Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Mestrado em Ciência da Computação

Dedução Natural e Normalização Fraca para Lógica Linear Completa

por
Lilia Ramalho Martins

orientadora:
Profa. Ana Teresa de Castro Martins

Fortaleza
11 de dezembro de 2003

Resumo

A lógica linear proposta por Girard [Gir87, Gir93a, Gir95] tem se mostrado extremamente valiosa para a formalização de problemas típicos de Ciência da Computação. Isso se deve ao fato de que, na lógica linear, sentenças são tratadas como recursos ou ações e conseqüências lógicas como transições entre estados.

Nesse trabalho, nós revisamos cinco trabalhos recentes [Tro92, BBHdP92, Tro95, Mar00, dPNdM01] que apresentam sistemas de dedução natural para a lógica linear ou para fragmentos dessa lógica e introduzimos um novo sistema chamado NDLL de dedução natural de conclusão única para a lógica linear clássica de primeira ordem. Nós demonstramos a equivalência (no sentido de demonstrabilidade) entre o sistema NDLL e o cálculo de seqüentes linear de Girard. Além disso, nós provamos o teorema de normalização fraca e o seu companheiro usual: o princípio da subfórmula para deduções normais em NDLL.

O sistema NDLL fornece regras para a lógica linear completa, incluindo novas regras para os conectivos "Par" ($\invamp$) e "Why not" ($?$). Nós também investigamos as implicações que essas novas regras ocasionam num procedimento de normalização fraca.

Sumário

Lista de Definições

Lista de Lemas, Teoremas e Corolários

Capítulo 1

Introdução

A lógica linear proposta por Girard [Gir87, Gir93a, Gir95] tem se mostrado extremamente valiosa para a formalização de problemas típicos de Ciência da Computação. Isso se deve ao fato de que, na lógica linear, sentenças são tratadas como recursos ou ações e conseqüências lógicas como transições entre estados.

Girard propôs a lógica linear em [Gir87] através de um cálculo de seqüentes linear e de um novo sistema de dedução chamado proof-nets. Girard introduziu proof-nets como substitutas para dedução natural. Proof-nets são definidas como grafos conexos não orientados chamados proof-structures. No entanto, para reconhecer uma proof-net, um critério de corretude deve ser aplicado a uma proof-structure, o que sobrecarrega a tarefa de construir uma dedução logicamente correta nesse sistema. As proof-nets são principalmente empregadas no fragmento multiplicativo da lógica linear sem constantes e operadores exponenciais, porém elas podem ser estendidas para suportar os conectivos aditivos e as constantes como em [Gir96]. Infelizmente, as proof-nets ainda não são adequadas para lidar como o operador exponencial "Of course" (!).

O sistema de dedução natural introduzido por Gentzen em [Gen69] para a lógica clássica foi especialmente projetado para enfatizar o papel dedutivo dos símbolos lógicos e para evidenciar as dependências entre hipóteses e conclusão. É um método sintático largamente empregado que reflete de forma mais aproximada a maneira como realmente raciocinamos.

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um sistema de dedução natural para a lógica linear levando em conta as características do método proposto originalmente por Gentzen [Gen69] para a lógica clássica. Ademais, alguns resultados em teoria da prova são investigados tais como o teorema da normalização fraca e o princípio da subfórmula.

Alguns trabalhos recentes [Tro92, BBHdP92, Tro95, Mar00, dPNdM01] apresentam sistemas de dedução natural para a lógica linear. Troelstra, em seu livro [Tro92], apresentou os sistemas N-CLL e N-ILL. N-CLL indica um sistema de dedução natural linear clássico e N-ILL um sistema de dedução natural linear intuicionístico. Esses dois sistemas incluem os fragmentos aditivo e multiplicativo, apesar de não oferecerem regras para os conectivos "Par" ($\parr$) e "Why not" (?). Esses conectivos são tratados por definição usando as dualidades de *de Morgan*. Troelstra não apresentou teoremas de normalização para os sistemas N-CLL e N-ILL.

Em [BBHdP92], Benton, Bierman, Hyland e *de Paiva* propuseram o sistema ILL para a lógica linear multiplicativa intuicionística. Eles abordaram o fragmento $\{\mathbf{1}, \otimes, \multimap, !\}$ dessa lógica.

Num trabalho subseqüente [Tro95], Troelstra repensou o trabalho apresentado por Benton et al. e introduziu o sistema ILL$^+$. Os sistemas ILL e ILL$^+$ diferem apenas em alguns poucos pontos. Ambos foram normalizados. Entretanto, as provas de normalização para o sistema ILL$^+$ estão mais no espírito da normalização proposta por Prawitz para a lógica modal S4.

