - resolveu o problema a que nos propusemos enfrentar e que, neste caso em particular, a instância de um feixe de tamanho dois foi suficiente. O resultado pode ser sintetizado na seguinte frase:

"A medida de probabilidade não traduz a verdade da lógica clássica, entretanto, a medida de plausibilidade traduz a verdade da lógica paraconsistente".

Salientamos que tal ferramenta, o feixe de plausibilidades, pode ser útil para uma grande classe de problemas práticos, pois inclui, entre os conceitos manipulados por LEI, a noção de proporção. O sistema IDL-LEI em conjunto com o feixe de plausibilidade pode ser usado para formalizar problemas onde as condições de incerteza, que demandam o raciocínio indutivo, conduzem à contradição, à inconsistência e ainda exigem uma decisão inadiável. Trata-se de um aparato apropriado para ser usado na codificação e solução de problemas onde, por exemplo, vários especialistas, impossibilitados de chegarem a um acordo, expõem seu conhecimento sobre um tema controverso.

4.1 Trabalhos futuros

Se por um lado os resultados experimentais sobre o deslocamento dos elétrons já encontram uma unidade de opiniões entre os físicos, por outro, não se chegou ainda a um consenso no tocante à descrição teórica do fenômeno. Contamos pelo menos com seis diferentes tentativas bem estabelecidas como a explicação 'oficial'de N. BOHR, a versão do 'Muitos Mundos' de Everet e a versão da 'Onda Piloto' de DeBroulie, por exemplo.Um trabalho futuro envolvendo o conceito de feixe de medidas seria averiguar como e até onde o sistema IDL-LEI pode participar destas tentativas de interpretação do fenômeno quântico.

Capítulo 2

Probabilidade e Lógica

Probabilidade é uma noção corriqueira, da qual encontramos, no dia-a-dia, os mais variados empregos. Se você está lendo este texto é provável que ele tenha sido aceito como dissertação de mestrado, por exemplo.

Lógica também é um termo usado com folga. Às vezes até confundimos as duas idéias. Quando dizemos "Não tem a menor lógica o Calouros do Ar ser campeão brasileiro", na verdade queremos dizer que é improvável que esta equipe cearense seja campeã.

Nas próximas seções deixaremos claros estes conceitos, e na última faremos um apanhado do uso conjunto destas duas noções.

2.1 Probabilidade

O estudo científico começou no século XVII com Blaise Pascal resolvendo problemas matemáticos relacionados a jogos de azar. Isto explica porque ainda hoje na literatura os exemplos se referem a lançamentos de dados e a retiradas de bolas de uma urna.

Há porém algo mais sofisticado no senso comum de probabilidade do que a sorte; ele pode, por exemplo, representar a crença.

Gerações de filósofos e matemáticos tentaram fundamentar este conceito. Nas seções seguintes chegaremos perto do que eles pensaram.

2.1.1 Primeira Interpretação

A primeira tentativa de sistematização foi a Teoria Clássica, cujo maior representante foi Laplace, onde a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis a este evento e a quantidade de casos possíveis.

Infelizmente a definição Laplaceana tem uma grave falha: ela é circular. Acata a hipótese de que "todo resultado possível é igualmente provável". Ora, estes dois adjetivos dizem a mesma coisa. Bernouilli atacou este problema definindo equiprobabilidade mas, como é mostrado em [BM93] com seu princípio da indiferença,

> "*Dois ou mais eventos são equiprováveis se não houver razão lógica para se preferir um em relação aos outros*"

Bernouilli, num jogo semântico, apenas introduz um novo termo. É possível até mesmo se chegar a um absurdo usando este princípio, para isso veja [BM93].

2.1.2 Segunda Interpretação

Visão freqüentista. Nesta outra abordagem vê-se a probabilidade como o limite de uma sequência. Num experimento, a probabilidade de um evento é definida como o limite da freqüência relativa de sua ocorrência em uma seqüência infinita de repetições idênticas e aleatórias.

O fato de que nem as seqüências infinitas nem experiências idênticas existam no mundo real não perturba os adeptos desta interpretação; estes respondem que as teorias aplicam geralmente modelos matemáticos idealizados a situações não ideais, e que sua teoria está de acordo com os testes úteis de descrição e da predição.

Consideram que o termo técnico probabilidade deve ser aplicado apenas aos fenômenos de massa ou a eventos repetitivos, e nunca a eventos "isolados"ou à intensidade de crença como encontrado no discurso comum. "... ao falar da probabilidade de dois poemas conhecidos como o Ilíada e Odisseia terem o mesmo autor, nenhuma referência a uma seqüência infinita de casos é possível e não faz nenhum sentido atribuir um valor numérico a tal possibilidade."[2]

Observações:

a) As experiências não podem ser idênticas, mesmo para seqüências ideais. Numa seqüência idealizada as experiências são idênticas no nível operacional; porém o controle do operador será sempre imperfeito.

b) Não consideram o fato de que uma probabilidade pode apenas ser estimada, nunca determinada realmente.

Crítica

Leibnitz recusou a teoria freqüentista na impossibilidade de se prescrever exatamente as condições da resposta de um experimento. Os freqüentistas respondem que a aplicação de um modelo matemático é geralmente inexata.

O caráter objetivo da teoria freqüencial explica seu predomínio sobre as outras interpretações.

2.1.3 Terceira interpretação

É a teoria lógico-subjetiva baseada em uma relação lógica entre proposições. Koopman e Carnap concordam com esta abordagem, vejamos então suas idéias:

A idéia de Koopman

B.O. Koopman desenvolveu uma detalhada teoria axiomática baseada na intuição. Seus axiomas são baseados em "leis do pensamento"não sujeitas à verificação experimental. Com dois axiomas e um conjunto de crenças ele constrói declarações probabilísticas não-estatísticas e não-numéricas para qualquer tipo de evento.

Um grande resultado é podermos derivar de sua formulação axiomática a teoria da probabilidade matemática clássica.

A idéia principal de Koopman é : "A teoria da probabilidade é derivada diretamente da intuição, e antecede à experiência objetiva; ... e as chamadas definições objetivas da probabilidade dependem de sua tradução em termos de probabilidade intuitiva"[Koo40].

Crítica

Exibir fundamentos não quantitativos para a probabilidade e mostrar que a teoria matemático-probabilística é apenas um caso particular da probabilidade intuitiva é o ponto forte do trabalho de Koopman, porém sua tese de que a probabilidade é anterior à experiência é uma questão aberta que foge ao escopo deste trabalho. Não podemos, no entanto, deixar de pensar que a intuição pode, ao contrário, ser derivada da experiência e a partir dela ser analisada. O leitor interessado encontrará subsídios em [Ett].

A idéia de Carnap

Carnap, na tentativa de criar uma lógica indutiva o mais possível paralela à lógica dedutiva, levou adiante as idéias de Koopman. Ele abordou o problema dos fundamentos da probabilidade e, diante de várias explicações para um mesmo cálculo, identificou a existência de várias "probabilidades", concluíndo que os freqüentistas falam de uma coisa enquanto os lógicos falam de outra.

Probabilidade$_1$ = Grau de confirmação de uma hipótese h com respeito à evidencia e.
Probabilidade$_2$ = Freqüência relativa.

Mesmo do ponto de vista quantitativo, probabilidade$_1$ e probabilidade$_2$ são diferentes, apesar de terem duas fortes características em comum; ambas são funções de dois argumentos, cujos valores são números reais pertencentes a [0,1].

Os argumentos de probabilidade$_1$ são sentenças, proposições, a hipótese e a evidência, e os argumentos de probabilidade$_2$ são propriedades; suas declarações elementares são factuais, empíricas. Os teoremas da teoria da probabilidade$_2$ afirmam, não valores desta função, mas relações gerais entre tais valores.

Observação

É necessário que não se confunda o conceito de probabilidade$_1$ com o sentido subjetivo, psicológico, que às vezes acompanha o termo probabilidade. Por exemplo: quando alguém, num certo momento e com certa intensidade, acredita em algo de maneira não racional. "Este conceito é importante para a teoria do comportamento humano, portanto para a psicologia, sociologia, economia, etc. Mas não pode servir como base para a lógica indutiva ou para o cálculo das probabilidades aplicável como uma ferramenta geral da ciência"[Car63].

2.1.4 O Cálculo

O estudo do cálculo das probabilidades se insere na teoria das medidas. Uma *função de probabilidade* mapeia um certo domínio nos números reais.

O que difere as medidas de probabilidade das funções tradicionais é que elas só podem ser definidas sobre domínios que possuam uma estrutura particular. É bem verdade que de qualquer domínio poderíamos construir um outro domínio estruturado sob o qual poderíamos definir uma função de probabilidade [Bac93].

Definição 1 (Campo) Uma coleção $\mathcal{F}$ de conjuntos é um campo se satisfaz às seguintes condições:

(i) $\mathcal{F}$ contém um conjunto universo V tal que cada membro de $\mathcal{F} \in V$.

(ii) se H é um membro de $\mathcal{F}$ então $\overline{H}$ é um membro de $\mathcal{F}$

(iii) se H e E são membros de $\mathcal{F}$ então $H \cup E$ é membro de $\mathcal{F}$.

Definição 2 (Funções de Probabilidade) Uma função de probabilidade P é uma função real definida sobre o *campo* de conjuntos $\mathcal{F}$ que satisfaz aos seguintes axiomas:

(i) $P(V) = 1$ onde V é o conjunto universo.

(ii) $P(A) \geq 0$ para cada $A \in \mathcal{F}$.

(iii) se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2.2 Lógica

Um critério racional que acompanha a lógica desde Aristóteles é o *Princípio da não contradição*, pelo qual duas proposições contraditórias não podem ser simultaneamente verdadeiras. Uma lógica que não acate este princípio é dita paraconsistente.

LEI-*Logic of Epistemic Inconsistency* obedece a este princípio e a inconsistência tolerada se deve à imprecisão do nosso conhecimento, não à verdadeira situação dos fatos.

Concebida para ser a base da lógica default **IDL**, **LEI** é MONOTÔNICA e possui semântica intensional. ou seja, o valor verdade de uma sentença depende de vários contextos.

A seguir apresentamos uma descrição formal de **LEI**.

2.2.1 A Lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI

Aplicações em IA pedem regras de inferência super dedutivas, onde premissas verdadeiras podem levar a conclusões falsas e isto conduz à contradição.

A desobediência ao princípio da não contradição caracteriza LEI como paraconsistente. Esta lógica foi desenhada para distinguir conhecimento seguro de conhecimento revogável - aquele que, dado o modo como foi adquirido, não possui 'status' de verdade absoluta; e a paraconsistência é uma propriedade natural dos métodos de raciocínio envolvendo este tipo de distinção.

Diante de contradições envolvendo proposições revogáveis não procede uma revisão através do uso do princípio da redução ao absurdo, pois o tipo de informação aí contida não representa necessariamente erro e deve ser mantida e levada em consideração durante o curso do raciocínio.

LEI torna clara a noção de inconsistência epistêmica - aquela que é fruto de nosso conhecimento e não própria aos fatos. É paracompleta. Possui semântica recursiva e um correspondente cálculo completo que mostramos a seguir.

2.2.2 Sintaxe

A linguagem de LEI introduz um símbolo especial, "?", designando o operador epistêmico que serve para separar as proposições irretratáveis das refutáveis.

Alfabeto

- O conjunto contável de letras sentenciais $\{A, B, C, ...\}$.
- O Conjunto contável de conectivos$\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, ?\}$.

Fórmulas sem ?

0. Uma letra sentencial é uma fórmula sem ?.
1. Letras sentenciais são fórmulas sem ?.
2. A negação de fórmulas sem ? é fórmula sem ?.
3. A disjunção, a conjunção e a implicação de fórmulas sem ? são fórmulas sem ?.
4. Nada mais é uma fórmula sem ?.

Fórmulas Plausíveis

(i) *Se $\alpha \in \mathcal{L}$, então α é fórmula plausível;*

(ii) *Se α é uma fórmula plausível então $(\alpha ?)$ e $(\neg\alpha)$ também o são;*

(iii) *Se α e β são fórmulas plausíveis então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ também o são;*

(iv) *Se α é uma fórmula plausível e x uma variável então $(\forall x\alpha)$ e $(\exists x\alpha)$ também são;*

(v) *Nada mais é fórmula plausível.*

Axiomas Básicos

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. Modus Ponens, ou seja $\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{(\beta)}$
4. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
5. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
6. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$
7. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
8. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
9. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
10. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$

Axiomas para a Negação Paraconsistente

1. $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$
2. $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
3. $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
4. $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$

Axiomas para ?

1. $(\alpha \rightarrow B) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow \alpha?)$
3. $(\alpha?? \rightarrow \alpha?)$
4. $(\alpha? \rightarrow \beta?)? \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$
5. $(\alpha \vee \beta)? \rightarrow (\alpha? \vee \beta?)$
6. $(\neg\alpha)? \leftrightarrow \neg(\alpha?)$
7. $\alpha? \rightarrow (\sim\sim \alpha)?$
8. $\alpha? \wedge \sim (\beta?) \rightarrow (\alpha \wedge \sim \beta)?$

Poderia se argumentar que o tipo de situação que leva uma lógica como LEI a aceitar a contradição deve-se a uma má descrição do estado de coisas estudado e que tudo talvez se resolvesse se, recomeçãndo tudo, reformulássemos o problema. Este pode ser o caso para as ciências exatas, mas não é quando tratamos de modelar o senso comum, onde a imprecisão é prevista e as consequentes contradições não representam necessariamente erro. Conhecendo a semântica comprenderemos melhor este tratamento dado à contaradição.

2.2.3 Semântica

A semântica de LEI se comporta de maneira crédula para as fórmulas com "?" e de maneira cética com as fórmulas sem "?". Baseia-se em valorações clássicas que representam as diferentes opiniões sobre as proposições representáveis na linguagem.

Definição 1 (Valoração para LEI)

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de valorações clássicas. Para cada elemento de $\mathcal{C}$ teremos v_{min} e v_{max} funções de $\mathcal{L}_?$ em $\mathcal{B}$, seja também V uma função com a mesma assinatura *de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(i) $V(\alpha) = 1$ *sss para todo* $v \in \mathcal{C}$, $v_{max}(\alpha) = 1$;

(ii) $v_{max}(A) = v_{min}(A) = v(A)$; *se* A *for uma fórmula atômica em* $\mathcal{L}_?$. *Para as outras fórmulas de* $\mathcal{L}_?$ *temos:*

(iii) $v_{max}(\alpha?) = 1$ *sss para algum* $v' \in \mathcal{C}$, $v`_{max}(\alpha) = 1$;

(iv) $v_{min}(\alpha?) = 1$ *sss para todo* $v \in \mathcal{C}$, $v_{min}(\alpha) = 1$;

(v) $v_{max}(\neg\alpha) = 1$ *sss* $v_{min}(\alpha) = 0$;

(vi) $v_{min}(\neg\alpha)$ *sss* $v_{max}(\alpha) = 0$;

(vii) $v_{max}(\alpha \to \beta) = 1$ *sss* $v_{max}(\alpha) = 0$ *ou* $v_{max}(\beta) = 1$;

(viii) $v_{min}(\alpha \to \beta) = 1$ *sss* $v_{max} = 0$ *ou* $v_{min}(\beta) = 1$;

(ix) $v_{max}(\alpha \wedge \beta) = 1$ *sss* $v_{max}(\alpha) = 1$ *e* $v_{max}(\beta) = 1$;

(x) $v_{min}(\alpha \wedge \beta) = 1$ *sss* $v_{min}(\alpha) = 1$ *e* $v_{min}(\beta) = 1$;

(xi) $v_{max}(\alpha \vee \beta) = 1$ *sss* $v_{max}(\alpha) = 1$ *ou* $v_{max}(\beta) = 1$;

(xii) $v_{min}(\alpha \vee \beta) = 1$ *sss* $v_{min}(\alpha) = 1$ *ou* $v_{min}(\beta) = 1$.

Para todas as fórmulas da linguagem seu valor veritativo é dado por V.

Lei oferece sua performance paraconsistente como base da lógica default IDL, criando um sistema dinâmico, onde não monotonicidade e paraconsistência são, da maneira devida, tratadas logicamente.

2.2.4 Probabilidade e Proposições

Para atribuirmos probabilidade às proposições, devemos ser capazes de fazê-lo com os objetos que as representam: as fórmulas. Esta será a primeira abordagem que estudaremos. A seguir veremos uma maneira indireta de se atribuir probabilidades às proposições que se dá em um contexto semântico de mundos possíveis.

Probabilidades sobre Fórmulas - Linguagens Proposicionais

Usando as *valorações veritativas*, podemos agrupar as fórmulas em classes de equivalência. Duas fórmulas estarão na mesma classe se tiverem o mesmo valor para cada valoração veritativa possível. A classe das tautologias ($[1]$) será o elemento máximo e a classe das falsidades ($[0]$) será o elemento mínimo.

Interpretando os conectivos lógicos como operadores sobre o conjunto das classes de equivalência, temos tudo o que é necessário para caracterizar uma álgebra. Na verdade trata-se de uma Álgebra de Boole.

Esta álgebra tem estrutura suficiente para suportar a definição de uma medida de probabilidade.

Seja μ tal que

- $\mu([1]) = 1$,
- Se $[\alpha \wedge \beta] = 0$, então $\mu([\alpha \vee \beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$.

A probabilidade de uma fórmula ϕ da linguagem será simplesmente $\mu(\phi)$.

Probabilidades sobre fórmulas são generalizações das valorizações de verdade binárias normais. Ou seja, o raciocínio dedutivo tradicional pode ser modelado pela atribuição de probabilidade.

Se olharmos as fórmulas de um conjunto como premissas, sabemos que qualquer valoração **v** que satisfaça estas fórmulas também vai satisfazer às fórmulas derivadas. Do ponto de vista da probabilidade acontece o mesmo. Toda função de probabilidade que atribua o valor um às premissas também o fará para as deduções.

As funções de probabilidade são generalizações, já que podem atribuir probabilidades não extremas a uma fórmula. O que não se pode fazer com as valorações veritativas binárias.

Probabilidades sobre Fórmulas - Linguagens de 1^a ordem

Agora temos que enfrentar o agravante da quantificação. Podemos dirimir esta dificuldade primeiro definindo uma medida de probabilidade para o sub-conjunto proposicional da lógica de 1^a ordem e depois estendendo a função de probabilidade para as fórmulas quantificadas.