Em [dPNdM01], *de Medeiros* apresentou um investigação profunda sobre traduções entre lógicas distintas. O principal objetivo do trabalho dela foi usar teoremas de normalização como ponto de partida para definir novas traduções. Ela propôs o sistema NLLM, um cálculo de dedução natural para o fragmento multiplicativo da lógica linear. Ela também provou a equivalência entre o sistema NLLM e o fragmento multiplicativo do cálculo de seqüentes de Girard, além dos teoremas de normalização e traduções envolvendo esse fragmento. Todavia, assim como em [Tro92, BBHdP92, Tro95], *de Medeiros* não definiu regras para os conectivos $\parr$ e ?. Esses conectivos são tratados por definição.

Maraist [Mar00] propôs o sistema NL. Esse sistema abrange quase toda a lógica linear incluindo os fragmentos aditivo e multiplicativo, apesar de não oferecer regras para o operador ?. Notavelmente, Maraist propôs regras para o conectivo $\parr$. Contudo, essas regras são baseadas numa espécie de silogismo em virtude do fato de que uma fórmula da forma $\alpha \parr \beta$ pode ser lida como $\alpha^\perp \multimap \beta$ ou como $\beta^\perp \multimap \alpha$.

Como podemos notar, nenhum dos seis sistemas mencionados acima suporta todos os conectivos lineares. Apenas três deles (sistemas N-CLL, N-ILL e NL) abrangem o fragmento aditivo. Por outro lado, o sistema de dedução natural que apresentamos no presente trabalho contempla toda a lógica linear, incluindo os fragmentos aditivo e multiplicativo e novas regras para os conectivos $\parr$ e ?. Nós também provamos o teorema de normalização para o nosso sistema NDLL e o princípio da subfórmula.

Algumas das idéias que utilizamos para elaborar nosso sistema NDLL foram inspiradas pelo trabalho de *de Medeiros* [dPNdM01]. Pretendemos posteriormente definir traduções no espírito do trabalho dela usando, para esse fim, nosso teorema de normalização fraca para NDLL.

O presente trabalho foi desenvolvido no escopo de uma investigação mais vasta sobre o problema do raciocínio prático e seu companheiro usual: o problema de tomada de decisão. Normalmente, o problema de tomada de decisão envolve gerenciamento de recursos limitados. Dessa forma, pretendemos fazer a tentativa de usar a lógica linear para a formalização do raciocínio prático, já que essa lógica é preparada para manipular tais recursos limitados.

No próximo Capítulo, a lógica linear é apresentada através do cálculo de seqüentes. O Capítulo 3 introduz nosso sistema de dedução natural linear NDLL. No Capítulo 4, a corretude e a completude são provadas em relação ao cálculo de seqüentes de Girard, já que o nosso sistema NDLL abrange toda a lógica linear. O Capítulo 5 é devotado a comparações entre o sistema NDLL e os sistemas propostos em [Tro92, BBHdP92, Tro95, Mar00, dPNdM01]. Os teoremas de normalização para nosso sistema são apresentado no Capítulo 6. Conclusões e trabalhos futuros são expostos no último Capítulo.

Capítulo 2

Lógica Linear

2.1 Introdução

A lógica clássica é amplamente empregada para representar e resolver problemas matemáticos. Contudo, a lógica clássica não é apropriada para lidar com alguns problemas refinados envolvendo aspectos tais como tempo, recursos, estados, ações, dúvidas, entre outros.

Em 1987, Girard [Gir87] propôs a lógica linear, uma lógica com novos conectivos e sintática e semântica bastante diferentes da sintática e semântica da lógica clássica. Essa lógica envolve conceitos tais como recursos, estados e ações pelo fato de que, em geral, as regras de prova "Contração" e "Enfraquecimento" não são admitidas. Desde sua origem, a lógica linear é reconhecida como relevante para a teoria da computação.

Na próxima Seção, apresentaremos definições relevantes e uma parte do formalismo que será usado no decorrer desse trabalho. Na Seção 2.3, nós introduzimos a lógica linear e discutimos características peculiares e importantes dessa lógica. As Seções 2.4 e 2.5 apresentam o cálculo de seqüentes linear e as proof-nets respectivamente.

2.2 A linguagem da lógica linear de primeira ordem

A linguagem $\mathfrak{L}$ da lógica linear de primeira ordem usada no presente trabalho envolve conectivos para as conjunções lineares "Times" ($\otimes$) e "With" ($\&$), para as disjunções lineares "Par" ($\parr$) e "Plus" ($\oplus$), para a implicação ($\multimap$) e negação ($^{\perp}$) lineares, para as constantes lineares "Um" (1) e "Falso" ($\perp$), além de ambos operadores exponenciais "Of course" (!) e "Why not" (?), e ambos quantificadores de primeira ordem "Para todo" ($\forall$) e "Existe" ($\exists$).