A probabilidade de uma fórmula quantificada pode ser definida assim:

$$\mu\big(\exists x \phi(x)\big) = \mathsf{sup}\big\{\ \mu\big(\textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \phi(a_i)\big);\quad \{a_1, ...\} \in \mathcal{D}\ \big\},$$

Considerando $\mathcal{D}$ como o domínio do discurso e sup a função supremo definida sobre o conjunto das partes de $\mathcal{D}$. A probabilidade de uma fórmula quantificada é o limite das probabilidades das suas possíveis instâncias.

Crítica

Este método fornece uma semântica alternativa para lógicas usando probabilidade no lugar de valorações veritativas binárias. Contudo, a maneira como as probabilidades são estabelecidas leva a uma separação entre probabilidade e as fórmulas. Isto é, as probabilidades são definidas sobre a linguagem mas esta em si não foi estendida. Assim, não se pode fazer referência às probabilidades na linguagem. As probabilidades estão no nível semântico, não há acesso a elas no nível sintático.

"É racional que um agente tenha em mente restrições probabilísticas. Por exemplo, podemos pensar que a asserção representada pela fórmula α seja tão provável quanto a asserção representada pela fórmula β. Caso novas informações aumentem nossa crença em α, esperamos que nosso grau de crença em β também cresça. Se quisermos modelar este tipo de raciocínio precisamos de linguagens que sejam capazes de expressar restrições probabilísticas. Isto é, precisamos de uma linguagem que não apenas expresse as asserções que formam a crença do agente, mas que seja também capaz de expressar suas restrições probabilísticas nestas crenças. O método de probabilidades sobre fórmulas não possui esta capacidade; não estende a expressividade da linguagem"[Bac93].

Probabilidades sobre mundos possíveis

É possível se distribuir uma medida de probabilidade sobre o corpo formado pelos conjuntos de valorações da linguagem. Estas diferentes intrerpretações podem ser vistas como sendo diferentes mundos possíveis. Cada mundo possível atribui um valor veritativo a todas as fórmulas da linguagem, e o conjunto das fórmulas **verdadeiras** varia de um mundo para outro. Se uma fórmula é **verdade** num certo mundo possível, dizemos que este mundo *satisfaz* à fórmula.

Com uma distribuição de probabilidade sobre o corpo dos conjuntos de mundos possíveis definida, podemos atribuir uma probabilidade a cada fórmula da linguagem. A probabilidade de uma fórmula será a probabilidade do conjunto de mundos possíveis que a satisfazem.

Exemplo 1 *Seja uma linguagem com apenas duas letras proposicionais A e B. Considere A^u como a interpretação de A. Os mundos possíveis são:*

$w_1 : A^u = \textbf{verdade}, \ B^u = \textbf{verdade}$
$w_2 : A^u = \textbf{verdade}, \ B^u = \textbf{falso}$
$w_3 : A^u = \textbf{falso}, \ B^u = \textbf{verdade}$
$w_4 : A^u = \textbf{falso}, \ B^u = \textbf{falso}$

Se aplicarmos como medida de probabilidade a *Distribuição Uniforme* temos

$$\mu(w_i) = 1/4 \qquad\qquad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Calculando a probabilidade de algumas fórmulas:

• $\alpha = A$,

$Prob(\alpha) = \mu(\{w_1, w_2\}) = \mu(\{w_1\}) + \mu(\{w_2\}) = 1/2$

• $\alpha = A \vee \neg B$,

$Prob(\alpha) = \mu(\{w_1, w_2, w_4\}) = \mu(\{w_1\}) + \mu(\{w_2\}) + \mu(\{w_4\}) = 3/4$ União disjunta de três conjuntos unitários.

• $\alpha = A \wedge B$,

$Prob(\alpha) = \mu(\{w_1\}) = 1/4$.

Não especificamos o valor veritativo, ou a probabilidade, de cada fórmula. O que fazemos são asserções na linguagem e então procuramos suas conseqüências lógicas. Na essência, estamos IMPONDO restrições aos mundos possíveis; isto é, estamos restringindo o conjunto de mundos possíveis a conter apenas aqueles que satisfazem às asserções que fizemos. Quando procuramos pelas conseqüências dedutivas das nossas asserções estamos procurando por fórmulas adicionais que são satisfeitas neste conjunto restrito de mundos possíveis.

Podemos manter o mesmo conceito quando usamos probabilidades. Em vez de especificar a probabilidade de cada mundo possível podemos especificar certas restrições probabilísticas na distribuição de probabilidades sobre os mundos possíveis. Por exemplo, se especificarmos $Prob(A) > 3/4$ e $Prob(B) > 3/4$ qual será a probabilidade de $A \wedge B$?

Exemplo 2 *O conjunto de mundos que satisfaz A é $\{w_1, w_2\}$, o conjunto de mundos que satisfaz B é $\{w_1, w_3\}$ e o conjunto de mundos que satisfaz $(A \wedge B)$ é $\{w_1\}$.*

As restrições especificam que ambos $\mu(\{w_1, w_2\})$ e $\mu(\{w_1, w_3\})$ são maiores que $\frac{3}{4}$, e temos que $\mu(\{w_1, w_2, w_3\}) \leq 1$. Destas restrições é facil ver que que $\mu(\{w_1\}) > 1/2$.

Temos também que:

$$\mu(\{w_1, w_2, w_3\}) = \mu(\{w_1, w_2\}) + \mu(\{w_1, w_3\}) - \mu(\{w_1\})$$

Assim as restrições dizem que $\mu(\{w_1, w_2\}) \leq 1/4$.

2.3 Lógica Probabilística para probabilidades proposicionais.

Probabilidades proposicionais são probabilidades atribuidas a proposições. Um exemplo de seu emprego é apresentado por Fahien Bacchus em [Bac93]. Trata-se de uma extensão da lógica de primeira ordem tradicional com um operador probabilístico que é usado para denotar a probabilidade de uma fórmula. É acrescentado à linguagem um segundo domínio referente aos termos e predicados que descrevem as relações numéricas.

O operador probabilístico gera termos numéricos. Funções de probabilidade tradicionalmente têm imagem real; isto significa que os termos que denotam as probabilidades na verdade denotam números reais. Para tarabalhar com tais probabilidades é necessário desenvolver uma lógica que manipule os reais.

2.3.1 Sintaxe

A sintaxe é estendida para permitir fórmulas que fazem afirmações sobre os termos numéricos, notadamente os termos gerados pelo operador probabilístico.

ALFABETO

a) Variáveis objeto x, y, ...

b) Constantes objeto c_i.

c) Símbolos funcionais f, g, h, ...

d) Símbolos predicativos P, Q, R, ...

a) Conectivos $\wedge$ e $\neg$

b) O quantificador $\forall$

a) O operador probabilístico $Prob$

REGRAS DE FORMAÇÃO

Termo

a) Variáveis e constantes são termos.

b) Funções aplicadas a termos são termos.

Fórmula

a) Predicados aplicados a termos são fórmulas

b) $\neg\alpha$ é uma fórmula.

c) $\alpha \wedge \beta$ é uma fórmula.

d) $\forall x(\alpha)$ é uma fórmula.

Termo Numérico

a) Variáveis e constantes numéricas são termos numéricos.

b) Funções numéricas aplicadas a termos numéricos são termos numéricos.

c) $Prob[\alpha]$ é um termo numérico.

Fórmulas Numéricas

a) Predicados numéricos aplicados a termos numéricos são fórmulas numéricas.

EXTENSÃO DA SINTAXE

Algumas definições são necessárias, como uma abreviação para a certeza:

$$\mathsf{cert}(\alpha) \quad =_{def} \ < \mathsf{prob}(\alpha) = 1 >$$

e uma para incluir na linguagem a probabilidade condicional

$$\mathsf{prob}(\beta) \neq 0 \rightarrow \mathsf{prob}(\alpha|\beta)x\mathsf{prob}(\beta) = \mathsf{prob}(\alpha \wedge \beta) \wedge |trabalha\_duro(Pedro)) > c$$

2.3.2 Semântica

Definiremos a seguir a estrutura que será usada para interpretar as fórmulas da linguagem.

$$M = \left\langle \mathcal{O}, S, \mathcal{V}, \mu \right\rangle$$

Onde

a) $\mathcal{O}$ é um conjunto de indivíduos representando objetos do domínio que se quer descrever na lógica. É o domínio do discurso.

b) S é um conjunto de estados ou mundos possíveis.

c) $\mathcal{V}$ é uma função que associa uma interpretação da linguagem a cada mundo.

d) μ é uma função de probabilidade discreta em S. μ mapeia os elementos de S no internalo real [0,1] tal que $\sum_{s \in S} \mu(s) = 1$

2.3.3 Interpretação das fórmulas

Uma valoração veritativa é definida sobre as fórmulas usando a interpretação atribuida a cada mundo por $\mathcal{V}$. Esta interpretação fornece um valor veritativo para as fórmulas atômicas da linguagem, e para o resto das fórmulas, é atribuido um valor veritativo recursivamente.

A interpretação é padrão menos para os termos numéricos: para cada fórmula α, o termo criado pelo operador de probabilidade $Prob(\alpha)$ tem a seguinte interpretação:

$$(Prob(\alpha))^{(M,v)} = \mu\{s' \in S : (M', s', v)\alpha\}$$

2.3.4 Exemplos de representação

Asserções de probabilidade proposicionais são mais naturalmente vistas como assersões sobre a crença de um certo agente. Portanto esta lógica é indicada para representar asserções sobre o grau de crença que se pode ter em várias proposições. Já que é normal um agente possuir apenas informação incompleta sobre seu mundo, o modelo oferece uma coleção de mundos possíveis. Embora cada um destes mundos represente uma descrição diferente do mundo real, qualquer um deles pode ser a descrição correta.

Neste modelo probabilístico há um refinamento: não apenas temos uma coleção de mundos possíveis mas também uma distribuição de probabilidades sobre eles. Isto modela a preferência por certos mundos na hora de escolher uma descrição do mundo real.

O grau de crença do agente numa proposição em particular é então determinado por quão provável ele pensa ser o conjunto de mundos possíveis que satisfazem a proposição.

Exemplo de proposição afirmando crença:

Exemplo 3 (Grau de crença (a)) *"Pedro provavelmente tem algum tipo de câncer"*

$$\mathsf{prob}(\exists(x) tem\_tipo\_de\_câncer(Pedro, x)) > 0.5$$

Esta fórmula diz que, no atual estado de crença subjetivo do agente a probabilidade do conjunto de mundos que satisfazem $(\exists(x) tem\_tipo\_de\_câncer(Pedro, x))$ é maior que 0.5.

Observação

Deve-se notar que, como não fazemos restrições sobre a distribuição de probabilidade na estrutura semântica, é bem possível que esta fórmula seja satisfeita numa quantidade *numericamente* minoritária de mundos. O que é importante aqui não é o número de mundos mas a probabilidade do conjunto destes mundos. Se cada mundo tem uma probabilidade igual então a maioria probabilística corresponderá à maioria numérica. O problema é que maioria numérica não faz sentido quando passamos a uma quantidade infinita de mundos assim como também não faz sentido atribuir uma probabilidade igual a cada mundo.

Exemplo 4 (Probabilidade Condicional)

$$\forall x \mathsf{prob}(pássaro(x)) > 0 \rightarrow \mathsf{prob}(voador(x)|pássaro(x)) > 0.75$$

Esta fórmula diz que, se formos modificar nossa crença baseados apenas na evidência de x ser de fato um pássaro devemos ter então, para cada pássaro um alto grau de crença dele ser um voador.

Note contudo que esta fórmula nada diz sobre qual será nossa crença se no futuro fizermos o condicionamento baseados em novas informações sobre x. Por exemplo ela não implica que $\mathsf{prob}(voador(x)|pássaro(x)) \wedge pingüim(x)) > 0.75$.

Uma limitação do condicionamento baseado em novas evidências é que o agente não pode fazer o condicionamento em uma nova evidência que ele sabe ser falsa. Por exemplo, se o grau de crença em $\neg(pássaro(a))$ é 1, isto é, $cert(\neg(pássaro(a))$, então ele não pode basear o condicionamento sobre a nova evidência $pássaro(a)$. O condicionamento não funciona se a nova evidênçia é diretamente contradita pela atual crença. Este é o motivo pelo qual precisamos do antecedente $\mathsf{prob}(pássaro(x)) > 0$ na fórmula acima.

Exemplo 5 (Grau de crença (b))

Outra possível aplicação desta lógica probabilística é a representação de algumas nuances das declarações condicionais. Por exemplo: considere a proposição "*Parece que Pedro terá sucesso se ele trabalhar duro*". Quem acreditar nesta proposição tem duas representações possíveis para sua crença:

(a) $\mathsf{prob}(sucesso(Pedro)|trabalha\_duro(Pedro)) > c$

(b) $\mathsf{prob}(trabalha\_duro(Pedro)) \rightarrow (sucesso(Pedro)) > c$

Onde c é uma constante numérica que representa um grau de crença maior que 0.5.

A implicação material (b) é verdade para um agente que tem um alto grau de crença que Pedro vai ter sucesso se ele trabalhar duro, mas também é verdade para um agente que tem um alto grau de crença que Pedro não vai trabalhar duro: (b) é equivalente à fórmula $\neg trabalha\_duro(Pedro) \vee sucesso(Pedro)$, e a partir daí o agente terá de qualquer maneira um alto grau de crença na implicação e na fórmula $\neg trabalha\_duro(Pedro)$.

A representação como uma probabilidade condicional (a) é a que melhor representa a conexão entre os hábitos de trabalho de Pedro e seu sucesso. Ela não é afetada pelo grau de crença do agente em $\neg trabalha\_duro(Pedro)$, a menos que o grau de crença do agente nesta asserção seja total. Note, porém que pela nossa definição de probabilidade condicional se $Prob(sucesso(Pedro)/trabalha\_duro(Pedro)) > 0$ é verdade a partir do conhecimento disponível então $Prob(\neg trabalha\_duro(Pedro)) < 1$.

Axiomas de Probabilidade

Prob1) $Prob(\alpha) \geq 0$

Prob2) $Prob(\alpha) + Prob(\neg\alpha) = 1$

Prob3) $Prob(\alpha \wedge \beta) + Prob(\alpha \wedge \neg\beta) = Prob(\alpha)$.

Prob4) $\alpha \rightarrow Prob(\alpha) = 1$.

Prob5) $\forall Prob(\alpha) = 1 \rightarrow Prob(\forall\alpha) = 1$.

Regras de Inferência

MP) De α e $\alpha \rightarrow \beta$, inferimos β (Modus Ponens).

UG) De α inferimos $\forall x.\alpha$ (Generalização Universal).

PE) De $\alpha \equiv \beta$, infira $P(\alpha) = P(\beta)$ (Probabilidade de Equivalentes).

Crítica

Esta lógica naturalmente não é completa, é o preço que se paga por trazer em seu bojo a aritmética.

A idéia básica usada nesta lógica, atribuir valores a proposições, é bem fundada mas seu uso indiscriminado é reprovável, pois todas as fórmulas da linguagem são passíveis de ter sua possibilidade medida. As fórmulas que forem derivadas terão medida igual a 1, tudo bem, isto corresponde à valoração clássica, mas o que significa medir o peso de uma fórmula da qual não conhecemos nehuma evidência? No capítulo 3 apresentamos uma semântica para a lógica LEI que resolve esta questão.

Capítulo 3

Raciocínio e Decisão

Se a realidade é inatingível,
O véu que dela nos separa não é,
A ele temos acesso e podemos lhe modificar a textura.

Usando o sistema formado pela lógica default IDL e sua base monotônica LEI podemos obter extensões contendo simultaneamente $\alpha?$ e $\neg(\alpha?)$. Quando novas evidências se tornarem disponíveis é pemitido voltar atrás e eliminar uma destas fórmulas. Mas o que acontece quando uma escolha é inadiável e não podemos esperar o fluxo dos acontecimentos? A possibilidade de tal situação fica clara em [PB91]:

"Pode perfeitamente acontecer duas conclusões parciais opostas tendo igual direito de ser alcançadas, ou pode acontecer, mesmo sem uma perfeita simetria, do conhecimento disponível não conduzir a uma decisão clara em favor de uma das alternativas ".

O *raciocínio* sobre o conhecimento disponível já foi feito. Agora é hora de decisão. Podemos utilizar o cálculo das probabilidades como um auxílio neste momento.

Como utilizar o cálculo das probabilidades em decisões num contexto lógico? Na construção de sua lógica indutiva Carnap [Car63] sugere regras a serem usadas se desejamos tomar decisões racionais com a ajuda dos valores de probabilidade.

Regra R_1. Considere que os eventos altamente prováveis vão ocorrer.

Regra R_2. Diante de várias opções aja na expectativa daquela com maior probabilidade.

Estas duas regras simples serão nossos guias quando finalmente atribuirmos medidas às proposições refutáveis de LEI.

Outro conselho dado nesta mesma obra, *"Agir racionalmente é aprender com a experiência e tomar como evidência aquilo que se observou, ... devemos portanto tomar como base* **toda** *a evidência disponível"* já é observado na lógica default IDL.

3.1 Medida intra-lógica

A idéia é comparar duas fórmulas por meio de suas probabilidades. Mas como descrever, em linguagem proposicional, o que seria a probabilidade de uma fórmula? Isto pode ser feito mas não sem preço; teríamos que introduzir no alfabeto um operador cujo parâmetro seria uma fórmula. E o comportamento deste novo operador? Ora, dada sua natureza ele seria um predicado, porém existe a possibilidade de fazermos dele um construtor de termos.

Se aceitassemos este pequeno acréscimo na sintaxe, poderíamos também aceitar sua contrapartida na semântica. Os novos termos seríam *numéricos* pois ao operador especial será associada uma medida, o que nos leva a uma linguagem *bitipada* com um *tipo* sendo usado para o domínio do qual queremos falar e o outro específico para os termos numéricos.

Todas estas conçessões nos afastariam da lógica proposicional que é nossa matéria prima portanto aplicaremos a medida fora da linguagem.

3.2 Medida Meta-lógica

A outra opção é deixarmos a medida no nível meta-lógico. Nada de interferência na sintaxe e os "termos probabilísticos" existirão apenas fora da linguagem. Estes termos são representada pelo símbolo [ ]. A medida de uma fórmula α por exemplo será escrita $[\alpha]$. Acrescentaremos uma medida aos elementos que definem uma valoração veritativa para LEI.