Assim como em [Pra65], devemos adotar parâmetros individuais ao invés de variáveis livres. Variáveis individuais ocorrem apenas ligadas. Dessa forma, os símbolos do alfabeto $\mathcal{A}$ da linguagem de primeira ordem $\mathfrak{L}$ podem ser divididos nas seguintes categorias:

1. Símbolos auxiliares: (,).
2. Constantes lógicas:
   - (a) Constantes sentenciais: 1, $\perp$.
   - (b) Negação linear: $^\perp$.
   - (c) Operadores exponenciais: !, ?.
   - (d) Conectivos sentenciais: $\otimes$, $\invamp$, $\&$, $\oplus$, $\multimap$.
   - (e) Quantificadores de primeira ordem: $\forall$, $\exists$.
3. Variáveis individuais: Um conjunto contável de símbolos desse tipo. Usaremos as letras x, y e z para denotar variáveis individuais.
4. Parâmetros individuais: Um conjunto contável de símbolos desse tipo. Usaremos as letras a, b e c para denotar parâmetros individuais.
5. Predicados: Para cada inteiro positivo n, um conjunto (possivelmente vazio) de símbolos chamados predicados n-ários. Predicados são denotados por $P_1, P_2, \ldots$.
6. Funções: Para cada inteiro não negativo n, um conjunto (possivelmente vazio) de símbolos chamados funções n-árias. Funções são denotadas por $f_1, f_2, \ldots$.

Assumimos que nenhum dos símbolos em $\mathcal{A}$ é uma seqüência finita de outros símbolos.

Na lógica linear de primeira ordem, os quantificadores $\forall$ e $\exists$ portam-se de forma análoga ao comportamento apresentado na lógica clássica de primeira ordem. Portanto, o conceito de termos e fórmulas bem formadas na lógica linear de primeira ordem é bastante similar a esses mesmos conceitos na lógica clássica de primeira ordem. Assim, adaptamos as seguintes definições em [Pra65] para o nosso caso:

Definição 2.1 (Termo) *O conjunto de termos na lógica linear de primeira ordem é definido indutivamente como segue:*

1. *Todo parâmetro individual é um termo.*

2. *Toda função 0-ária é um termo.*

3. *Se $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos e f_i é uma função n-ária para $i > 0$ e $n > 0$, então a expressão $f_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo.*

Definição 2.2 (Fórmula atômica) *α é uma fórmula atômica se e somente se uma das seguintes condições é válida:*

1. *α é 1 ou $\perp$.*

2. *α é da forma $P_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ tal que $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos e P_i é um predicado n-ário para $i > 0$ e $n > 0$.*

Definição 2.3 (Fórmula bem formada) *O conjunto de fórmulas bem formadas (fbfs ou simplesmente fórmulas) na lógica linear de primeira ordem é definido indutivamente da seguinte forma:*

1. *Se α é uma fórmula atômica, então α é também fbf.*

2. *Se α e β são fbfs, então $(\alpha^\perp)$, $(!\alpha)$, $(?\alpha)$, $(\alpha \otimes \beta)$, $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \parr \beta)$, $(\alpha \oplus \beta)$, $(\alpha \multimap \beta)$ são também fbfs.*

3. *Se α é uma fbf, então as fórmulas $(\forall x \alpha')$ e $(\exists x \alpha')$ também são, nas quais α' é α ou é obtida a partir de α pela substituição de ocorrências de um parâmetro individual pela variável x.*

Definição 2.4 (Grau de uma fórmula) *O grau de uma fórmula α, denotado por $d(\alpha)$, é definido como o número de ocorrências de constantes lógicas em α exceto por ocorrências de 1 e $\perp$. (Assim, uma fórmula atômica é de grau 0.)*

Definição 2.5 (Pseudo-fórmula) *Uma pseudo-fórmula é uma fórmula ou é como uma fórmula exceto por conter variáveis em lugares onde uma fórmula teria parâmetros. Fórmulas são consideradas então como casos especiais de pseudo-fórmulas.*

Definição 2.6 (Símbolo principal de uma pseudo-fórmula) *Seja α uma pseudo-fórmula não atômica. Então α é exatamente de uma das seguintes formas $(\beta^\perp)$, $(!\beta)$, $(?\beta)$, $(\beta \otimes \gamma)$, $(\beta \& \gamma)$, $(\beta \parr \gamma)$, $(\beta \oplus \gamma)$, $(\beta \multimap \gamma)$, $(\forall x \beta)$ e $(\exists x \beta)$; logo o símbolo $^\perp$, $!$, $?$, $\otimes$, $\&$, $\parr$, $\oplus$, $\multimap$, $\forall$ ou $\exists$, respectivamente, é considerado o principal símbolo de α.*