3.3 Quantificação de LEI

É certo que LEI já possui sua semântica bem definida, possui mesmo duas versões, uma semântica de valorações [PB91] e uma de mundos plausíveis[Mar97], mas se queremos capturar o significado do *grau de crença* em uma proposição, devemos ser capazes de interpretar o que é a medida de uma fórmula. Podemos fazê-lo com um mínimo de intromissão na semântica já existente.

A semântica de valorações de LEI conta com um conjunto suporte $\mathcal{C}$ e com a definição das funções V, v_{max} e v_{min}. Veja seção 2.2.3.

Para podermos atribuir sentido aos termos numéricos usaremos uma medida que, acrescentada às definições acima, dará luz a uma *Quantificação de LEI*.

Definição 2 (Quantificação de LEI $\mathcal{Q}$**)** $\mathcal{Q} = \{V, \mathcal{C}, \mu\}$

$\mathcal{Q}$ é uma quantificação para $\mathcal{L}_?$ obtida a partir de uma valoração para LEI pelo acréscimo de uma medida.

V é uma valoração para LEI, $\mathcal{C}$ seu conjunto suporte e μ é uma função de probabilidade discreta sobre o conjunto das partes de $\mathcal{C}$. A função μ mapeia os elementos de $2^{\mathcal{C}}$ no intervalo real [0,1], tal que $\sum_{s\in\mathcal{C}} \mu(s) = 1$.
Como cada elemento de $\mathcal{C}$ representa um ponto de vista, na verdade estaremos medindo o peso das opiniões que aceitam como verdadeira uma certa fórmula.

A função μ mapeia os elementos de $2^{\mathcal{C}}$ no intervalo real [0,1].

Assumindo que um agente saiba calcular o peso a ser atribuído a cada valoração do conjunto $\mathcal{C}$ e independente da maneira de obtenção destes pesos, estamos interessados em como utiliza-los; desejamos formular uma regra que diga ao agente como tomar decisões com a ajuda dos valores de probabilidade, se ele quer que sua decisão seja racional. ...

Vale lembrar o que diz Carnap, numa leda comparação entre lógica e outras disciplinas, sobre a aplicação da lógica indutiva:

"A lógica indutiva em si mesma não é responsável pela aplicação prática de seus teoremas, não mais do que a aritmética pura seja relacionada com a aplicação de teoremas aritméticos no planejamento de um orçamento familiar, ou a geometria pura com a aplicação dos teoremas geométricos na navegação"[Car63].

3.4 Semântica do meta operador [ ].

Wittgenstein, no único e famoso livro[Wit61] que publicou em vida, afirma: "Uma proposição não é nem provável nem improvável. Um fato acontece ou não". O que aparentemente joga um balde de água fria na pretensão de se associar medidas de probabilidade às fórmulas de uma linguagem. Felizmente, quando dizemos que a medida de uma fórmula é maior que zero e menor que um, estamos nos referindo à quantidade de crença que temos na proposição representada pela fórmula e não à proposição que, em si, continua sendo apenas verdadeira ou falsa. Aplicaremos a medida de modo que as fórmulas com valor intermediário serão apenas aquelas interrogadas e que se referem ao nosso conhecimento e não à realidade.

Introduzimos um meta operador que recebe como parâmetro uma fórmula de LEI e a associa a um termo numérico; será representado por [ ]. A sublinguagem clássica de LEI recebe tratamento tradicional, todos os teoremas da lógica clássica valem para as fórmula de LEI sem interrogação. O operador [ ] foi concebido para, simultaneamente, respeitar este preceito e ainda assim ter sua semântica aplicada à linguagem como um todo,

As fórmulas plausíveis terão seu significado atribuido propriamente e a medida das fórmulas irrefutáveis coincidirá com sua valoração em LEI.

Naturalmente encontramos fórmulas plausíveis contendo subfórmulas irrefutáveis e seu significado será transferido para a parte epistêmica da fórmula, respeitando as condições de verdade da parte material e o significado dos conectivos.

3.4.1 Critérios de Adequação

A interpretação dos termos numéricos será feita associando-lhes uma medida. Como estes termos representam a plausibilidade de uma fórmula, é necessário que esta medida se adeqüe à semântica de LEI. Elaboramos então critérios que guiarão o desenho da *interpretação probabilística*.

1. A medida de uma fórmula irrefutável corresponde a seu valor veritativo.
2. As fórmulas falsas devem ter medida nula. E vice versa.
3. As fórmula verdadeiras têm medida positiva. E vice versa.
4. Fórmulas equivalentes não têm necessariamente medidas iguais. E vice versa.
5. Numa implicação material, a medida do antecedente é inferior ou igual à do conseqüente.

Em símbolos, temos:

1. $[\alpha] = V(\alpha)$ se α não contém ?
2. $V(\alpha) = 0 \Leftrightarrow [\alpha] = 0$
3. $V(\alpha) = 1 \Leftrightarrow [\alpha] \neq 0$
4. $\alpha \equiv \beta \not\Rightarrow [\alpha] = [\beta]$

   $[\alpha] = [\beta] \not\Rightarrow \alpha \equiv \beta$
5. $\alpha \rightarrow \beta \Rightarrow [\alpha] \leq [\beta]$

3.4.2 Medida de uma Fórmula Plausível - Intuição

A análise será guiada pela parte irrefutável da fórmula. Uma vez observadas as condições de verdade das subfórmulas livres de ?, a plausibilidade da sentença completa será função de sua parte epistêmica.

Como encarar, por exemplo, uma fórmula do tipo:

$$(A? \square B)$$

onde $\square$ é um conectivo binário?. Procure *indícios* da verdade da fórmula material associada. Neste caso procuramos pelas *condições* sob as quais $(A \square B)$ seria verdadeira.

A fórmula $(A? \square B)$ é uma evidência[1] de $(A \square B)$ e a incerteza se localiza em $A?$.

Por exemplo considere a fórmula $(A? \wedge B)$ como uma evidência de $(A \wedge B)$. Se B for o caso (no mundo atual), tudo recai sobre a evidência de A, *e.g.* $A?$.

E a plausibilidade de

$$(A? \wedge B)$$

se resume à plausibilidade de A. Se B não for o caso, a sentença toda é falsa e, naturalmente, sua plausibilidade é nula.

Assim,

$$[(A? \wedge B)] = \begin{cases} [A?], & \text{se } B \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$

[1]É mesmo ?. E o problema de várias fórmulas epistêmicas serem evidência de uma mesma fórmula material ? Não há problema. Como as fórmulas plausíveis representam evidências, é racional que tenhamos diferentes indícios de uma mesma sentença.

3.5 Probabilidade x Plausibildade

Duas negações convivem no universo da lógica epistêmica LEI. Uma se comporta classicamente e a probabilidade tradicional captura seus efeitos. Mas a outra se afasta do conceito tradicional por não obedecer ao axioma de Kolmogorov: "A medida da negação é o complemento da medida". Como não podemos esperar da negação epistêmica outro comportamento, concluímos que a teoria da probabilidade não é adequada para medir este tipo de negação paraconsistente.

Desenvolveremos um cálculo para aferir a plausibilidade detectada pela semântica de LEI.

3.6 A medida de proposições epistêmicas

A plausibilidade de uma fórmula é função das valorações veritativas clássicas. Precisamos compreender como elas definem a verdade epistêmica para identificar como geram a medida de uma fórmula. A plausibilidade é a medida dos conjuntos de valorações clássicas que pesam a favor desta fórmula.

Enquanto o valor veritativo epistêmico se apóia diretamente no conjunto C, a plausibilidade não pode fazer o mesmo sob pena de confundir certas medidas. Por exemplo não distinguiríamos entre a *evidência da conjunção* e a *conjunção das evidências*[2].

Além do mais, não obteríamos a medida de um fórmula a partir das medidas das suas subfórmulas.

O cálculo da verdade epistêmica é existencial. Uma vez identificada uma condição suficiente interrompemos a análise e respondemos positivamente. Com a plausibilidade devemos ir além, identificando e computando todas as condições suficientes. Para isso o conjunto C limpo e seco não basta, é necessário agrupar seus elementos em estruturas capazes de representar como as valorações clássicas tornam verdadeira uma fórmula.

[2] $(\alpha \wedge \beta)?$ e $(\alpha? \wedge \beta?)$.

3.6.1 Árvores e valorações

É fundamental que possamos conhecer a plausibilidade de uma fórmula a partir de suas subfórmulas, por isso usaremos uma estrutura recursiva, a árvore, para representar os grupos de valorações. A aridade máxima dos conectivos de LEI é dois, logo as árvores serão binárias. Os nós das árvores representarão os conectivos e as folhas serão valorações veritativas clássicas, pois estes são os objetos que definem a verdade epistêmica.

Definição 3 (Árvore de valorações Λ_α) *É uma árvore binária cujos nós são conectivos e cujas folhas são valorações de verdade.*

Uma árvore de valorações Λ_α é sempre associada a uma fórmula α pois é gerada a partir da árvore semântica de α substituindo-se suas folhas (átomos) por valorações clássicas.

Note que podem existir várias árvores de valorações para uma mesma fórmula !

Definição 4 (Árvore aceitável λ) *Dizemos que uma árvore λ é aceitável com relação à fórmula α, escrito $\lambda \models\!\!\!\equiv \alpha$ quando o conjunto de suas folhas (valorações clássicas) serve de base a uma nova valoração de verdade de LEI na qual α é verdade.*

3.6.2 Valorações e plausibilidade

A verdade em LEI é a síntese maximal de diferentes pontos de vista. Identificando quais grupos de pontos de vista tornam verdadeira uma proposição podemos quantificar sua plausibilidade.

Sendo n o número de átomos de α, construiremos as árvores de valorações associadas e verificaremos quais são aceitáveis com relação a α. Os grupos de pontos de vista que pesam a favor de α são os conjuntos de valorações correspondentes a estas árvores. A plausibilidade será uma medida distribuida sobre o conjunto das partes das árvores.

Não vamos inspecionar o conjunto $\mathcal{C}_n$ em busca das "boas" árvores. Definiremos uma função capaz de gerá-las. Mostraremos que as árvores geradas pela *função de captação* são todas boas e nenhuma outra o é. Explicando: a função de captação aplicada à formula α gera todas as árvores de valorações aceitáveis com relação a α.

3.7 Grau Epistêmico

Quando procuramos o valor veritativo de uma fórmula em LEI consultamos um certo número de vezes o conjunto de valorações clássicas V. Por exemplo se analisamos a fórmula $(A? \vee B?)$ temos que varrer $\mathcal{C}$ em busca de responder uma indagação acerca de $A?$ e depois de maneira independente proceder do mesmo modopara $B?$. Note que esta procura no caso da fórmula $(A \vee B)?$ se faz de uma só tacada. O tipo de consulta e o conseqüente nível epistêmico depende da forma da fórmula. A construção das *funções de captação* leva em conta esta diferença por isso apresentamos uma função que a represente numericamente.

Definição 5 (Grau Epistêmico)} *g_e: $L \rightarrow N$ Representa o tipo de consulta feito ao conjunto suporte de uma valoração de LEI quando se determina a verdade de uma fórmula.*

1. *$g_e(\alpha)$ = 0 se α não possui ?.*
2. *$g_e(\alpha?) = g_e(\alpha) + 1$.*
3. *$g_e(\sim \alpha) = g_e(\neg\alpha) = g_e(\alpha)$.*
4. *$g_e(\alpha \wedge \beta) = g_e(\alpha \vee \beta) = g_e(\alpha \rightarrow \beta) = g_e(\alpha) + g_e(\beta)$.*

3.8 Função de Captação

A função de captação agrupa as valorações clássicas segundo as condições que determinam a verdade de uma fórmula. Seu desenho se associa à expressão que, na semântica de LEI, define a verdade. Da mesma maneira definiremos uma função associada à expressão que define a falsidade.

Uma proposição α em LEI é verdadeira se para *todo* ponto de vista (valoração veritativa clássica v), a valoração auxiliar v_{max} é tal que $v_{max}(\alpha) = 1$. Por outro lado, uma proposição α em LEI é falsa se *existe* valoração veritativa clássica v, tal que $v_{max}(\alpha) = 0$.

Analisando como as valorações clássicas contribuem para que as condições de verdade e falsidade se realizem descobrimos que é possível capturar grupos de valorações segundo sua contribuição.

Definiremos uma função m que, dada uma proposição, AGRUPA as valorações de verdade clássicas respeitando as condições qsegundo as quais TODA função v_{max} aplicada à proposição seria verdadeira.

Definiremos uma função m que, dada uma proposição, AGRUPA as valorações de verdade clássicas respeitando as condições segundo as quais TODA função v_{max} aplicada à proposição seria verdadeira. De modo semelhante n será uma a função que AGRUPA as valorações segundo as condições que levam à EXISTÊNCIA de uma função v_{max} que seja falsa quando aplicada à proposição. Teremos no entanto que definir funções de captação auxiliares pois em m e n faz-se apelo a outras maneiras de se agrupar as valorações veritativas.

Definição 6 (Função de Captação m) $m : L \text{ x } \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Capta as árvores aceitáveis para uma dada fórmula ϕ através da identificação das condições que fazem toda $v_{max}(\phi) = 1$.

$$m(A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(A) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$m(\neg A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall\ v(A) = 0 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$m(A?) = \{v\ ; \quad v(A) = 1\}.$$

$$m(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in m(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in m(\beta)\}.$$

A captação da disjunção se divide em três casos

caso 1 Quando $\alpha \vee \beta$ é livre de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha \vee \beta) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso 2 Quando apenas α for livre de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha) = 1 \\ m(\beta), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso 3 Quando nem α nem β forem livres de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in m(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in m(\beta)\}.$$

$$m(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in x(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in m(\beta)\}.$$

$$m(\neg\alpha) = \overline{x}(\alpha)$$

Definição 7 (Função de Captação n) $n : L \texttt{ x } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Identifica as condições que levam à existência de uma $v_{max}(\phi) = 0$.

$$n(A) = \{v\ ; \quad v(A) = 0\}.$$

$$n(\neg A) = \{v\ ; \quad v(A) = 1\}.$$

$$n(A?) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall\ v(A) = 0 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$n(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in n(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in n(\beta)\}.$$

$$n(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in n(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in n(\beta)\}.$$

$$n(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in y(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in n(\beta)\}.$$

$$n(\neg\alpha) = \overline{y}(\alpha)$$

Definição 8 (Função de Captação x) $x : L \texttt{ x } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Identifica as condições fazem toda $v_{max}(\phi) = 0$.

$$x(A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall\ v(A) = 0 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x(\neg A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall\ v(A) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x(A?) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall\ v(A) = 0 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in x(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in x(\beta)\}.$$

A captação da disjunção se divide em três casos

caso 1 Quando $\alpha \vee \beta$ é livre de ?.

$$x(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } V(\alpha \vee \beta) = 1 \\ \mathcal{C}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso 2 Quando apenas α for livre de ?.

$$x(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } V(\alpha) = 1 \\ x(\beta), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso 3 Quando nem α nem β forem livres de ?.

$$x(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in x(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in x(\beta)\}.$$

$$x(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in m(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in x(\beta)\}.$$

$$x(\neg\alpha) = m^{-}(\alpha)$$

Definição 9 (Função de Captação y) $y : L \text{ x } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Identifica as condições que levam à existência de uma $v_{max}(\phi) = 1$.

$$y(A) = \{v\ ; \quad v(A) = 1\}$$

$$y(\neg A) = \{v\ ; \quad v(A) = 0\}$$

$$y(A?) = \{v\ ; \quad v(A) = 1\}$$

$$y(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in y(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in y(\beta)\}$$

$y(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in y(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in y(\beta)\}$

$y(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in n(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in y(\beta)\}$

$y(\neg\alpha) = n^{-}(\alpha)$

Definição 10 (Função de Captação $\overline{m}$) $\overline{m} : L \text{ x } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Identifica as condições fazem toda $v_{min}(\phi) = 1$.

$$\overline{m}(A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(A) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\overline{m}(\neg A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall\ v(A) = 0 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\overline{m}(A?) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall\ v(A) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\overline{m}(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in \overline{m}(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in \overline{m}(\beta)\}$

A captação da disjunção se divide em três casos

caso 1 Quando $\alpha \vee \beta$ é livre de ?.

$$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha \vee \beta) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso 2 Quando apenas α for livre de ?.

$$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha) = 1 \\ \overline{m}(\beta), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

caso 3 Quando nem α nem β forem livres de ?.

$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in \overline{m}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{m}(\beta)\}$.

$\overline{m}(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in x(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{m}(\beta)\}$

$\overline{m}(\neg\alpha) = x(\alpha)$

Definição 11 (Função de Captação $\overline{n}$) $\overline{n} : L$ x $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Identifica as condições que levam à existência de uma $v_{min}(\phi) = 0$.

$\overline{n}(A) = \{v \; ; \quad v(A) = 0\}$

$\overline{n}(\neg A) = \{v \; ; \quad v(A) = 1\}$

$\overline{n}(A?) = \{v \; ; \quad v(A) = 0\}$

$\overline{n}(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \; ; \quad \lambda_1 \in \overline{n}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{n}(\beta)\}$

$\overline{n}(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \; ; \quad \lambda_1 \in \overline{n}(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in \overline{n}(\beta)\}$

$\overline{n}(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \; ; \quad \lambda_1 \in y(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in \overline{n}(\beta)\}$

$\overline{n}(\neg\alpha) = y(\alpha)$

Definição 12 (Função de Captação $\overline{x}$) $\overline{x} : L$ x $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Identifica as condições fazem toda $v_{min}(\phi) = 0$.