Definição 2.7 (Escopo de um quantificador) *O escopo de uma certa ocorrência de $\forall$ ou $\exists$ em uma pseudo-fórmula α é a parte de α que tem essa ocorrência como símbolo principal.*

Definição 2.8 (Variável ligada numa pseudo-fórmula) *Uma ocorrência de uma variável x numa pseudo-fórmula α é ligada se ela pertence ao escopo de um quantificador seguido imediatamente por x. Numa fórmula, todas as ocorrências de variáveis são obviamente ligadas.*

Definição 2.9 (Variável livre numa pseudo-fórmula) *Uma ocorrência de uma variável x numa pseudo-fórmula α é livre se ela não pertence ao escopo de um quantificador seguido imediatamente por x.*

Notações como α^t_x e α^t_u, nas quais a letra grega α representa uma fórmula e as letras t e u termos, são usadas para denotar o resultado de substituir todas as ocorrências de t em α por x ou u, respectivamente. Em contextos nos quais uma notação como α^t_x é usada, devemos sempre assumir que t não ocorre em α no escopo de um quantificador que é seguido imediatamente por x. Uma notação como α^x_t, na qual α representa uma pseudo-fórmula e t um termo, é usada para denotar o resultado de substituir todas as ocorrências livres de x em α por t.

Letras gregas minúsculas (α, β, γ, ...) quando aparecerem desacompanhadas sempre representarão fórmulas. Quando as letras gregas minúsculas aparecerem como parte de uma outra notação, tal como em $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$, elas estarão representando pseudo-fórmulas, mas, nesses casos, a notação completa estará representando uma fórmula. Usaremos letras gregas maiúsculas (Γ, Δ, Θ, ...), exceto por Π e Σ, para representar multisets* finitos de fbfs, a não ser em casos particulares nos quais estarão explicitamente representando algo diferente. Termos são denotados pelas letras u e t. Eventualmente, é necessário indexar termos, fórmulas e multisets de fórmulas.

Definição 2.10 (Subfórmula) *A noção de subfórmula de uma fórmula α é definida indutivamente por:*

1. *α é uma subfórmula de α.*
2. *Se $(\beta^\perp)$, $(!\beta)$ ou $(?\beta)$ é uma subfórmula de α, então β também é.*
3. *Se $(\beta \otimes \gamma)$, $(\beta \parr \gamma)$, $(\beta \& \gamma)$, $(\beta \oplus \gamma)$ ou $(\beta \multimap \gamma)$ é uma subfórmula de α, então β e γ também são.*

*Multisets de fórmulas são conjuntos de fórmulas nos quais duas ocorrências de uma mesma fórmula são consideradas como elementos distintos.

4. *Se* $(\forall x\beta)$ *ou* $(\exists x\beta)$ *é uma subfórmula de* α*, então* β_t^x *também é.*

Na linguagem $\mathfrak{L}$ não há símbolo para a equivalência linear. No entanto, usaremos ocasionalmente o símbolo $\multimapboth$ para abreviar sintaticamente nome de fórmulas. Assim, $(\alpha \multimapboth \beta)$ é a abreviação de $((\alpha \multimap \beta) \otimes (\beta \multimap \alpha))$.

Para estabelecer uma notação mais compacta e flexível, podemos omitir ocorrências de parênteses em fórmulas adotando as seguintes convenções:

1. Os parênteses mais externos não precisam ser mencionados explicitamente. Por exemplo, quando escrevemos $\alpha \otimes \beta$ estamos nos referindo à fórmula $(\alpha \otimes \beta)$.

2. O símbolo da negação linear é aplicado o mais próximo possível. Por exemplo, $\alpha \otimes \beta^\perp$ é $\alpha \otimes (\beta^\perp)$.

3. Os operadores exponenciais são aplicados o mais próximo possível, sendo a convenção 2 observada prioritariamente. Por exemplo:

$$?!(?\alpha)^\perp \text{ é } (?(!((?\alpha)^\perp))).$$

4. Os quantificadores de primeira ordem são aplicados o mais próximo possível, sendo a convenção 2 observada prioritariamente. Por exemplo:

$$?\exists x!\forall y\alpha^\perp \text{ é } (?(\exists x(!(\forall y(\alpha^\perp))))).$$

5. Os símbolos de conjunção e disjunção são aplicados o mais próximo possível, sendo as convenções 2, 3 e 4 observadas prioritariamente. Por exemplo:

$$\alpha \invamp \beta \multimap !\gamma \oplus \delta \text{ é } ((\alpha \invamp \beta) \multimap ((!\gamma) \oplus \delta)).$$

6. Quando um conectivo é usado repetidamente, agrupamento ocorre à direita:

$$\alpha \& \beta \& \gamma \text{ é } \alpha \& (\beta \& \gamma).$$
$$\alpha \multimap \beta \multimap \gamma \text{ é } \alpha \multimap (\beta \multimap \gamma).$$

2.3 Generalidades relevantes sobre lógica linear

Girard [Gir95] propôs duas semânticas diferentes para a lógica linear: a semântica de fases e a semântica denotacional. A semântica de fases associa valores a fórmulas no espírito da teoria de modelos clássica tarskiana, dessa forma, essa semântica é considerada a mais tradicional para a lógica linear. A outra semântica, semântica denotacional, é apresentada por Girard como uma simplificação dos domínios de Scott.