$\overline{x}(A)$ $\mathcal{C}$ se $\forall$ $v(A) = 0$

$$\overline{x}(A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall \; v(A) = 0 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\overline{x}(\neg A) = \mathcal{C}$ se $\forall$ $v(A) = 1$

$$\overline{x}(\neg A) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall \; v(A) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\overline{x}(A?) = \{v \; ; \quad v(A) = 0\}$

$\overline{x}(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \; ; \quad \lambda_1 \in \overline{x}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{x}(\beta)\}$

$\overline{x}(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \; ; \quad \lambda_1 \in \overline{x}(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in \overline{x}(\beta)\}$

$\overline{x}(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \; ; \quad \lambda_1 \in m(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in \overline{x}(\beta)\}$

$\overline{x}(\neg\alpha) = \overline{m}(\alpha)$

Definição 13 (Função de Captação $\overline{y}$) $\overline{y} : L \text{ x } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

Identifica as condições que levam à existência de uma $v_{min}(\phi) = 1$.

$$\overline{y}(A) = \{v \ ; \quad v(A) = 1\}$$

$$\overline{y}(\neg A) = \{v \ ; \quad v(A) = 0\}$$

$$\overline{y}(A?) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } \forall \ v(A) = 1 \\ \emptyset, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\overline{y}(\alpha \wedge \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \ ; \quad \lambda_1 \in \overline{y}(\alpha) \quad \text{e} \quad \lambda_2 \in \overline{y}(\beta)\}$$

$$\overline{y}(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \ ; \quad \lambda_1 \in \overline{y}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{y}(\beta)\}$$

$$\overline{y}(\alpha \rightarrow \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \ ; \quad \lambda_1 \in n(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{y}(\beta)\}$$

$$\overline{y}(\neg \alpha) = \overline{n}(\alpha)$$

3.9 Grau de veracidade x grau de falsidade

A plausibilidade de uma proposição significa a medida de sua propensão a ser verdade, porém para quantificar a verdade epistêmica precisamos considerar a propensão de uma proposição a ser falsa. Chamaremos estas propensões de grau de veracidade e grau de falsidade respectivamente.

Definição 14 {Grau de veracidade [ ]} [ ] : L x $\mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ *é a medida da verdade epistêmica. Baseia-se na função de captação m.*

$$[\alpha] = \mu\{m(\alpha)\}$$

Definição 15 {Grau de falsidade ⟦ ⟧ } [[ ]]: L x $\mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ *é a medida da falsidade epistêmica. Baseia-se na função de captação n.*

$$[\![\alpha]\!] = \mu\{n(\alpha)\}$$

Corolario 1 *A sublinguagem clássica de LEI tem medida extrema*

1. O grau de veracidade de uma fórmula clássica é extremo e coincide com os valores máximo e mínimo da álgebra de Boole.

2. O grau de veracidade de uma fórmula clássica coincide com seu valor verdade em LEI.

Formalmente temos: Se ψ é livre de ?

1. $[\psi] \in \mathbb{B}$.
2. $[\psi] = V(\psi)$.

3.10 A Plausibilidade

A plausibilidade é um conceito semântico, os elementos que a definem são os mesmos da verdade epistêmica, como vimos em 3.3 uma quantificação para LEI já contém uma distribuição de pesos para o conjunto de valorações clássicas, porém quando calculamos a plausubilidade de uma fórmula nos reportamos ao conjunto das árvores de valorações. Precisamos conhecer a distribuição de pesos para este conjunto; isto se faz estendendo a medida previamente distibuída.

O peso de uma árvore de valorações corresponde ao peso da n-úpla formada por sua folhas. As n-úplas pertencem a $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Extensão dos pesos de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Em $\mathcal{C}$ cada valoração v_i tem seu peso $p(v_i)$, em $\mathcal{C}_n$ cada n-upla $(v_i, ..., v_n)$ terá peso

$$p((v_i, ..., v_n)) = \prod_{i=1}^{n} p(v_i)$$

3.11 Exemplos

Veremos alguns exemplos de transformação de uma fórmula em sua forma normal conjuntiva, da aplicação das funções de captação e do conseqüente cálculo da plausibilidade.

Antes mostraremos um esquema de como se deve proceder.

Passos para se calcular a plausibilidade.

I - Considere n é o número de átomos de α,

Λ_n, o conjunto das árvores de valorações de tamanho n e

$\mathcal{C}_n$ é o conjunto das n-úplas com apenas n elementos.

II - Descobrir quais elementos de Λ_n "pesam a favor" de α.

Isto é feito pela função m quando aplicada a α.

III - Calcular o peso dos elementos selecionados.

A cada árvore selecionada no item anterior corresponde um $\mathcal{C}_n$. São as n-uplas cujas árvores correspondentes satisfazem α. Seu peso será calculado em relação ao conjunto $\mathcal{C}_n$.

Exemplo 6

Seja $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\alpha = A? \vee B?$. Qual é a plausibilidade de α ?

$\boxed{\text{Passo I}}$ Considere g_e é o grau epistêmico de α $g_e = 2$. $\Lambda_{g_e} =$ conj. de arvores de tmanho g_e. Como o grau epistêmico de α é 2, trabalharemos com pares de valorações, advindas de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}_2 = \{(v_i, v_j)\ ;\ i, j \in (1, 2, 3, 4)\}$.

A plausibilidade de $\alpha \wedge \beta$ ser o resultado da aplicação da função μ ao conjunto $m(\alpha \wedge \beta)$.

$\boxed{\text{Passo II}}$

Usando a definição 6 saberemos, por construção, quais dentre estas duplas "pesam a favor" de α.

Como nem $A?$ nem $B?$ sÆo livres de ? temos $m(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \ ; \quad \lambda_1 \in m(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in m(\beta)\}$.

Ou seja $m(A? \vee B?) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \ ; \quad \lambda_1 \in m(A?) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in m(B?)\}$,

mas $m(A?) = \{v_i \ ; \quad v(A) = 1\}$, ou seja $m(A?) = \{v_3, v_4\}$

e $m(B?) = \{v_j \ ; \quad v(B) = 1\}$; ou seja $m(B?) = \{v_2, v_4\}$ assim $m(A? \vee B?) = \{(v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_4, v_4)\}$.

$\boxed{\text{Passo III}}$

A plausibilidade de $[\alpha] = \mu\{m(\alpha)\}$, neste caso temos $[A? \vee B?] = \mu\{m(A? \vee B?)\}$. Supondo que sobre $\mathcal{C}$ tenhamos a seguinte distribuição de pesos,

$$p(v_1) = p(v_2) = p(v_3) = \frac{2}{9} \ \text{ e } \ p(v_4) = \frac{3}{9} \ ,$$

teremos então para $\mathcal{C}_2$:

$$p(v_4, v_4) = \frac{9}{81} \ \ p(v_4, v_i) = p(v_i, v_4) = \frac{6}{81} \ \text{ e } \ p(v_i, v_i) = \frac{4}{81} \ para \ i \in (1, 2, 3).$$

Assim $p(v_4, v_4) = \frac{9}{81}$, $\quad p(v_4, v_i) = p(v_i, v_4) = \frac{6}{81}$ e $p(v_i, v_i) = \frac{4}{81}$ para $i \in (1, 2, 3)$.

A plausibilidade de $A? \vee B?$ sera entÆo $[A? \vee B?] = \mu\{(v_3, v_2), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_4, v_4)\}$ $= \frac{4}{81} + \frac{6}{81} + \frac{6}{81} + \frac{9}{81} = \frac{25}{81}$.

Exemplo 7

Comparação entre $[A? \vee B?]$ e $[(A \vee B)?]$

Vamos considerar a mesma valoração V de LEI do exemplo 1. Qual é a plausibilidade de $(A \vee B)?$?

$g_e((A \vee B)?) = 1.$

$\boxed{\text{Passo I}}$ $n = 2$. $\Lambda_1 =$ conjunto de arvores de tamanho 1. Como grau epistêmico de $(A \vee B)?$ é 1, trabalharemos com conjuntos unitários de valorações clássicas advindas de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}_1 = \{(v_i) \ ; \ i \in (1, 2, 3, 4)\}$.

A plausibilidade de $(\alpha \wedge \beta)?$ ser o resultado da aplicação da função μ ao conjunto $m((\alpha \wedge \beta)?)$.

$\boxed{\text{Passo II}}$

Usando a definição 6 saberemos, por construção, quais dentre estas duplas "pesam a favor" de α.

$m((\alpha \vee \beta)?) = \{v_i \ ; \quad v_i(A \vee B) = 1\}$, ou seja $m(A?) = \{v_2, v_3, v_4\}$.

$\boxed{\text{Passo III}}$

A plausibilidade de $[\alpha] = \mu\{m(\alpha)\}$, assim $[(\alpha \vee \beta)?] = \mu\{m(A \vee B)?)\} = \mu\{(v_2),(v_3),(v_4)\}$ Usando a mesma distribuição de pesos do exercício 1 temos $[(\alpha \vee \beta)?] = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9}$.

Exemplo 8

Vamos calcular a plausibilidade de $\phi = (A? \wedge B) \rightarrow (C? \wedge D)?$ em relação à seguinte valoração de $LEI \ V : C = \{v_1, v_2, ..., v_8\}$. Considere também uma distribuição uniforme sobre $\mathcal{C}$. O quadro 3.1 mostra o comportamento das valorações clássicas com relação às proposições epistêmicas A,B e $\mathcal{C}$.

	A	**B**	**C**
v_1	0	0	0
v_2	0	0	1
v_3	0	1	0
v_4	0	1	1
v_1	1	0	0
v_2	1	0	1
v_3	1	1	0
v_4	1	1	1

Tabela 3.1: Valorações

Primeiro vamos reduzir ϕ à forma normal conjuntiva.

Usando a eliminação de $\rightarrow$ temos

$\sim (A? \wedge B) \vee (C? \wedge D)?$

Usando a internalização de ?, pois $C?$ é epistêmica fechada, temos

$\sim (A? \wedge B) \vee (C?? \wedge D?)$

Simplificando o ? temos

$\sim (A? \wedge B) \vee (C? \wedge D?)$

Usando a internalização de $\sim$, temos

$(\sim A? \vee \sim B) \vee (C? \wedge D?)$

Usando a lei distributiva sobre $\vee$ temos

$\big((\sim A? \vee \sim B) \vee C? \big) \wedge \big((\sim A? \vee \sim B) \vee D? \big)$

A fórmula ϕ est na forma normal conjuntiva

Agora vamos utilisar a função de captação m

$m\Big(\big((\sim A? \vee \sim B) \vee C? \big) \wedge \big((\sim A? \vee \sim B) \vee D? \big) \Big) =$

$\big(m\big((\sim A? \vee \sim B) \vee C? \big) , m \big((\sim A? \vee \sim B) \vee D? \big) \big) {}^\wedge.$ (1)

Analisando o primeiro parâmetro

$m\big((\sim A? \vee \sim B) \vee C? \big) = \big(m(\sim A? \vee \sim B), m(C?) \big) {}^\vee$ e

$m(\sim A? \vee \sim B) = (m(\sim A?), m(\sim B)) {}^\vee = (\emptyset, \emptyset) {}^\vee = \emptyset$ pois $m(\sim A?)$ e $m(\sim B))$ são ambos vazios como vemos a seguir:

$$m(\sim A?) = m(A? \to \perp) = (x(A?), m(\perp))^\vee = x(A?) = \emptyset$$

$$m(\sim B) = m(B \to \perp) = (x(B), m(\perp))^\vee = x(B) = \emptyset$$

j que nem toda $v(A)$ nem toda $v(B)$ são nulas.

Assim temos $\big(m(\sim A? \vee \sim B), m(C?) \big) {}^\vee = \big(\emptyset, m(C?) \big) {}^\vee = m(C?) = \{v; v(C) = 1\}$ $= \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$.

Analisando o segundo parâmetro

$m\big((\sim A? \vee \sim B) \vee D? \big) = \big(m(\sim A? \vee \sim B), m(D?) \big) {}^\vee$ e $m(\sim A? \vee \sim B) = (m(\sim A?), m(\sim B)) {}^\vee = (\emptyset, \emptyset) {}^\vee = \emptyset$ pois $m(\sim A?)$ e $m(\sim B))$ são ambos vazios como vemos a seguir:

$$m(\sim A?) = m(A? \to \bot) = (x(A?), m(\bot))^{\vee} = x(A?) = \emptyset$$

$$m(\sim B) = m(B \to \bot) = (x(B), m(\bot))^{\vee} = x(B) = \emptyset$$

j que nem toda $v(A)$ nem toda $v(B)$ são nulas.

Assim temos $\big(\ m(\sim A?\vee \sim B),\, m(D?)\ \big)^{\vee} = \big(\ \emptyset,\, m(D?)\ \big)^{\vee} = m(D?) = \{v; v(D) = 1\}$ $= \{v_3, v_4, v_7, v_8\}$.

Conclusão

A expressão (1) se torna então $\big(\ m\big(\ (\sim A?\vee \sim B)\vee C?\ \big),\, m\ \big(\ (\sim A?\vee \sim B)\vee D?\ \big)\ \big)^{\wedge} =$

$\big(\ m(C?),\, m(D?)\ \big)^{\wedge} = \{(v_i, v_j);\ i \in \{2,4,6,8\}$ e $j \in \{3,4,7,8\}\}$.

Distribuição de pesos

Como e, cada valoração clássica tem peso igual a um oitavo e cada par de valorações tem peso igual a um sessenta e quatro avos.

A **plausibilidade** de $\phi = (A? \wedge B) \to (C? \wedge D)?$ em relação à valoração V é $[\phi]$ $= \mu(m(\phi)) = \mu(((m(C?),\, m(D?))^{\wedge}) =$

$\frac{\#((m(C?),m(D?))^{\wedge}}{\#C^2} = \frac{16}{64}$.

Capítulo 4

Conclusão

4.1 Resultados da definição de plausibilidade

Os critérios de adequação da seção 3.4.1 são respeitados pela interpretação probabilística e estão representados nos seguintes resultados.
O primeiro critério corresponde ao corolário 1, os critérios 2 e 3 se refletem no teorema:

Teorema 1 *Uma proposição é verdadeira se, e somente se, ela é plausível*

4.1.1 A medida da negação clássica

A negação clássica se define como $\sim \alpha =_{def} (\alpha \rightarrow \bot)$
$[\sim \alpha] =_{def} [\alpha \rightarrow \bot] = \mu\{m(\alpha \rightarrow \bot)\}$ mas $m(\alpha \rightarrow \bot) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\,; \;\; \lambda_1 \in x(\alpha) \;\text{ ou }\; \lambda_2 \in m(\bot)\}$
$= \{(\lambda_1)\,; \quad \lambda_1 \in x(\alpha)\}$ logo, $\mu\{m(\alpha \rightarrow \bot)\} = \mu\{x(\alpha)\}$.

A relação entre as medidas de uma fórmula e de sua negação clássica se traduz no seguinte teorema:

Teorema 2 $[\sim \alpha] > 0$ **se e somente se** $[\alpha] = 0$

4.1.2 A medida da negação epistêmica (paraconsistente)

A medida da negação epistêmica de uma proposição é o grau de falsidade da proposição.
Em símbolos temos

$$[\neg\alpha] = [\![\alpha]\!]$$

4.1.3 A medida das Irredutíveis

Quando reduzimos as fórmulas de LEI em sua forma norma conjuntiva, podemos encontrar fórmula irredutíveis. Porém para o cálculo de suas plausibilidades estas fórmulas irredutíveis podem ser decompostas pela função m. Assim elas não são irredutíveis para c cálculo das plausibilidades. Resumindo: a medida de uma irredutível pode ser obtida a partir da medida de sua subfórmulas.

A irredutível $\sim\ \neg\alpha$ Uma fórmula sob a ação da negação clássica e da negação epistêmica, nesta ordem, é irredutível. Sua plausibilidade se obtem assim:
Primeiro lembremos que

$$\sim \neg\alpha =_{def} \neg\alpha \rightarrow \perp$$

de tal forma que $[\sim \neg\alpha] = [\neg\alpha \rightarrow \perp]$.

$[\neg\alpha \rightarrow \perp] = \mu\{m(\neg\alpha \rightarrow \perp)\}$ mas $m(\neg\alpha \rightarrow \perp) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ;\quad \lambda_1 \in x(\neg\alpha)$ ou $\lambda_2 \in m(\perp)\} = \{(\lambda_1)\ ;\quad \lambda_1 \in x(\neg\alpha)\} = \{(\lambda_1)\ ;\quad \lambda_1 \in m^-(\alpha)\}$ levando a

$$[\neg\alpha \rightarrow \perp] = \mu\{m^-(\alpha)\}$$

A irredutível $\neg \sim \alpha$ no escopo de $\neg$

Uma fórmula sob a ação das duas negações, mas na ordem inversa à do caso anterior; isto é negação epistêmica e depois negaÇão clássica, só é irredutível se estiver no escopo de outra negação epistêmica. Sua plausibilidade é assim obtida:
Analisando o caso mais simples
$\neg(\neg \sim \alpha)$ é equivalente a $\sim \alpha$).

Os outros casos onde $\neg \sim \alpha$ é subfórmula no escopo de $\neg$ são tratados normalmente pelas funções de captação.

4.1.4 A decomposição das medidas

Conseguimos obeter a medida da conjunção da disjunção e da implicação material a partir das medidas de seus componentes.

A medida da conjunção é o produto das medidas

$[\alpha \wedge \beta] = [\alpha].[\beta]$

A medida da disjunção $[\alpha \vee \beta] = [\alpha] + [\beta] - [\alpha].[\beta]$

A medida da implicação $[\alpha \longrightarrow \beta] = [[\alpha]]^{-}+[\beta]$ - $[[\alpha]]^{-}.[\beta]$

Onde $[[\alpha]]^{-}$ representa a "falsidade crédula" que é resultado da função de captação x que por sua vez captura a propensão de uma fórmula ser falsa numa visão crédula.

O que norteia a classificação *"cetico-crédulo"* é o comportamento com relacao a verdade. A classificação com relação à falsidade se dá por oposição.

4.1.5 A medida de fórmulas compostas

As propriedades desejadas em 3.4.2 (Medida de uma fórmula plausível - Intuição) se verificam na nossa definição de plausibilidade.

$$[\alpha \vee B] = \begin{cases} [\alpha], & \text{se } \neg B \\ 1, & \text{senão} \end{cases} \quad \text{e} \quad [\alpha \wedge B] = \begin{cases} [\alpha], & \text{se } B \\ 0, & \text{senão} \end{cases} \quad \text{e} \quad [\alpha \rightarrow B] = \begin{cases} 1, & \text{se } B \\ [[\alpha]]^{-}, & \text{senão} \end{cases}$$

4.2 Contribuições

A medida de proposições

O fato de LEI representar asserções epistêmicas permitiu a criação de uma interpretação probabilística que resolve o problema de se aferir valor a proposições lógicas fora do escopo booleano. O significado desta aferição é o grau de crença que se tem numa proposição uma vez que advenha da aplicação de regras default, isto é: sobre tais proposições paira a plausibilidade.

A decomposição da plausibilidade

Conseguimos reproduzir os resultados tradicionais sobre a medida da disjunção e da conjunção e ao mesmo tempo obtemos uma expressão para a medida da implicação material de uma fórmula como função das medidas das suas subfórmulas.

Generalização da semântica epistêmica

A utilização de uma medida aplicada ao conjunto das partes das valorações clássicas permite ao mesmo tempo preservar o caráter dicotômico (do sentido) das proposições clássicas e valorar as proposições epistêmicas em um leque cromático de possibilidades.

Sistemas de Decisão

Um sistema de decisão apoiado em $IDL-LEI$ é mais expressivo e possui maior alcance que um sistema baseado em lógica clássica, porém possui seus limites e a interpretação probabilística aqui apresentada permite que um sistema nela baseado vá um passo além em casos como o citado no início do capítulo 3.

4.3 Trabalhos Futuros

No apêndice B apresentamos a base do desenvolvimento teórico da quantificação para a versão de primeira ordem de LEI. Apresentamos uma alternativa para o conceito tradicional de estrutura, e mostramos como se faz a interpretação dos termos e fórmulas numéricos.

A lógica da inconsistência epistêmica LEI pode ser usada como "máquina" de inferência em sistemas especialista que destinados a tratar a inconsistência; a *quantificação* de LEI deve ser usada no bojo de um sistema assim como a ferramenta que dá, em certos casos críticos, a palavra final quando de uma decisão.

Capítulo 5

Provas

5.1 Introdução

Considerando o processo de redução de qualquer fórmula de LEI para sua forma normal conjuntiva, as provas ficam assim:

1. Verificar para os casos de base. A, $\neg A$, $A?$ e $\sim\neg A$
2. Hipótese de Indução.
3. Verificar para $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$ e $\sim\neg\alpha$

5.2 Notação

Com o objetivo de tornar as provas mais legíveis vamos adotar algumas convenções na notação.

$m(\alpha\wedge\beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ;\ \ \lambda_1 \in m(\alpha)\ \text{ e }\ \lambda_2 \in m(\beta)\}$ será abreviado como $\big(m(\alpha),\ m(\beta)\big)^{\wedge}$.
$m(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ;\ \ \lambda_1 \in m(\alpha)\ \text{ ou }\ \lambda_2 \in m(\beta)\}$ será abreviado como $\big(m(\alpha),\ m(\beta)\big)^{\vee}$.
$m(\alpha \to \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ;\ \ \lambda_1 \in x(\alpha)\ \text{ ou }\ \lambda_2 \in m(\beta)\}$ será abreviado como $\big(x(\alpha),\ m(\beta)\big)^{\vee}$.

5.2.1 Equivalência entre conjuntos de árvores de valorações

Diremos que dois conjuntos de árvores de valorações são equivalentes quando suas medidas forem iguais. Usaremos por enquanto o símbolo $=_{eq}$. Exemplos

$\big(m(\alpha),\ \emptyset\big)^{\vee} =_{eq} m(\alpha)$
$\big(m(\alpha),\ \mathcal{C}\big)^{\wedge} =_{eq} m(\alpha)$

Teorema 3 **Se $[\alpha] > 0$ então $V(\alpha) = 1$**

Casos de Base

- A

Como $[A] > 0$, $\mu\{m(A)\} > 0 = m(A) \neq \emptyset$ ou seja $m(A) = \mathcal{C}$ e consequentemente todo $v_{max}(A) = 1$ o que leva a $V(A) = 1$, por definição. Ok.

- $A?$

Como $m(A?) = \{v; v(A) = 1\} \neq \emptyset$ existe $v‘$ tal que $v‘(A) = 1$ logo $v‘_{max}(A?) = 1$ e por definição para toda v, $vmax(A?) = 1$ também. Assim $V(A?) = 1$. Ok.

- $\neg A$

Como $m(\neg A) \neq \emptyset$ para toda v, $v(A) = 0$ ou seja para toda v, $v_{min}(A) = 0$ e por definição $v_{max}(\neg A) = 1$. Assim $V(\neg A?) = 1$. Ok.

- $\sim \neg A \qquad \sim \neg A =_{def} \neg A \rightarrow \bot$

Como $m(\neg A \rightarrow \bot) = x(\neg A) = \overline{m}(A) \neq \emptyset$, $\overline{m}(A) = \mathcal{C}$ e para toda v, $v(A) = 1$

Ou seja toda $v_{max}(\neg A) = 0$,

para toda v, $\{v_{max}(\neg A) = 0$ ou $v_{min}(\bot) = 1\}$ que é suficiente para termos todo $v_{max}(\neg A \rightarrow \bot) = 1$, $V(\neg A \rightarrow \bot) = 1$.

Hipótese de Indução

Considere α e β tais que

Se $[\alpha] > 0$ então $V(\alpha) = 1$ e se $[\beta] > 0$ então $V(\beta) = 1$.

Conclusão

• $\sim \neg\alpha \qquad \sim \neg\alpha =_{def} \neg\alpha \to \bot$

Como $m(\neg\alpha \to \bot) = x(\neg\alpha) = \overline{m}(\alpha) \neq \emptyset$, temos pelo lema 4 que, para toda v, $v_{min}(\alpha) = 1$. Ok.

• $\alpha \wedge \beta$

$m(\alpha \wedge \beta) = \big(m(\alpha), m(\beta)\big)^{\wedge} \neq \emptyset$, ambos $m(\alpha)$ e $m(\beta)$ são diferentes de vazio. Por hipótese de indução $V(\alpha) = 1$ e $V(\beta) = 1$. Assim temos para toda v, $v_{max}(\alpha) = 1$ e $v_{max}(\beta) = 1$ e daí temos $v_{max}(\alpha \wedge \beta) = 1$. Ok.

• $\alpha \vee \beta$

Dada a definição de $\overline{m}(\alpha \vee \beta)$ a verificação se divide em tres partes.

(1) $(\alpha \vee \beta)$ livre de ?

Se $m(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ então $m(\alpha \vee \beta) = \mathcal{C}$ e $(\alpha \vee \beta)$ verdadeira.

(2) Apenas α livre de ?

Se $m(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ então

•$m(\alpha \vee \beta) = \mathcal{C}$ e α verdadeira. Para toda v, $v_{max}(\alpha) = 1$.

para toda v, $\{v_{max}(\alpha) = 1$ ou $v_{max}(\beta) = 1\}$ que implica em para toda v,$v_{max}(\alpha \vee \beta) = 1$. Ou seja $V(\alpha \vee \beta) = 1$.

•$m(\alpha \vee \beta) = m(\beta) \neq \emptyset$ e α falsa. Por hipótese de indução temos todo $V(\beta) = 1$ o que conduz a $v_{max}(\beta) = 1$ para toda v. Assim temos também $\{v_{max}(\alpha) = 1$ ou $v_{max}(\beta) = 1\}$ para toda v, o que implica em $v_{max}(\alpha \vee \beta) = 1$ para toda v e portanto $V(\alpha \vee \beta) = 1$.

(3) Nem α nem β livres de ?

Se $m(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ então $\big(m(\alpha), m(\beta)\big)^{\vee} \neq \emptyset$ ou seja ou $m(\alpha) \neq \emptyset$ e $m(\beta) \neq \emptyset$ Por hipótese de indução $V(\alpha) = 1$ e $V(\beta) = 1$. Assim temos para toda v, $v_{max}(\alpha) = 1$ e $v_{max}(\beta) = 1$ que é a condição para que $v_{max}(\alpha \vee \beta) = 1$ para toda v e consequentemente $V(\alpha \vee \beta) = 1$. Ok.

Lema 4 *Se $\overline{m}(\alpha) \neq \emptyset$, então todo $v_{min}(\alpha) = 1$*

Casos de base

A

Se $\overline{m}(A) \neq \emptyset$ então todo $v(A) = 1$. Por defini‡ão de $v_{min}(A) = v(A)$. Ok.

$\neg A$

Se $\overline{m}(\neg A) \neq \emptyset$ então todo $v(A) = 0$. Por definição de $v_{max}(A) = v(A)$. Assim todo $v_{max}(A) = 0$ e todo $v_{min}(\neg A) = 1$. Ok.

$A?$

Se $\overline{m}(A?) \neq \emptyset$ então todo $v(A) = 1$. Por definição de $v_{min}(A) = v(A)$. Assim todo $v_{min}(A) = 1$ e todo $v_{min}(A?) = 1$. Ok.

$\sim \neg A$

Se $\overline{m}(\neg A \to \perp) \neq \emptyset$ então $x(\neg A) \neq \emptyset$ e todo $v(A) = 1$.

Por definição $v_{min}(A) = v(A)$. Assim todo $v_{min}(A) = 1$ e todo $v_{max}(\neg A) = 0$ e para toda v acontece $\{v_{max}(\neg A) = 0$ ou $v_{min}(\perp) = 1\}$ que resulta em $v_{min}(\neg A \to \perp)$ $= 1$. Ok.

H. de Indução

Considere α e β tais que

Se $\overline{m}(\alpha) \neq \emptyset$, então todo $v_{min}(\alpha) = 1$ e Se $\overline{m}(\beta) \neq \emptyset$, então todo $v_{min}(\beta) = 1$.

Conclusão

$\alpha \vee \beta$

Dada a definição de $\overline{m}(\alpha \vee \beta)$ a verificação se divide em tres partes.

(1) $(\alpha \vee \beta)$ livre de ?

Se $\overline{m}(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ então $\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \mathcal{C}$ e $(\alpha \vee \beta)$ verdadeira. Para toda v, $\{v_{max}(\alpha)$ $= 1$ ou $v_{max}(\beta) = 1\}$. Pelo lema 5 temos para toda v, $\{v_{min}(\alpha) = 1$ ou $v_{min}(\beta) = 1\}$ que implica em $v_{min}(\alpha \vee \beta) = 1$ para toda v.

(2) Apenas α livre de ?

Se $\overline{m}(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ então

•$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \mathcal{C}$ e α verdadeira. Para toda v, $v_{max}(\alpha) = 1$. Pelo lema 5 temos para toda v, $v_{min}(\alpha) = 1$ ou

•$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \overline{m}(\beta)$ e α falsa. Por hipótese de indução temos todo $v_{min}(\beta) = 1$ o que conduz a $\{v_{min}(\alpha) = 1$ ou $v_{min}(\beta) = 1\}$ para toda v, o que implica em $v_{min}(\alpha \vee \beta)$ $= 1$ para toda v.

(3) Nem α nem β livres de ?

Se $\overline{m}(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ então $\big(\overline{m}(\alpha), \overline{m}(\beta)\big)^{\vee} \neq \emptyset$ Ou seja ou $\overline{m}(\alpha) \neq \emptyset$ ou $\overline{m}(\beta) \neq \emptyset$ Por hipótese de indução para toda v, $v_{min}(\alpha) = 1$ ou $v_{min}(\beta) = 1$ que é a condição para que $v_{min}(\alpha \vee \beta) = 1$ para toda v. Ok.

$\alpha \wedge \beta$

Como $\overline{m}(\alpha \wedge \beta) = \big(\overline{m}(\alpha), \overline{m}(\beta)\big)^{\wedge}$ é diferente de vazio temos que $\overline{m}(\alpha)$ e $\overline{m}(\beta)$ também são, logo por hipótese de indução para toda v, $v_{min}(\alpha) = 1$ e $v_{min}(\beta) = 1$ que é a condição para que $v_{min}(\alpha \wedge \beta) = 1$ para toda v. Ok.

$\sim \neg\alpha$

Como $\overline{m}(\sim \neg\alpha) = \overline{m}(\neg\alpha \rightarrow \bot) = \big(x^{+}(\neg\alpha), \overline{m}(\bot)\big)^{\vee} = \big(x^{+}(\neg\alpha), \emptyset\big)^{\vee} = x^{+}(\neg\alpha) =$ $\overline{m}(\alpha) \neq \emptyset$, temos por hipótese de indução que, para toda v, $v_{min}(\alpha) = 1$ ou seja, para toda v, $v_{max}(\neg\alpha) = 0$ o que é sufciente para afirmarmos $\{v_{max}(\neg\alpha) = 0$ ou $v\text{‘}_{min}(\bot) = 1\}$ ou seja $v_{min}(\neg\alpha \rightarrow \bot) = 1$ para toda v. Ok

Este lema se verifica para a sublinguagem clássica de LEI.

Lema 5 *Se* $v_{max}(\alpha) = 1$ *sse* $v_{min}(\alpha) = 1$.

$\boxed{\text{Casos de base}}$

A

Lembrando que $v_{max}(A) = v_{min}(A) = v(A)$, vemos que $v_{max}(A) = 1$ sse $v_{min}(A) = 1$. Ok.

$\neg A$

$v_{max}(\neg A) = 1$ leva em $v_{min}(A) = 0$. E lembrando que $v_{min}(A) = v_{max}(A)$ temos $v_{max}(A) = 0$. Assim temos $v_{min}(\neg A) = 1$. E vice versa. Ok.

$\boxed{\text{H. de Indução}}$

Considere α e β tais que $v_{max}(\alpha) = 1$ sse $v_{min}(\alpha) = 1$ e $v_{max}(\beta) = 1$ sse $v_{min}(\beta) = 1$.

$\boxed{\text{Conclusão}}$

$\alpha \vee \beta$

$\Rightarrow$ $v_{max}(\alpha \vee \beta) = 1$ leva em $v_{max}(\alpha) = 1$ ou $v_{max}(\beta) = 1$ Por indução $v_{min}(\alpha) = 1$ ou $v_{min}(\beta) = 1$ que é suficiente para afirmarmos $v_{min}(\alpha \vee \beta) = 1$. Ok.

$\Leftarrow$ $v_{min}(\alpha \vee \beta) = 1$ leva em $v_{min}(\alpha) = 1$ ou $v_{min}(\beta) = 1$ Por indução $v_{max}(\alpha) = 1$ ou $v_{max}(\beta) = 1$ que é suficiente para afirmarmos $v_{max}(\alpha \vee \beta) = 1$. Ok.

$\alpha \wedge \beta$

$\Rightarrow$ $v_{max}(\alpha \wedge \beta) = 1$ implica em $v_{max}(\alpha) = 1$ e $v_{max}(\beta) = 1$ Por indução $v_{min}(\alpha) = 1$ e $v_{min}(\beta) = 1$ que é suficiente para afirmarmos $v_{min}(\alpha \wedge \beta) = 1$. Ok.

$\Leftarrow$ $v_{min}(\alpha \wedge \beta) = 1$ implica em $v_{min}(\alpha) = 1$ e $v_{min}(\beta) = 1$ Por indução $v_{max}(\alpha) = 1$ e $v_{max}(\beta) = 1$ que é suficiente para afirmarmos $v_{max}(\alpha \wedge \beta) = 1$. Ok.

$\neg\alpha$

Não precisamos fazer a comprovação para este caso pois existe a forma normal conjuntiva [CC87] da lógica clássica onde todas as fórmulas da linguagem têm uma correspondente onde a negação só aparece, se é que aparece, diante de átomos.

Teorema 6 **Se $V(\alpha) = 1$ então $[[\alpha]] \neq 1$**

Casos de Base

- A

Como $V(A) = 1$, todo $v_{max}(A) = 1$ e $v(A) = 1$, por defini‡Æo, $n(A) = \{v; v(A) = 0\} = \emptyset$.

$[[A]] = \mu\{n(A)\} = \mu\{\emptyset\} = 0$. Ok

- $A?$

Como $V(A?) = 1$, existe $v`_{max}(A) = 1$, ou seja $v`(A) = 1$, assim $n(A?) = \{v; v(A) = 0\} \neq \mathcal{C}$ e logo

$[[A?]] = \mu\{n(A?)\} \neq 1$. Ok

- $\neg A$

Como $V(\neg A) = 1$, todo $v_{max}(\neg A) = 1$, e todo $v_{min}(A) = 0$ ou seja todo $v(A) = 0$. Por definição $n(\neg A) = \{v; v(A) = 1\} = \emptyset$ e naturalmente diferente de $\mathcal{C}$.

$[[\neg A]] = \mu\{n(\neg A)\} = \mu\{\emptyset\} = 0$. Ok

- $\sim \neg A$ $\quad \sim \neg A =_{def} \neg A \to \bot$

Como $V(\neg A \to \bot) = 1$, todo $v_{max}(\neg A \to \bot) = 1$, $\{$todo $v_{max}(\neg A) = 0$ ou todo $v_{min}(\bot) = 1\}$. Ou seja todo $v_{max}(\neg A) = 0$, todo $v_{min}(A) = 1$ e todo $v(A) = 1$ implicando em $n(\neg A \to \bot) = \big(y(\neg A), n(\bot)\big)^{\wedge} = \big(y(\neg A), \mathcal{C}\big)^{\wedge} = y(\neg A) = \{v; v(A) = 0\} = \emptyset$ e naturalmente diferente de $\mathcal{C}$.

Por outro lado $[[\neg A \to \bot]] = \mu\{\neg A \to \bot)\} = \mu\{y(\neg A)\} = \mu\{\emptyset\} = 0$. Ok

Hipótese de Indução

Considere α e β tais que Se $V(\alpha) = 1$ então $[[\alpha]] \neq 1$ e se $V(\beta) = 1$ então $[[\beta]] \neq 1$.

Conclusão

- $\sim \neg\alpha$ $\quad \sim \neg\alpha =_{def} \neg\alpha \to \bot$

Como $V(\neg\alpha \to \perp) = 1$, todo $v_{max}(\neg\alpha \to \perp) = 1$ e todo v $\big\{v_{max}(\neg\alpha) = 0$ ou $v_{min}(\perp) = 1\big\}$. Dai temos todo $v_{min}(\alpha) = 1$ e todo $v(\alpha) = 1$.

Pelo lema 8, "Se existe $v_{min}(\alpha) = 1$ então $n^{-}(\alpha) \neq \mathcal{C}$", temos $n^{-}(\alpha) \neq \mathcal{C}$.

Por outro lado $n(\sim\neg\alpha) = \big(y(\neg\alpha), n(\perp)\big)^{\wedge} = \big(y(\neg\alpha), \mathcal{C}\big)^{\wedge} = y(\neg\alpha) = n^{-}(\alpha)$ que como acabamos de ver é diferente de $\mathcal{C}$. Ok

$[[\sim\neg\alpha]] = \mu\{n(\sim\neg\alpha)\} = \mu\{n^{-}(\alpha)\} \neq \mu\{\mathcal{C}\} \neq 1$. Ok.