No entanto, a lógica linear é usualmente enfocada através de abordagens sintáticas. Girard [Gir87] propôs um cálculo de seqüentes para a lógica linear e um novo sistema sintático chamado proof-nets.

Abordagens sintáticas compreendem provas de sentenças. Daqui por diante, usaremos a palavra *dedução* para denotar provas. A noção de dedução depende do sistema adotado, portanto o conceito de dedução será definido diferentemente para cada sistema apresentado.

Uma única aparição de uma certa fórmula em uma dedução define a noção de ocorrência de fórmula. Nesse Capítulo, ocasionalmente usaremos o conceito de ocorrência de fórmula. Todavia, esse conceito é apresentado mais precisamente na Definição 3.3.

Implicação linear

Na lógica clássica, uma ocorrência de fórmula é considerada como uma verdade estável, ou seja, uma vez que uma fórmula α é provada como verdadeira, podemos sempre assumir que α é verdadeira. Por outro lado, na lógica linear, fórmulas são tratadas como recursos limitados e relevantes. Assim uma fórmula na lógica linear, uma vez usada, deixa de estar disponível para uso posterior. Conseqüentemente, se queremos usar uma fórmula mais de uma vez, somos então forçados a ter mais de uma ocorrência dessa fórmula. Em [Gir93a], Girard apresentou o seguinte exemplo no qual as fórmulas α_1, α_2 e α_3 representam as seguintes ações:

α_1: gastar \$1.

α_2: obter um pacote de Camels.

α_3: obter um pacote de Malboro.

Supomos que um pacote de Camels e um pacote de Malboro custam \$1 cada. Na lógica linear, a ação $\alpha_1 \multimap \alpha_2$ significa gastar \$1 para obter um pacote de Camels. Com \$1, podemos comprar ou um pacote de Camels ou um pacote de Malboro e, depois de comprar um deles, não teremos mais \$1. Assim, na lógica linear, a partir de α_1, $\alpha_1 \multimap \alpha_2$ e $\alpha_1 \multimap \alpha_3$, podemos obter ou α_2 ou α_3, mas não ambas.

Como podemos observar, a implicação linear trata sentenças obedecendo ao paradigma fórmulas como recursos. Logo, podemos expressar a seguinte situação:

Se α e $\alpha \multimap \beta$ então β, mas α não é mais válida.

Duas conjunções

Na lógica linear, podemos contar com duas conjunções, especificamente "Times" ($\otimes$) e "With" ($\&$).

A conjunção $\otimes$ assegura que duas ações serão executadas exatamente uma vez. No exemplo ilustrado acima, a fórmula $(\alpha_1 \otimes \alpha_1) \multimap (\alpha_2 \otimes \alpha_3)$ significa gastar \$2 para comprar um pacote de Camels e um pacote de Malboro. A ação $\alpha_1 \multimap (\alpha_2 \otimes \alpha_3)$ não é válida já que, com \$1, podemos comprar apenas um pacote de cigarros. Assim, α_1 é diferente de $\alpha_1 \otimes \alpha_1$.

No entanto, a ação $\alpha_1 \multimap (\alpha_2 \& \alpha_3)$ é válida. O conectivo "With" ($\&$) expressa a disponibilidade de duas ações também, mas apenas uma delas será executada (exatamente uma vez) e devemos decidir qual delas. No caso da ação $\alpha_1 \multimap (\alpha_2 \& \alpha_3)$, com α_1 temos que decidir entre as ações α_2 e α_3. Apesar de $\&$ ter características disjuntivas, é tecnicamente considerada como uma conjunção já que, na lógica linear, podemos provar $(\alpha \& \beta) \multimap \alpha$ e $(\alpha \& \beta) \multimap \beta$.

Duas disjunções

Na lógica linear também temos duas disjunções, especificamente "Par" ($\parr$) e "Plus" ($\oplus$).

A disjunção $\parr$ é vista como dual da conjunção $\otimes$. Ela não tem um significado intuitivo claro. Girard [Gir93a] elucida que $\parr$ expressa uma dependência entre duas ações. A ação $\alpha \parr \beta$ significa que a ação α depende da ação β para ser executada e vice versa. Assim, podemos observar que $\parr$ tem características conjuntivas considerando tratar-se tecnicamente de uma disjunção. A fórmula $\alpha \parr \beta$ pode tanto ser lida como $\alpha^\perp \multimap \beta$ ou como $\beta^\perp \multimap \alpha$.

Por outro lado, temos a disjunção $\oplus$. $\oplus$ é considerada como dual de $\&$. No exemplo dos cigarros, a ação $\alpha_1 \multimap (\alpha_2 \oplus \alpha_3)$ representa gastar \$1 para comprar um pacote de Camels ou de Malboro, mas, nesse caso, não podemos mais decidir qual dos dois será comprado. $\oplus$ pode ser confundido com $\&$. A diferença é que com $\alpha \& \beta$ escolhemos entre α e β; e com $\alpha \oplus \beta$ não podemos escolher. É importante salientar que $\alpha \multimap (\alpha \oplus \beta)$ e $\beta \multimap (\alpha \oplus \beta)$ são ambas fórmulas válidas na lógica linear.

Negação linear

O conectivo "Nil" ($^\perp$) representa a negação linear. Girard [Gir93a] explica que $^\perp$ é a única operação negativa da lógica linear. Uma ação do tipo $\alpha^\perp$ expressa uma reação a uma ação do tipo α. A propriedade mais importante de $^\perp$ é que a sentença $\alpha^{\perp\perp}$ pode ser identificada por α como na lógica clássica. Ademais, $^\perp$ assegura as dualidades de *de Morgan* para os pares de conectivos: $(\otimes, \parr)$, $(\&, \oplus)$, $(!, ?)$ e $(\forall, \exists)$. Logo, as seguintes fórmulas são todas válidas:

1. $\vdash (\alpha \otimes \beta)^\perp \multimapboth (\alpha^\perp \parr \beta^\perp)$
2. $\vdash (\alpha \parr \beta)^\perp \multimapboth (\alpha^\perp \otimes \beta^\perp)$
3. $\vdash (\alpha \& \beta)^\perp \multimapboth (\alpha^\perp \oplus \beta^\perp)$
4. $\vdash (\alpha \oplus \beta)^\perp \multimapboth (\alpha^\perp \& \beta^\perp)$
5. $\vdash (!\alpha)^\perp \multimapboth ?(\alpha^\perp)$
6. $\vdash (?\alpha)^\perp \multimapboth !(\alpha^\perp)$
7. $\vdash (\forall x \alpha)^\perp \multimapboth \exists x(\alpha^\perp)$
8. $\vdash (\exists x \alpha)^\perp \multimapboth \forall x(\alpha^\perp)$

Alguns conectivos podem ser obtidos através de arranjos entre outros conectivos e a negação linear. Esse é o caso da implicação linear. A fórmula $\alpha \multimap \beta$ pode ser expressa por $\alpha^\perp \parr \beta$ por exemplo. As dualidades de *de Morgan* podem também ser usadas para representar conectivos.

A própria negação linear pode também ser representada através de outra fórmula. Nesse caso, a fórmula $\alpha^\perp$ poderia ser representada por $\alpha \multimap \perp$.

Exponenciais

Como já dissemos, na lógica linear, fórmulas são tratadas como recursos. No entanto, em certas circunstâncias, seria interessante representar verdades estáveis como fazemos na lógica clássica. A lógica linear oferece os operadores exponenciais "Of course" (!) e "Why not" (?). Uma fórmula do tipo $!\alpha$ indica que podemos ter o recurso α tanto quanto precisarmos. Dessa forma, $!\alpha$ se comporta como uma fórmula finita (porém indeterminada) da forma $\alpha \otimes \alpha \otimes \ldots \otimes \alpha$.

A noção por trás do conectivo ? não é tão clara. $?\alpha$ se comporta como uma fórmula finita (porém indeterminada) da forma $\alpha \parr \alpha \parr \ldots \parr \alpha$. O significado de ? depende do significado de $\parr$. Contudo, podemos dizer que uma fórmula da forma $?\alpha$ indica que as ocorrências do recurso α são usadas apenas se forem necessárias, caso contrário podem ser dispensadas. Em outras palavras, enquanto ! é um produtor, ? é um consumidor de fórmulas.

Constantes

Temos duas constantes lineares: "One" (1) e "False" ($\perp$).