- $\alpha \wedge \beta$

Como $V(\alpha \wedge \beta) = 1$, todo $v_{max}(\alpha \wedge \beta) = 1$, todo $v_{max}(\alpha) = 1$ e todo $v_{max}(\beta) = 1$. Assim $V(\alpha) = 1$ e $V(\beta) = 1$. Por Hipótese de Indução $[[\alpha]] \neq 1$ e $[[\beta]] \neq 1$.

$[[\alpha \wedge \beta]] = [[\alpha]] + [[\beta]]$ - $[[\alpha]].[[\beta]]$ Expressão que vale 1 se um dos dois $[[\alpha]]$ ou $[[\beta]]$ fosse 1. O que por H.I não acontece. Ok.

- $\alpha \vee \beta$

Como $V(\alpha \vee \beta) = 1$, todo $v_{max}(\alpha \wedge \beta) = 1$, para todo v temos $\big\{v_{max}(\alpha) = 1$ ou $v_{max}(\beta) = 1\big\}$.

Pelo lema 7, "Se existe $v`_{max}(\alpha) = 1$ então $n(\alpha) \neq \mathcal{C}$", temos $n(\alpha) \neq \mathcal{C}$ ou $n(\beta) \neq \mathcal{C}$. Logo $[[\alpha]] \neq 1$ ou $[[\beta]] \neq 1$.

Por outro lado $[[\alpha \vee \beta]] = [[\alpha]].[[\beta]] \neq 1$. Ok.

Lema 7 **Se existe $v`_{max}(\alpha) = 1$ então $n(\alpha) \neq \mathcal{C}$**

Casos de Base

- A

Existe $v`_{max}(A) = 1$, $v`(A) = 1$. Por definição $n(A) = \{v\ ;\quad v(A) = 0\}$ que é diferente de $\mathcal{C}$. (apesar de estar contido)

- $A?$

Existe $v`_{max}(A?) = 1$, existe $v``(A) = 1$. por definição, $n(A?) = \mathcal{C}$ se todo $v(A) = 0$, ou seja é diferente de $\mathcal{C}$. Ok.

- $\neg A$

Existe $v`_{max}(\neg A) = 1$, $v`_{min}(A) = 0$, $v`(A) = 0$.

Por definição, $n(\neg A) = \{v\ ; \quad v(A) = 1\}$ que é diferente de $\mathcal{C}$. (apesar de estar contido)

- $\sim \neg A \qquad \sim \neg A =_{def} \neg A \rightarrow \bot$

Como existe $v`_{max}(\neg A \rightarrow \bot) = 1$, temos $v`_{max}(\neg A) = 0$ ou $v`_{max}(\bot) = 1$. Como esta £ltima igualdade nunca se verifica, temos a primeira e dela vem $v`_{min}(A) = 1$ e $v`(A) = 1$. (1)

Por outro lado $n(\neg A \rightarrow \bot) = \big(y(\neg A), n(\bot)\big)^{\wedge} = \big(y(\neg A), \mathcal{C}\big)^{\wedge} = y(\neg A) = \{v\ ;\ v(A) = 0\}$. que por (1), é diferente de $\mathcal{C}$. Ok.

USADO: $n(\neg A \rightarrow \bot)$ $y(\neg A)$, $n(\bot)$ $n(A)$, $n(A?)$ $n(\neg A)$

Hipótese de Indução

Considere α e β tais que "Se existe $v`_{max}(\alpha) = 1$ então $n(\alpha) \neq \mathcal{C}$" e "Se existe $v`_{max}(\beta) = 1$ então $n(\beta) \neq \mathcal{C}$".

Conclusão

- $\alpha \vee \beta$

Como existe $v`_{max}(\alpha \vee \beta) = 1$, então $\{v`_{max}(\alpha) = 1$ ou $v`_{max}(\beta) = 1\}$. Por Hipótese de Indução $n(\alpha) \neq \mathcal{C}$ ou $n(\beta) \neq \mathcal{C}$. (1).

Por outro lado, $n(\alpha \vee \beta) = \big(n(\alpha), n(\beta)\big)^{\wedge}$.

Levando em conta (1) vemos que pelo menos um dos dois membros deste conjunto é diferente de $\mathcal{C}$ e isto é suficiente para que ele também seja. assim $n(\alpha \vee \beta)$ é diferente de $\emptyset$. Ok.

Uma maneira mais simples de concluir:

Dizer que $\big(n(\alpha), n(\beta)\big)^{\vee}$ só é $\mathcal{C}$ se ambos os componentes forem. O que não acontece por H.I.

- $\alpha \wedge \beta$

Como existe $v`_{max}(\alpha \wedge \beta) = 1$, todo $v`_{max}(\alpha) = 1$ e $v`_{max}(\beta) = 1$. Por Hipótese de Indução $n(\alpha) \neq \mathcal{C}$ e $n(\beta) \neq \mathcal{C}$. (1)

Por outro lado, $n(\alpha \wedge \beta) = \big(n(\alpha), n(\beta)\big)^{\vee}$,

que, so seria $\mathcal{C}$ se um dos dois fosse, o que não acontece neste caso. Ok.

• $\sim \neg\alpha \qquad \sim \neg\alpha =_{def} \neg\alpha \to \perp$

Se existe $v`_{max}(\neg\alpha \to \perp) = 1$, então $v`_{max}(\neg\alpha) = 0$ ou $v`_{max}(\perp) = 1$; Como este segundo membro é impossível, temos $v`_{max}(\neg\alpha) = 0$ e $v`_{min}(\alpha) = 1$;

Por outro lado, $n(\neg\alpha \to \perp) =$

$\big(y(\neg\alpha), n(\perp)\big)^{\wedge} = \big(y(\neg\alpha), \mathcal{C}\big)^{\wedge} = y(\neg\alpha) = n^{-}(\alpha)$

que pelo 8 é diferente de $\mathcal{C}$. Ok.

Lema 8 *Se existe $v_{min}(\alpha) = 1$ então $\overline{n}(\alpha) \neq \mathcal{C}$ $(Y(\neg\alpha) \neq \mathcal{C})$*

$\boxed{\text{Casos de base}}$

A

Se existe $v`_{min}(A) = 1$ temos $v`(A) = 1$;

Por outro lado $\overline{n}(A) = \{v/v(A) = 0\} \neq \mathcal{C}$. Ok

$\neg A$

Se existe $v`_{min}(\neg A) = 1$ então $v`_{max}(A) = 0$ e $v`(A) = 0$.

Por outro lado $\overline{n}(\neg A) = \{v/v(A) = 1\} \neq \mathcal{C}$. Ok

$A?$

Se existe $v`_{min}(A?) = 1$ quer dizer que TODO $v`(A) = 1$.

Por outro lado $\overline{n}(A?) = \{v/v(A) = 0\} = \emptyset \neq \mathcal{C}$. Ok

$\sim \neg A$

Se existe $v`_{min}(\neg A \to \perp) = 1$ quer dizer que $v`_{max}(\neg A) = 0$ ou $v`_{min}(\perp) = 1$ como esta segunda parte é impossível temos $v`_{max}(\neg A) = 0$, $v`_{min}(A) = 1$ e $v`(A) = 1$.

Por outro lado $\overline{n}(\sim \neg A) = \big(y(\neg A), \overline{n}(\perp)\big)^{\wedge} = \big(y(\neg A), \mathcal{C}\big)^{\wedge} = y(\neg A) = \{v; v(A) = 0\} \neq \mathcal{C}$. Ok

$\boxed{\text{H. de Indução}}$

Considere α e β tais que

Se existe $v_{min}(\alpha) = 1$ então $\overline{n}(\alpha) \neq \mathcal{C}$ e

Se existe $v_{min}(\beta) = 1$ então $\overline{n}(\beta) \neq \mathcal{C}$.

$\boxed{\text{Conclusão}}$

$\alpha \vee \beta$

Se existe $v`_{min}(\alpha \vee \beta)$ então $v`_{min}(\alpha) = 1$ ou $v`_{min}(\beta) = 1$.

Por outro lado $\overline{n}(\alpha \vee \beta) = \big(\overline{n}(\alpha), \overline{n}(\beta)\big)^{\wedge}$ que só eh igual a $\mathcal{C}$ se ambos os membros forem. Como, por H.I., $\overline{n}(\alpha) \neq \mathcal{C}$ ou $\overline{n}(\beta) \neq \mathcal{C}$ temos $\overline{n}(\alpha \vee \beta) \neq \mathcal{C}$. Ok

$\alpha \wedge \beta$

Como existe $v`_{min}(\alpha \wedge \beta) = 1$, então $v`_{min}(\alpha) = 1$ e $v`_{min}(\beta) = 1$.

Por outro lado $\overline{n}(\alpha \wedge \beta) = \big(\overline{n}(\alpha), \overline{n}(\beta)\big)^{\vee}$ que seria igual a $\mathcal{C}$ se um de seus membros fosse. Como, por H.I., $\overline{n}(\alpha) \neq \mathcal{C}$ **e** $\overline{n}(\beta) \neq \mathcal{C}$ temos $\overline{n}(\alpha \vee \beta) \neq \mathcal{C}$. Ok

$\sim \neg\alpha$

Se existe $v`_{min}(\neg\alpha \rightarrow \bot) = 1$ quer dizer que $v`_{max}(\neg\alpha) = 0$ ou $v`_{min}(\bot) = 1$ como esta segunda parte é impossível temos $v`_{max}(\neg\alpha) = 0$, $v`_{min}(\alpha) = 1$ e $v`(\alpha) = 1$. Por H.I. $\overline{n}(\alpha) \neq \mathcal{C}$.

Por outro lado $\overline{n}(\sim \neg\alpha) = \big(y(\neg\alpha), \overline{n}(\bot)\big)^{\wedge} = \big(y(\neg\alpha), \mathcal{C}\big)^{\wedge} = y(\neg\alpha) = \overline{n}(\alpha)$ que como acabamos de ver é diferente de $\mathcal{C}$. Ok

5.3 Teorema 2

Teorema 9 **Se $V(\alpha) = 0$ então $[\alpha] = 0$**

$\boxed{\textbf{Casos de Base}}$

- A

Como $V(A) = 0$, existe $v_{max}(A) =$ o, por definição, $[A] = \mu\{m(A)\} = \mu\{\emptyset\} = 0$.

• $A?$

Como $V(A?) = 0$, existe $v`_{max}(A?) = 0$, todos $v(A) = 0$, assim $m(A?) = \{v; v(A) = 1\} = \emptyset$ e logo $[A?] = \mu\{m(A?)\} = 0$.

• $\neg A$

Como $V(\neg A) = 0$, existe $v`_{max}(\neg A) = 0$, $v`(A) = 1$ por definição, $m(\neg A) = \emptyset$ pois nem todo $v(A) = 0$.

$[\neg A] = \mu\{m(\neg A)\} = \mu\{\emptyset\} = 0$.

• $\sim\neg A$ $\quad\sim\neg A =_{def} \neg A \to \bot$

Como $V(\neg A \to \bot) = 0$, existe $v`_{max}(\neg A \to \bot) = 0$, existe $\{v`_{max}(\neg A) = 1$ e $v`_{max}(\bot) = 0\}$. Ou seja existe $v`_{max}(\neg A) = 1$, $v`(A) = 0$ que implica em $\overline{m}(A) = \emptyset$.

Por outro lado $[\neg A \to \bot] = \mu\{m(\neg A \to \bot)\} = \mu\{x(\neg A)\} = \mu\{\overline{m}(A)\}$. Mas como acabamos de ver $\overline{m}(A) = \emptyset$ assim $[\neg A \to \bot] = \mu\{\emptyset\} = 0$.

Hipótese de Indução

Considere α e β tais que Se $V(\alpha) = 1$ então $[\alpha] = 0$ e se $V(\beta) = 1$ então $[\beta] = 0$.

Conclusão

• $\sim\neg\alpha$ $\quad\sim\neg\alpha =_{def} \neg\alpha \to \bot$

Como $V(\neg\alpha \to \bot) = 0$, existe $v`$ tal que $v`_{max}(\neg\alpha \to \bot) = 0$, $v`_{max}(\neg\alpha) = 1$ e $v`_{max}(\bot) = 0$. Ou seja existe $v`$ tal que $v`_{max}(\neg\alpha) = 1$, $v`_{min}(\alpha) = 0$ pelo lema 10 temos $\overline{m}(\alpha) = \emptyset$.

Por outro lado $[\neg A \to \bot] = \mu\{m(\neg\alpha \to \bot)\} = \mu\{x(\neg\alpha)\} = \mu\{\overline{m}(\alpha)\} = \mu\{\emptyset\} = 0$.

• $\alpha \wedge \beta$

Como $V(\alpha \wedge \beta) = 0$, existe $v`_{max}(\alpha \wedge \beta) = 0$, ou seja $v`_{max}(\alpha) = 0$ ou $v`_{max}(\beta) = 0$. Assim $V(\alpha) = 0$ ou $V(\beta) = 0$ e por Hipótese de Indução $[\alpha] = 0$ ou $[\beta] = 0$.

Por outro lado $[\alpha \wedge \beta] = [\alpha].[\beta]$.

Há sempre a chance de falar de $m(\alpha) \neq \emptyset$ e $m(\beta) = \emptyset$.

- $\alpha \vee \beta$

Como $V(\alpha \vee \beta) = 0$, existe $v`$ tal que $v`_{max}(\alpha \vee \beta) = 0$, ou seja, $v`_{max}(\alpha) = 0$ e $v`_{max}(\beta) = 0$. Isto implica que $V(\alpha) = 0$ e $V(\beta) = 0$ e por Hipótese de Indução $[\alpha] = 0$ e $[\beta] = 0$. Naturalmente $m(\alpha) = \emptyset$ e $m(\beta) = \emptyset$.

Por outro lado $m(\alpha \vee \beta)$ se desdobra em três casos:

caso 1 Quando $\alpha \vee \beta$ é livre de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha \vee \beta) = 1 \\ \emptyset, & \text{senão} \end{cases}$$

caso 2 Quando apenas α for livre de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha) = 1 \\ \overline{m}(\beta), & \text{senão} \end{cases}$$

caso 3 Quando nem α nem β forem livres de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \ ; \quad \lambda_1 \in \overline{m}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{m}(\beta)\}.$$

No primeiro caso, como por hipótese $V(\alpha \vee \beta) = 0$, temos $m(\alpha \vee \beta) = \emptyset$.

No segundo obteríamos $m(\beta)$ que como sabemos por indução é vazio.

No terceiro caso obteríamos $\big(m(\alpha), m(\beta)\big)^{\vee} = \emptyset$ pois $m(\alpha) = m(\beta) = \emptyset$ por indução.

Lema 10 Se existe $v`_{min}(\alpha) = 0$ então $\overline{m}(\alpha) = \emptyset$

Casos de Base

- A

Existe $v`_{min}(A) = 0$, $v`(A) = 0$. Por definição $\overline{m}(A)$ é vazio se existe $v`(A) = 0$.

- $A?$

Existe $v`_{min}(A?) = 0$, existe $v``(A) = 0$. por definição, $\overline{m}(A?)$ é vazio se existe $v`(A) = 0$.

- $\neg A$

Existe $v`_{min}(\neg A) = 0$, $v`_{max}(A) = 1$, $v`(A) = 1$.

Por definição, $\overline{m}(\neg A)$ é vazio se existe $v`(A) = 1$.

- $\sim \neg A$ $\quad\quad \sim \neg A =_{def} \neg A \to \bot$

Como existe $v`_{min}(\neg A \to \bot) = 0$, temos $v`_{max}(\neg A) = 1$ e $v`_{min}(\bot) = 0$ ou seja $v`_{max}(\neg A) = 1$ e $v`(A) = 0$. (1)

Por outro lado $\overline{m}(\neg A \to \bot) = \big(x(\neg A), \overline{m}(\bot)\big)^{\vee} = \big(x(\neg A), \emptyset\big)^{\vee} = x(\neg A) =$ é vazio se existe $v`(A) = 0$.

$\boxed{\textbf{Hipótese de Indução}}$

Considere α e β tais que "Se existe $v`_{min}(\alpha) = 0$ então $\overline{m}(\alpha) = \emptyset$" e "Se existe $v`_{min}(\beta) = 0$ então $\overline{m}(\beta) = \emptyset$".

$\boxed{\textbf{Conclusão}}$

- $\alpha \vee \beta$

Como existe $v`_{min}(\alpha \vee \beta) = 0$, então $\{v`_{min}(\alpha) = 0$ e $v`_{min}(\beta) = 0\}$. Por Hipótese de Indução $\overline{m}(\alpha) = \emptyset$ e $\overline{m}(\beta) = \emptyset$. (1).
Por outro lado, $\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \big(\overline{m}(\alpha), \overline{m}(\beta)\big)^{\vee} = \big(\emptyset, \emptyset\big)^{\vee} = \emptyset$.

A captação da disjunção se divide em três casos
caso 1 Quando $\alpha \vee \beta$ é livre de ?. vou ter que botar restricao aqui ? α e beta β verdadeiros.

$$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha \vee \beta) = 1 \\ \emptyset, & \text{senão} \end{cases}$$

caso 2 Quando apenas α for livre de ?.

$$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha) = 1 \\ \overline{m}(\beta), & \text{senão} \end{cases}$$

caso 3 Quando nem α nem β forem livres de ?.

$\overline{m}(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2)\ ; \quad \lambda_1 \in \overline{m}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in \overline{m}(\beta)\}.$

- $\alpha \wedge \beta$

Como existe $v`_{min}(\alpha \wedge \beta) = 0$, $v`_{min}(\alpha) = 0$ ou $v`_{min}(\beta) = 0$. Por Hipótese de Indução $\overline{m}(\alpha) = \emptyset$ ou $\overline{m}(\beta) = \emptyset$. (1)

Por outro lado, $\overline{m}(\alpha \wedge \beta) = \big(\overline{m}(\alpha), \overline{m}(\beta)\big)^{\wedge}$, que tem uma destas formas $\big(\overline{m}(\alpha), \emptyset\big)^{\wedge}$ ou $\big(\emptyset, \overline{m}(\beta)\big)^{\wedge}$, e em ambos os casos o resultado é vazio.

- $\sim \neg\alpha \qquad \sim \neg\alpha =_{def} \neg\alpha \rightarrow \perp$

Se existe $v`_{min}(\neg\alpha \rightarrow \perp) = 0$, então $v`_{max}(\neg\alpha) = 1$ e $v`_{min}(\perp) = 0$; temos então $v`_{min}(\alpha) = 0$. Por Hipótese de Indução $\overline{m}(\alpha) = \emptyset$.