1 é equivalente a uma fórmula da forma $\alpha \parr \alpha^{\perp}$ enquanto $\perp$ é equivalente a uma fórmula da forma $\alpha \otimes \alpha^{\perp}$. Assim, 1 é o dual de $\perp$ e vice versa. Logo, as seguintes fórmulas são ambas válidas:

1. $\vdash 1^{\perp} \multimapboth \perp$
2. $\vdash \perp^{\perp} \multimapboth 1$

2.4 Cálculo de seqüentes

O cálculo de seqüentes foi introduzido por Gentzen [Gen69] originalmente para a lógica clássica. Girard [Gir87, Gir93a, Gir95] também propôs o cálculo de seqüentes para a lógica linear. No caso linear, as regras estruturais "Contração" e "Enfraquecimento" foram suprimidas já que através delas seria possível obter características não lineares.

Na Seção seguinte, apresentaremos as regras estruturais do cálculo de seqüentes clássico, pois queremos mostrar porque "Contração" e "Enfraquecimento" foram suprimidas do cálculo de seqüentes linear. Contudo, no Apêndice A, o cálculo de seqüentes clássico completo é mostrado incluindo todas as regras das três categorias: regra axioma, regras estruturais e regras lógicas.

Regras estruturais

No cálculo de seqüentes clássico, regras que não envolvem conectivos lógicos são classificadas como regras estruturais:

Enfraquecimento:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_w \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_w$$

Contração:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_c \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_c$$

Permutação:

$$\frac{\Gamma', \alpha, \beta, \Gamma'' \vdash \Delta}{\Gamma', \beta, \alpha, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_x \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \alpha, \beta, \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta', \beta, \alpha, \Delta''}\ \mathrm{R}_x$$

Corte:

$$\frac{\Gamma' \vdash \alpha, \Delta' \quad \Gamma'', \alpha \vdash \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \Delta''}\ \mathrm{Cut}$$

Tal que Γ, Γ', Γ'', Δ, Δ' e Δ'' são seqüências de fórmulas.

Enfraquecimento

No cálculo de seqüentes clássico, as regras estruturais de enfraquecimento introduzem a monotonicidade da lógica clássica. Por exemplo, elas nos permitem deduzir $\alpha \to \beta$ a partir de β como na dedução seguinte:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\ \mathrm{Id}}{\beta, \alpha \vdash \beta}\ \mathrm{L}_w}{\beta \vdash \alpha \to \beta}\ \mathrm{R}_\to$$

As regras $\mathrm{R}_\to$ e Id são descritas no Apêndice A.

No entanto, já que a lógica linear é uma lógica relevante, ou seja, toda ocorrência de fórmula em um seqüente deve ser relevante para obter o outro lado do seqüente, as regras de enfraquecimento são rejeitadas no cálculo de seqüentes linear.

Contração

O cálculo de seqüentes clássico lida com verdades estáveis devido às regras de contração. Essas regras, por exemplo, nos permite provar o seqüente $\alpha, \alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \vdash \beta, \gamma$ da seguinte forma:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Id}}{\alpha \vdash \alpha, \alpha}\ \mathrm{R}_c \quad \dfrac{}{\beta \vdash \beta}\ \mathrm{Id}}{\alpha, \alpha \to \beta \vdash \alpha, \beta}\ \mathrm{L}_\to \quad \dfrac{}{\gamma \vdash \gamma}\ \mathrm{Id}}{\alpha, \alpha \to \beta, \alpha \to \gamma \vdash \beta, \gamma}\ \mathrm{L}_\to$$

As regras $L_{\rightarrow}$ e Id são descritas no Apêndice A.

Como a lógica linear evita verdades estáveis e lida com recursos limitados, as regras de contração também são rejeitadas pelo cálculo de seqüentes linear.

As regras contração e enfraquecimento são proibidas como regras estruturais no cálculo de seqüentes linear. Contudo, elas são reintroduzidas numa forma mais restrita e controlada através das regras dos operadores exponenciais.

Permutação

As regras estruturais de permutação nos permitem reordenar fórmulas de um mesmo lado de um seqüente. Elas pertencem ao conjunto de regras do cálculo de seqüentes linear, porém são dispensáveis, pois consideramos Γ e Δ em qualquer seqüente linear da forma $\Gamma \vdash \Delta$ como multisets ao invés de seqüências de fórmulas.

Corte

A regra estrutural de corte é provavelmente a mais famosa das regras do cálculo de seqüentes clássico. Ela oferece uma estratégia dividir para conquistar e em certos casos produz deduções menores. No entanto, essa regra gera deduções não normais. A regra de corte pertence ao conjunto de regras do cálculo de seqüentes de Girard. Contudo, como observado em [Gir95], o teorema *Hauptsatz* ou eliminação do corte é válido para esse cálculo.