Por outro lado, $\overline{m}(\neg\alpha \rightarrow \perp) = \big(x(\neg\alpha), \overline{m}(\perp)\big)^{\vee} = \big(x(\neg\alpha), \emptyset\big)^{\vee} = x(\neg\alpha) = \overline{m}(\alpha)$ que como vimos é vazio.

5.4 Teorema 3

Teorema 11 $[\alpha] > 0$ **se e somente se** $[\sim \alpha] = 0$

Mostrar isto é o mesmo que mostrar $m(\alpha) \neq \emptyset$ se e somente se $m(\sim \alpha) = \emptyset$ ou seja mostrar que $m(\alpha) \neq \emptyset$ se e somente se $x(\alpha) = \emptyset$.

Casos de Base

- A

Como $m(A) \neq \emptyset$ temos $m(A) = \mathcal{C}$ e todo $v(A) = 1$. Assim $x(A) = \emptyset$ segundo sua definição.

- $A?$

Como $m(A?) \neq \emptyset$ existe $v`$ tal que $v`(A) = 1$. Assim $x(A?) = \emptyset$ segundo sua definição.

- $\neg A$

Como $m(\neg A) \neq \emptyset$ temos $m(\neg A) = \mathcal{C}$ e todo $v(A) = 0$. Assim $x(\neg A) = \emptyset$ segundo sua definição.

• $\sim \neg A$ $\quad \sim \neg A =_{def} \neg A \to \bot$

Como $m(\neg A \to \bot) \neq \emptyset$ temos

$\big(x(\neg A), m(\bot)\big)^{\vee} \neq \emptyset$ ou seja $x(\neg A) = \emptyset$ e todo $v(A) = 1$.

Por outro lado, $x(\neg A \to \bot) = \big(m(\neg A), x(\bot)\big)^{\wedge} = m(\neg A)$ que é VAZIO pois nem todo $v(A) = 0$.

Hipótese de Indução

Considere α e β tais que

$m(\alpha) \neq \emptyset$ se e somente se $x(\alpha) = \emptyset$ e $m(\beta) \neq \emptyset$ se e somente se $x(\beta) = \emptyset$.

Conclusão

• $\sim \neg\alpha$ $\quad \sim \neg\alpha =_{def} \neg\alpha \to \bot$

Como $m(\sim \neg\alpha) \neq \emptyset$ temos $\big(x(\neg\alpha), m(\bot)\big)^{\vee} = x(\neg\alpha) = \overline{m}(\alpha) \neq \emptyset$. $\quad$ (1)

Por outro lado $x(\sim \neg\alpha) = \big(m(\neg\alpha), x(\bot)\big)^{\vee} = m(\neg\alpha) = \overline{x}(\alpha)$ pelo lemanegclassica e por (1) é vazio.

• $\alpha \wedge \beta$

Como $m(\alpha \wedge \beta) \neq \emptyset$ temos $\big(m(\alpha), m(\beta)\big)^{\wedge} \neq \emptyset$ e isto acontece porque $m(\alpha)$ e $m(\beta)$ também são não vazios. Por hipótese de indução $x(\alpha)$ e $x(\beta)$ são vazios.

Por outro lado $x(\alpha \wedge \beta) = \big(x(\alpha), x(\beta)\big)^{\vee} = \big(\emptyset, \emptyset\big)^{\vee} = \emptyset$.

• $\alpha \vee \beta$

A captação da disjunção se divide em três casos

caso 1 Quando $\alpha \vee \beta$ é livre de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha \vee \beta) = 1 \\ \emptyset, & \text{senão} \end{cases}$$

caso 2 Quando apenas α for livre de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{se } V(\alpha) = 1 \\ m(\beta), & \text{senão} \end{cases}$$

caso 3 Quando nem α nem β forem livres de ?.

$$m(\alpha \vee \beta) = \{(\lambda_1, \lambda_2) \; ; \quad \lambda_1 \in m(\alpha) \quad \text{ou} \quad \lambda_2 \in m(\beta)\}.$$

Lembrando que $m(\alpha \vee \beta) \neq \emptyset$ vamos à analise do casos.
No primeiro caso, por hipótese temos $m(\alpha \vee \beta)$ não vazio logo temos $\alpha \vee \beta$ livre de ? e verdadeira. Isto nos leva na definição da função x a $x(\alpha \vee \beta) = \emptyset$.

No segundo caso obteríamos (1) $\mathcal{C}$ se α verdadeira, ou (2) $m(\beta)$ diferente de vazio se α falsa. A primeira possibilidades levam a $\emptyset$ na definição da função x. A segunda leva a $x(\beta)$. Lembre que $m(\beta) \neq \emptyset$ leva por hipótese de indução a $x(\beta) = \emptyset$.

No terceiro caso teríamos $\big(m(\alpha), m(\beta)\big)^{\vee} \neq \emptyset$ e isto acontece porque um dos dois $m(\alpha)$ ou $m(\beta)$ é não vazio. Por hipótese de indução $x(\alpha)$ ou $x(\beta)$ será vazio.

5.5 Fórmulas plausíveis e fórmulas irrefutáveis

Mostraremos que as propriedades desejadas em 3.4.2 3.2.3 (Medida de uma fórmula plausível - Intuição) se verificam na nossa definição de plausibilidade.

$[\alpha \vee B] = \begin{cases} [\alpha], & \text{se } \neg B \\ 1, & \text{senão} \end{cases}$, $[\alpha \wedge B] = \begin{cases} [\alpha], & \text{se } B \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$ e $[\alpha \to B] = \begin{cases} 1, & \text{se } B \\ [[\alpha]]^{-}, & \text{senão} \end{cases}$

A disjunção

$\boxed{[\alpha \vee B] = [\alpha] \text{ se } \neg B}$

$[\alpha \vee B] = \mu\{m(\alpha \vee B)\}$ mas

$$\begin{aligned} m(\alpha \vee B) &= \big(\ m(\alpha)\ ,\ m(B)\big)^{\vee} \\ &= \big(\ m(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \big(\ *\ ,\ m(B)\big) \\ &= \big(\ m(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \big(\ *\ ,\ \emptyset\big) \qquad \text{pois } B \text{ é falso e } m(B) = \emptyset. \\ &= \big(\ m(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \emptyset \ = \ \big(\ m(\alpha)\ ,\ *\ \big) \end{aligned}$$

Assim $[\alpha \vee B] = \frac{\#(m(\alpha),*)}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#m(\alpha)*\#\mathcal{C}^m}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#m(\alpha)}{\#\mathcal{C}^n} = [\alpha]$.

$\boxed{[\alpha \vee B] = 1 \text{ se } B}$

$[\alpha \vee B] = \mu\{m(\alpha \vee B)\}$ mas

$$\begin{aligned} m(\alpha \vee B) &= \big(\ m(\alpha)\ ,\ m(B)\big)^{\vee} \\ &= \big(\ m(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \big(\ *\ ,\ m(B)\big) \\ &= \big(\ m(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \big(\ *\ ,\ \mathcal{C}\big) \qquad \text{pois } B \text{ é verdade e } m(B) = \mathcal{C}. \\ &= \big(\ *\ ,\ \mathcal{C}\ \big) \end{aligned}$$

Assim $[\alpha \vee B] = \frac{\#(*,\mathcal{C})}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#\mathcal{C}^m*\#\mathcal{C}^m}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = 1$.

A conjunção

$\boxed{[\alpha \wedge B] = [\alpha] \text{ se } B}$

$[\alpha \wedge B] = \mu\{m(\alpha \wedge B)\}$ mas

$m(\alpha \wedge B) = \big(\ m(\alpha)\ ,\ m(B)\big)^{\wedge}$

$\quad\quad = \ \big(\ m(\alpha)\ ,\ \mathcal{C}\big)^{\wedge}$ pois B é verdadeiro e $m(B) = \mathcal{C}$.

Assim $[\alpha \wedge B] = \frac{\#(m(\alpha),\mathcal{C})}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#m(\alpha)*\#\mathcal{C}^m}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#m(\alpha)}{\#\mathcal{C}^n} = [\alpha]$.

$\boxed{[\alpha \wedge B] = 0 \text{ se } \neg B}$

$[\alpha \wedge B] = \mu\{m(\alpha \wedge B)\}$ mas

$m(\alpha \wedge B) = \big(\ m(\alpha)\ ,\ m(B)\big)^{\wedge}$

como B é falso temos $m(B) = \emptyset$ e

$m(\alpha \wedge B) = \big(\ m(\alpha)\ ,\ \emptyset\ \big)^{\wedge} \ = \ \emptyset$ (OBS: A árvore binária vazia.)

Assim

$[\alpha \wedge B] = \mu\{\emptyset\} = 0$.

A implicação material (consequente sem ?)

$\boxed{[\alpha \rightarrow B] = 1 \text{ se } B}$ merece comentário.

$[\alpha \rightarrow B] = \mu\{m(\alpha \rightarrow B)\}$ mas

$$\begin{aligned} m(\alpha \rightarrow B) &= \big(\ x(\alpha)\ ,\ m(B)\big)^{\vee} \\ &= \big(\ x(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \big(\ *\ ,\ m(B)\big) \\ &= \big(\ x(\alpha)\ ,\ *\ \big)^{\wedge} \cup \big(\ *\ ,\ \mathcal{C}\big)^{\wedge} \quad\quad \text{pois } B \text{ é verdade e } m(B) = \mathcal{C}. \\ &= \big(\ *\ ,\ \mathcal{C}\ \big)^{\wedge} \end{aligned}$$

Assim $[\alpha \rightarrow B] = \frac{\#(*,\mathcal{C})}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#\mathcal{C}^m*\#\mathcal{C}^m}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = 1$.

$\boxed{[\alpha \to B] = [[\alpha]]^- \quad \text{se } B \text{ for falsa}}$

$[\alpha \to B] = \mu\{m(\alpha \to B)\}$ mas

$$\begin{aligned} m(\alpha \to B) &= \big(\ x(\alpha)\ ,\ m(B)\big)^{\vee} \\ &= \big(\ x(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \big(\ *\ ,\ m(B)\big) \\ &= \big(\ x(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \big(\ *\ ,\ \emptyset\big) \qquad \text{pois } B \text{ é falsa e } m(B) = \emptyset. \\ &= \big(\ x(\alpha)\ ,\ *\ \big) \cup \emptyset \quad = \quad \big(\ x(\alpha)\ ,\ *\ \big) \end{aligned}$$

Assim $[\alpha \to B] = \frac{\#(x(\alpha),*)}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#x(\alpha)*\#\mathcal{C}^m}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#x(\alpha)}{\#\mathcal{C}^n} = [[\alpha]]^-$. A falsidade crédula.

Identificamos ainda um caso particular que merece atenção:

A implicação material (antecedente sem ?)

$$[A \to \beta] = \begin{cases} [\beta], & \text{se } A \\ 1, & \text{senão} \end{cases}$$

$\boxed{[A \to \beta] = [\beta] \text{ se } A}$

$[A \to \beta] = \mu\{m(A \to \beta)\}$ mas

$$\begin{aligned} m(A \to \beta) &= \big(\ x(A)\ ,\ m(\beta)\big)^{\vee} \\ &= \big(\ x(A)\ ,\ *\ \big)^{\wedge} \cup \big(\ *\ ,\ m(\beta)\big)^{\wedge} \\ &= \big(\ \emptyset\ ,\ *\ \big)^{\wedge} \cup \big(\ *\ ,\ m(\beta)\big)^{\wedge} \qquad \text{pois } A \text{ é verdade e } x(A) = \emptyset. \\ &= \big(\ *\ ,\ m(\beta)\ \big) \end{aligned}$$

Assim $[\alpha \vee B] = \frac{\#(*,m(\beta))}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#\mathcal{C}^n*\#m(\beta)}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#m(\beta)}{\#\mathcal{C}^m} = [\beta]$.

$\boxed{[A \to \beta] \text{ é indeterminado se } \neg A}$

Aqui temos duas possibilidades pois A é falso e $x(A)$ pode ser $\emptyset$ ou $\mathcal{C}$.

Vamos ver os dois casos:

Se $x(A) = \emptyset$, temos pelo caso anterior $[A \to \beta] = [\beta]$.

Se $x(A) = \mathcal{C}$, temos

$[A \to \beta] = \mu\{m(A \to \beta)\}$ mas $m(A \to \beta) \ = \big(\ x(A)\ ,\ m(\beta)\big)^{\vee} \quad =$

$$\big(\ x(A)\ ,\ *\ \big)^\wedge \cup \big(\ *\ ,\ m(\beta)\big)^\wedge \qquad\qquad =$$
$$\big(\ \mathcal{C}\ ,\ *\ \big)^\wedge \cup \big(\ *\ ,\ m(\beta)\big)^\wedge$$
$$=\quad \big(\ \mathcal{C}\ ,\ *\ \big)^\wedge$$

Assim $[A \rightarrow \beta] = \frac{\#(\mathcal{C},*)}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = \frac{\#\mathcal{C}^m * \#\mathcal{C}^m}{\#\mathcal{C}^{n+m}} = 1.$

Apendice A

FORMA NORMAL CONJUNTIVA PARA LEI

A.1 Introdução

O método de captação dos grupos de valorações clássicas que geram a probabilidade de fórmula necessita que as fórmulas em forma normal, apresentamos aqui um procedimento que reduz qualquer expressão de LEI a uma *forma* apropriada à aplicação do método de captação.

Definição 16 (Fórmula irredutível): *Uma fórmula de LEI é irredutível sse é*

- *Uma fórmula atômica A.*
- $\sim \neg\alpha$.
- $\neg \sim \alpha$ *no escopo de* $\neg$.

Definição 17 (Grau d de uma fórmula):$d : L \rightarrow N$

1. $d(\alpha) = 0$ *se* α *é irredutível.*
2. $d(\sim \alpha) = d(\neg\alpha) = d(\alpha)$.
3. $d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha \vee \beta) = max(d(\alpha), d(\beta))$.
4. $d(\alpha?) = d(\alpha) + 1$. *Se* α *não é subfórmula de irredutível.*

Definição 18 (Fórmula de Grau zero):

Uma fórmula tem grau zero quando é irrefutável (livre de ?) ou epistêmica onde a interrogação aparece apenas dentro de uma subfórmula irredutível.

A.2 A Redução

Teorema 12 (Teorema da redução em LEI): *Cada fórmula em LEI de grau maior que 1 é redutível a uma fórmula em LEI de grau 1.*

Prova

O procedimento de transformação:

• Passo 1 (Eliminação de Símbolos) Usar as seguintes definições para eliminar todas as ocorrências de $\leftrightarrow$, $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$:

1. $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $\alpha \Leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$
3. $\alpha \Rightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

• Passo 2 (Eliminação de Símbolos) Eliminar todas as ocorrências de $\rightarrow$.

1. $\alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \sim \alpha \vee \beta$

• Passo 3 Aplicar as leis comutativa, associativa e distributiva para $\wedge$ e $\vee$:

1. $\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$
2. $\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$
3. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \Leftrightarrow \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
4. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \Leftrightarrow \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
5. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
6. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

• Passo 4 (Internalização de $\neg$):Aplicar as equivalências fortes à $\neg$ para internaliza-la o máximo possível. Aplicar as equivalências fracas à $\neg$ (de outro modo ela seria uma irredutível), para internaliza-la o máximo possível.

1. $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$
2. $\neg \sim \alpha \leftrightarrow \alpha$
3. $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$
4. $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta$
5. $\neg(\alpha?) \Leftrightarrow (\neg\alpha?)$
6. $\neg \sim \alpha \leftrightarrow \alpha$

• Passo 5 (Internalização de $\sim$):Aplicar as equivalências fortes à $\sim$ para internaliza-la o máximo possível. Aplicar as equivalências fracas à $\sim$, quando não estiver sob o escopo de $\sim$ para interneliza-la o máximo possível.

1. $\sim \neg\alpha$ é irredutível.
2. $\sim\sim \alpha \leftrightarrow \alpha$
3. $\sim (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \sim \alpha \vee \sim \beta$
4. $\sim (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \sim \alpha \wedge \sim \beta$

• Passo 6 (Redução de fórmulas epistêmicas fechadas): Eliminar, até onde for possível, ? supérfluas que sufixem α quando α é fechada.

1. $\alpha \Leftrightarrow \alpha?$

• Passo 7 (Redução de Grau): Se a fórmula obtida depois dos passos 1-7 ainda for de segundo grau, é porque ela, ou uma parte dela, é da forma $\alpha?$, onde α é de primeiro grau e é uma conjunção ou uma disjunção (já que todas as internalizações de negações, externalizações e eliminações de ? foram feitas) seguindo o formato abaixo. Para uma fórmula de grau superior apenas repita estes passos até ela se tornar uma fórmula de segundo grau.

1. Se β é epistêmica fechada, use a seguinte equivalência forte:

- $(\alpha \wedge \beta)? \Leftrightarrow (\alpha? \wedge \beta?)$

2. Já que todas as internalizações de negações foram feita, aplique a seguinte equivalência fraca:

- $(\alpha \vee \beta)? \leftrightarrow (\alpha? \vee \beta?)$

Definição 19 (Forma Normal Conjuntiva FNC) *Uma fórmula está na FNC sse é uma conjunção de cláusulas.*

Definição 20 (Literal em LEI) *Um literal em LEI é uma fórmula irredutível de LEI, uma negação clássica ou paraconsistente de uma irredutível ou uma fórmula de grau zero em LCNF seguida de um único ?.*

Definição 21 (Cláusula em LEI) *Uma cláusula em LEI é uma disjunção de literais de LEI arranjadas na seguinte ordem: primeiro todas as fórmulas irredutíveis, ou suas negações, depois todas as fórmulas sufixadas por ?. Ex* $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee ... \vee \alpha_n? \vee \alpha_{n+1}?...$

Definição 22 (Forma Normal Conjuntiva de LEI - FNCL) *Uma fórmula está na forma FNCL sse está em FNC e suas cláusulas são cláusulas de LEI. Ex:* $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ...$ *onde* α_i *é uma cláusula de LEI,* $i > 0$.

Teorema 13 (FNCL) *Toda fórmula de LEI pode ser reduzida à forma FNCL, i.e. existe um procedimento efetivo que encontra para cada* α *uma fórmula* $\alpha`$ *em FNCL tal que* $\vdash_{LEI} \alpha \Leftrightarrow \alpha`$

Prova:

1. Se α tem grau zero então aplique os passos de 1 a 5 do Teorema 12 para encontrar $\alpha`$ em FNCL.

2. Se α é de primeiro grau, pegue uma fórmula de grau zero já em FNCL seguida por uma só ? (use o passo acima para conseguir uma forma normal) como uma unidade indivisível ou uma fórmula irredutível como unidade indivisível e aplique os passos de 1 a 5 do Teorema de redução 12 para encontrar $\alpha`$ em FNCL.

3. Se α é de grau superior, aplique os passos de 1 a 7 do Teorema 12 para transformar α numa fórmula de primeiro grau e depois aplique os passos acima sobre a fórmula resultante para encontrar $\alpha`$ em FNCL.

Apendice B

Quantificação - Primeira Ordem

B.1 Introdução

Apresentamos implicações na semântica e na sintaxe da versão de primeira ordem de LEI para a implementação da quantificação.

Desta vez o operador que representa a plausibilidade de uma fórmula, [ ] será inserido na linguagem. Este operador receberá como parâmetro uma fórmula.

A idéia é comparar duas fórmulas por meio de suas probabilidades. Mas como descr-ever, em linguagem de primeira ordem, o que seria a probabilidade de uma fórmula? Isto pode ser feito mas não sem preço; teríamos que introduzir no alfabeto um operador cujo parâmetro seria uma fórmula. E o comportamento deste novo operador? Ora, dada sua natureza ele seria um predicado, porém, faremos dele um construtor de termos.

Se já aceitamos este pequeno acréscimo na sintaxe, podemos também aceitar sua contrapartida na semântica. Os novos termos serão *numéricos* pois ao operador especial será associada uma medida, o que nos leva a uma linguagem *bitipada* com um *tipo* sendo usado para o domínio do qual queremos falar e o outro específico para os termos numéricos.

Aconselhamos o leitor a se reportar à definição da versão de LEI em primeira ordem contida em [Mar97].

B.1.1 Sintaxe

ALFABETO: Variáveis, constantes, símbolos funcionais, símbolos predicados, conectivos e quantificadores ficam como são. Aparece o operador probabilístico $Prob$ e um predicado numérico M.

REGRAS DE FORMAÇÃO: Termos e fórmulas tradicionais continuam como antes. De uma fórmula α surge o termo numérico $Prob[\alpha]$ e, de dois termos numéricos t_1 e t_2, temos a seguinte fórmula $M(t_1,\ t_2)$.

B.1.2 Semântica Probabilística - Mundos Plausíveis

É certo que **LEI** já possui sua semântica bem definida, possui mesmo duas versões (Uma semântica de valorações e uma de mundos plausíveis[Mar97]), mas se queremos capturar o significado de probabilidade como *grau de crença*, devemos ser capazes de interpretar os termos probabilísticos. Podemos fazê-lo com um mínimo de intromissão na semântica já existente.

A semântica de **LEI** conta com a definição de uma estrutura de mundos plausíveis: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}_{LEI}, \mathcal{A}, s \rangle$. Veja seção 2.2.2

Para podermos interpretar os termos numéricos usaremos uma medida que, acrescentada à definição acima, dará luz a uma estrutura probabilística:

Definição 7 (Estrutura probabilística de Mundo Plausível $\mathcal{M}_p$) $\mathcal{M}_p = \langle \mathcal{W}_{LEI}, \mathcal{A}_p, s \rangle$

$\mathcal{A}_p$ é uma estrutura probabilística para $\mathcal{L}_?$ obtida a partir de uma estrutura clássica de primeira ordem pelo acréscimo de um segundo domínio e de uma medida.

$\mathcal{A}_p = \{|\mathcal{A}|, |\mathcal{N}|, \sigma, \mu\}$, onde $|\mathcal{A}|$ é um universo de discurso não vazio e $|\mathcal{N}|$ é um universo numérico não vazio, σ é uma função de interpretação para os parâmetros em $\mathcal{L}_?$ e μ é uma função de probabilidade discreta sobre os mundos plausíveis. Cada conjunto de mundos plausíveis representa um ponto de vista. Na verdade estaremos medindo o peso das interpretações que aceitam como verdadeira uma certa fórmula.

A função μ mapeia os elementos de $2^{\mathcal{W}_{LEI}}$ no intervalo real [0,1].

INTERPRETAÇÃO DAS FÓRMULAS ESPECIAIS

A *satisfatibilidade* de fórmulas do tipo $M(t_1,\ t_2)$, onde t_1 e t_2 são termos numéricos.

Definição 8 ($\mathcal{M}_p \models M(t_1,\ t_2)$)

$M(t_1,\ t_2)$ é satisfeita numa estrutura $\mathcal{M}_p$ sse

$$\langle \overline{s}_p(t_1), \overline{s}_p(t_2) \rangle \in \sigma(M)(w) = M^{\mathcal{A}_p}$$

Exemplo 9

$t_1 = Prob[\alpha], \quad t_2 = Prob[\beta], \quad \varrho = M(Prob[\alpha], Prob[\beta])$.

$\langle \overline{s}_p(Prob[\alpha]), \overline{s}_p(Prob[\beta]) \rangle = \langle 0.5; 0.4 \rangle$, que por sua vez pode pertencer ou não ao conjunto $M^{\mathcal{A}_p}$.

B.1.3 Semântica - Valorações

É certo que **LEI** já possui sua semântica bem definida, possui mesmo duas versões (Uma semântica de valorações e uma de mundos plausíveis[Mar97]), mas se queremos capturar o significado de probabilidade como *grau de crença*, devemos ser capazes de interpretar os >termos> probabilísticos. Podemos fazê-lo com um mínimo de intromissão na semântica já existente.

A semântica de valorações de **LEI** conta com as definições de uma estrutura e de uma interpretação:

LEI-Structure, $\mathcal{U}_{LEI} = \langle \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, ... \rangle$

LEI-Interpretation $\mathcal{L}_{LEI} = \langle \mathcal{U}_{LEI}, \mathcal{U}, s \rangle$

Para podermos interpretar os termos numéricos usaremos uma medida que, acrescentada às definições acima, dará luz a uma estrutura e a uma interpretação probabilísticas:

A modificão começa bem antes da definição de estrutura para LEI, vamos mesmo modificar a tradicional estrutura clássica apresentada em [End72]:

Definição 23 (Estrutura $\mathcal{U} = \langle |\mathcal{U}|, \sigma \rangle$) *Uma estrutura $\mathcal{U}$ para uma linguagem de primeira ordem é um par $\langle |\mathcal{U}|, \sigma \rangle$ onde $|\mathcal{U}|$ é o universo de discurso sobre a linguagem e σ é uma função cujo domínio é o conjunto de parâmetros (qusímbolos antificadores, predicados, constantes e funções) tal que:*

- *σ atribui ao quantificador $\forall$ o conjunto não vazio $|\mathcal{U}|$, o universo de $\mathcal{U}$.*
- *σ atribui a cada predicado P uma relação de aridade n, $\mathcal{P}^{\mathcal{U}} \subseteq |\mathcal{U}|^n$*
- *σ atribui a cada constante c um membro $c^{\mathcal{U}}$ do universo $|\mathcal{U}|$*
- *σ atribui a cada função f uma operação de aridade n $\{^{\mathcal{U}}$ em $|\mathcal{U}|$*

Esta definição de **Estrutura**, sofrerá um pequeno acréscimo: ela conterá a medida de probabilidades. $\mathcal{U} = \langle |\mathcal{U}|, \sigma, \mu \rangle$ onde σ atribui a $\mathcal{P}$ a operação unária $\mathcal{P}^{\mathcal{U}}$ definida sobre o universo,

Definição 24 **(Estrutura probabilística $\mathcal{U}_p = \langle |\mathcal{U}|, |\mathcal{N}|, \sigma, \mu \rangle$)** *Uma estrutura $\mathcal{U}$ para uma linguagem de primeira ordem é uma quadrupla $\langle |\mathcal{U}|, |\mathcal{N}|, \sigma \rangle$ onde $|\mathcal{U}|$ é o universo de discurso sobre a linguagem e σ é uma função cujo domínio é o conjunto de parâmetros (quantificadores, predicados, constantes e funções) tal que:*

- *σ atribui ao quantificador $\forall$ o conjunto não vazio $|\mathcal{U}|$, o universo de $\mathcal{U}$.*
- *σ atribui a cada predicado P uma relação de aridade n $calP^{\mathcal{U}} \subseteq |\mathcal{U}|^n$*
- *σ atribui a cada constante c um membro $c^{\mathcal{U}}$ do universo $|\mathcal{U}|$*
- *σ atribui a cada função f uma operação de aridade n $calf^{\mathcal{U}}$ em $|\mathcal{U}|$*

$|\mathcal{N}|$ é um universo numérico não vazio, e μ é uma função de probabilidade discreta sobre os mundos plausíveis.

É necessário que $|\mathcal{U}|$ seja não vazio e f total. A função μ mapeia os elementos de $2^{\mathcal{W}_{LEI}}$ no intervalo real [0,1].

A definição de **LEI-Structure**, $\mathcal{U}_{LEI}$ continua sendo uma coleção não vazia de estruturas que compartilham o mesmo universo. (E agora a mesma medida).

Definição 25 **(Estrutura probabilística de LEI $\mathcal{U}_{LEIp}$)** $\mathcal{U}_{LEIp} = \langle \mathcal{U}_{p1}, \mathcal{U}_{p2}, ... \rangle$

Definição 26 **(Interpretação probabilística de LEI $\mathcal{I}_{LEIp}$)** $\mathcal{I}_{LEIp} = \langle \mathcal{U}_{LEIp}, \mathcal{U}_p, s \rangle$

Onde μ é uma função de probabilidade discreta sobre o conjunto das estruturas. Cada estrutura representa um ponto de vista. Na verdade estaremos medindo o peso das interpretações que aceitam como verdadeira uma certa fórmula. A função μ mapeia os elementos de $2^{\mathcal{C}}$ no intervalo real [0,1].

INTERPRETAÇÃO DAS FÓRMULAS ESPECIAIS

A *satisfatibilidade* de fórmulas do tipo $M(t_1,\ t_2)$, onde t_1 e t_2 são termos numéricos.

Definição 27 **($\mathcal{M}_p \models M(t_1,\ t_2)$)**
$M(t_1,\ t_2)$ é satisfeita numa estrutura $\mathcal{M}_p$ sse

$$\langle \overline{s}_p(t_1), \overline{s}_p(t_2) \rangle \in \sigma(M)(w) = M^{\mathcal{A}_p}$$

Exemplo 10

$t_1 = [\alpha], \quad t_2 = [\beta], \quad \varrho = M([\alpha],[\beta]).$

$\langle \overline{s}_p([\alpha]), \overline{s}_p([\beta]) \rangle = \langle 0.5; 0.4 \rangle$, que por sua vez pode pertencer ou não ao conjunto $M^{\mathcal{A}_p}$.

dfgdgdfg

Definição 28 ($M(t_1,\ t_2)$ *é verdade*)
$M(t_1,\ t_2)$ *é verdade numa interpretação* $\mathcal{I}_p$ *sse*

$$\langle \overline{s}_p(t_1), \overline{s}_p(t_2) \rangle \in \sigma(M)(w) = M^{\mathcal{A}_p}$$

Exemplo 11

$t_1 = [\alpha], \quad t_2 = [\beta], \quad \varrho = M([\alpha],[\beta]).$

$\langle \overline{s}_p([\alpha]), \overline{s}_p([\beta]) \rangle = \langle 0.5; 0.4 \rangle$, que por sua vez pode pertencer ou não ao conjunto $M^{\mathcal{A}_p}$.

Exemplo 12 (Interpretação das fórmulas)

Considere as seguintes fórmulas $\alpha]$ e $\neg\alpha$, com o auxílio do operador probabilístico $prob$, elas geram os termos probabilísticos $prob[\alpha]$ e $prob[\neg\alpha]$ e com o predicado numérico M obtemos a fórmula $M(prob[\alpha], prob[\neg\alpha])$ cuja interpretação se dá assim:

$$(prob[\alpha])^{(M,v)} \geq (prob[\neg\alpha])^{(M,v)}$$

$$\Big(prob[fly(tw)?]\Big)^{(M,v)} \geq \ \Big(prob[\neg fly(tw)]\Big)^{(M,v)}$$

INTERPRETAÇÃO DOS TERMOS NUMÉRICOS

Paralelamente à função $\overline{s}$, definida para o conjunto de termos não-numéricos de $\mathcal{L}_?$, devemos definir uma função $\overline{s}_p$ (veja seção 2.2.3) para os termos numéricos de $\mathcal{L}_{p?}$. Se α é uma fórmula, $[\alpha]$ é um termo numérico e seu significado é dado por $\overline{s}_p$.

Bibliografia

[Ant97] G. Antoniou.
Nonmonotonic Reasoning.
The Mit Press, London, UK, 1997.

[Aus62a] J. L. Austin.
How to Do Things with Words.
Havard University Press, Havard, USA, 1962.

[Aus62b] J. L. Austin.
Performative Uterances.
Oxford Press, Oxford, UK, 1962.

[Bac93] F. Bacchus.
Representing and Reasoning with Probabilistic Knowledge.
MIT Press, Cambridge, MA, 1993.

[BB96] H. Geffner B. Bonet.
Arguing for Decisions : a Qualitative Model of Decision Making.
In *Proc. (UAI'96)*, pages 98–105, 1996.

[BGHK96] Fahiem Bacchus, Adam J. Grove, Joseph Y. Halpern, and Daphne Koller.
From statistical knowledge bases to degrees of belief.
Artificial Intelligence, 87(1-2):75–143, 1996.

[BM93] J.E. Barreto and R.V. Moreira.
O Problema da Indução.
Edicao dos autores, Fortaleza, 1993.

[Car63] R. Carnap.
Logical Foundations of Probability.
The University of Chicago Press, Chicago, 1963.

[CC87] R. Lee C. Chang.
Simbolic Logic and Mechanical Theorem Proving.
Academic Press, Inc, Oxford, UK, 1987.

[Chu36] A. Church.
An Unsolvable Problem with Number Theory.
American Journal of Mathematics, 58:345–363, 1936.

[Dav93] M. Davis.
First Order Logic.
In C. J. Hogger Dov M. Gabbay and J. A. Robinson, editors, HandBook of Logic *In Artificial Intelligence and Logic Programming*, chapter 12, pages 31–36. Oxford Science Publications, Oxford, UK, 1993.

[dC94] N.C.A. da Costa.
Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica.
HUCITEC, São Paulo, BR, 1994.

[End72] H. B. Enderton.
A Mathematical Introduction to Logic.
Harcourt/Academic Press, San Diego, 1972.

[Ett] R.C.W. Ettinger.
Cryonics: The Probability of Rescue.
page http://www.cryonics.org/.

[FB93] J.Y. Halpern D. Koller F. Bacchus, A.J. Groove.
Form Statistics to Belief.
In *Proc. National Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–645, 1993.

[Gam91] L. T. F. Gamut.
Logic, Language, and Meaning.
The University of Chicago Press, Chicago, 1991.

[Gar88] P. Gardenfors.
Knowledge in Flux.
MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[Göd] K. Gödel.
Uber die Vollstandigkeit des Logikkalküls.
PhD thesis.

[Gef92] H. Geffner.
Default Reasoning: Causal and Conditional Theories.
MIT Press, Cambridge,USA, 1992.

[HER] Investigations in Proof Theory.
In From Frege to Gödel*: A Sourcebook in Mathematical Logic 1879-1931*.

[HM80] S. Hans and D. MacDermott.
Nomonotonic Logic and Temporal Projection.

Artificial Intelligence, 33:379–412, 1980.

[Koo40] B.O. Koopman.
The Axioms and Algebra of Intuitive Probability.
Annals of Mathematics, 41:269–000, 1940.

[Mar97] A. T. Martins.
A Sintactical and Semantical Presentation Uniform Ttreatmen for IDL-LEI Non-monotonic System.
PhD thesis, Universidade Federal de Pernanbuco, Recife, PE, 1997.

[McC59] J. McCarthy.
Programs with Common Sense.
In *Teddingtoin Conference on the Mechanization of Thought Processes*, pages 75–91, 1959.

[MD60] H. Putnam M. Davis.
A computing procedure for quantification theory.
Journal of the ACM, 7:201–215, 1960.

[MD80] D. McDermott and J. Doyle.
Nonmonotonic logic 1.
Artificial Intelligence, 13:41–72, 1980.

[MOO85] R. C. MOORE.
Semantical Consideratios on Nonmonotonic Logic.
Artificial Intelligence, 25:75–94, 1985.

[MP43] W. S. McCulloch and W. Pitts.
A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity.
Bulletin of Mathematical Biophysics, 5:115–133, 1943.

[PB91] T.H.C. Pequeno and A.R. Buchsbaum.
The Logic of Epistemic Inconsistency.
2nd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, 1991.

[Pea88] J. Pearl.
Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference.
Morgan Kaufmann, San Francisco, 1988.

[Peq90] T.H.C. Pequeno.
A Logic for Inconsistent Nomonotonic Reasoning.
Departement of Computing - Imperial College, 1990.

[Peq94] M. Pequeno.
Defeasible Reasoning with Exception First.

PhD thesis, Imperial College of Science, Technoogy and Medicine, London, UK, 1994.

[Pol92a] J. Polloc.
How to reason Defeasibly.
Artificial Intelligence, 57:1–42, 1992.

[Pol92b] J. Polloc.
Interest driven suppositional reasoning.
Journal of Automated Reasoning, 6:419–462, 1992.

[Pol92c] J. Polloc.
New Foundations for Practical easoning.
Minds and Machines, 2:113–144, 1992.

[Pol94] J. Polloc.
Justification and Defeat.
Artificial Intelligence, 67:377–408, 1994.

[Ram88] A. Ramsay.
Formal Methods Artificial Intelligence.
Canbridge University Press, Melbourne, Sidney, 1988.

[REI80] R. REITER.
A Logic for Default Theory.
Artificial Intelligence, 13:81–132, 1980.

[SV85] J. Searle and D. Vanderveken.
Foundations of Illocutionary Logic.
Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.

[Tou36] A. M. Touring.
On Computable Numbers, with Applications to the entscheindungs-problem.
In *London Math Society*, volume 42, pages 230–265, 1936.

[Wit61] L. Wittgenstein.
Traitée Logicus Philosoficus.
Galimard, Paris, 1961.