Cálculo de seqüentes linear

Uma dedução em cálculo de seqüentes linear consiste em seqüentes que têm a forma $\Gamma \vdash \Delta$. Os multisets de fórmulas Γ e Δ são chamados antecedente e sucedente respectivamente. Seja $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ e $\Delta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$. O significado tencionado de $\Gamma \vdash \Delta$ é $\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \ldots \otimes \alpha_n \multimap \beta_1 \parr \beta_2 \parr \ldots \parr \beta_m$.

As regras do cálculo de seqüentes linear são mostradas a seguir:

Regras axiomas

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Id}$$

$$\frac{}{\bot \vdash}\ \mathrm{L}_F \qquad \frac{}{\vdash 1}\ \mathrm{R}_1$$

Regra do corte

$$\frac{\Gamma' \vdash \alpha, \Delta' \quad \Gamma'', \alpha \vdash \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \Delta''}\ \mathrm{Cut}$$

Regras lógicas

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, 1 \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \bot, \Delta}\ \mathrm{R}_F$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \otimes \beta \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_\otimes \qquad \frac{\Gamma' \vdash \alpha, \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \beta, \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \vdash \alpha \otimes \beta, \Delta', \Delta''}\ \mathrm{R}_\otimes$$

$$\frac{\Gamma', \alpha \vdash \Delta' \quad \Gamma'', \beta \vdash \Delta''}{\Gamma', \Gamma'', \alpha \parr \beta \vdash \Delta', \Delta''}\ \mathrm{L}_\parr \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \parr \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_\parr$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \& \beta \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{1\&}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_\&$$

$$\frac{\Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \& \beta \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{2\&}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_{1\oplus}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \oplus \beta \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_\oplus$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_{2\oplus}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash \alpha, \Delta' \quad \Gamma'', \beta \vdash \Delta''}{\Gamma', \Gamma'', \alpha \multimap \beta \vdash \Delta', \Delta''}\ \mathrm{L}_\multimap \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_\multimap$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \alpha^\perp \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_\perp \qquad \frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha^\perp, \Delta}\ \mathrm{R}_\perp$$

$$\frac{\Gamma, \alpha^x_t \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha^x_a, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_\forall$$

(a não ocorre em Γ e Δ)

$$\frac{\Gamma, \alpha^x_a \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha^x_t, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_\exists$$

(a não ocorre em Γ e Δ)

$$\frac{\Gamma, !\alpha, !\alpha \vdash \Delta}{\Gamma, !\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{c!}\ \text{(Contração)} \qquad \frac{\Gamma \vdash ?\alpha, ?\alpha, \Delta}{\Gamma \vdash ?\alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_{c?}\ \text{(Contração)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{w!}\ \text{(Enfraquecimento)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash ?\alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_{w?}\ \text{(Enfraquecimento)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, !\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{!} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash ?\alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_{?}$$

$$\frac{!\Gamma, \alpha \vdash ?\Delta}{!\Gamma, ?\alpha \vdash ?\Delta}\ \mathrm{L}_{?} \qquad \frac{!\Gamma \vdash \alpha, ?\Delta}{!\Gamma \vdash !\alpha, ?\Delta}\ \mathrm{R}_{!}$$

$!\Gamma$ significa que todas fbfs no multiset Γ são prefixadas por "!". $?\Gamma$ é igualmente definido, *mutatis mutandis*.

Definição 2.11 (Dedução em cálculo de seqüentes) *Deduções em cálculo de seqüentes são árvores de seqüentes definidas indutivamente como segue:*

1. *Toda regra axioma é uma dedução em cálculo de seqüentes.*
2. *Se Π é uma dedução em cálculo de seqüentes e r é uma regra L_1, R_F, $L_\otimes$, $R_\otimes$, $L_{1\&}$, $L_{2\&}$, $R_{1\oplus}$, $R_{2\oplus}$, $R_{\multimap}$, $L_\bot$, $R_\bot$, $L_\forall$, $R_\forall$, $L_\exists$, $R_\exists$, $L_{c!}$, $R_{c?}$, $L_{w!}$, $R_{w?}$, $L_!$, $R_?$, $L_?$ ou $R_!$, então a seguinte árvore de seqüentes também é uma dedução em cálculo de seqüentes:*

$$\frac{\Pi}{\Gamma \vdash \Delta}\ r$$

3. *Se Π_1 e Π_2 são deduções em cálculo de seqüentes e r é uma regra Cut, $R_\otimes$, $L_\otimes$, $R_\&$, $L_\oplus$ ou $L_\multimap$, então a seguinte árvore de seqüentes também é uma dedução em cálculo de seqüentes:*

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Gamma \vdash \Delta}\ r$$

Definição 2.12 (Seqüente final) *O seqüente final de uma dedução Π em cálculo de seqüentes é o seqüente que não se situa acima de nenhum outro seqüente em Π.*

Usaremos a letra grega maiúscula Π para denotar deduções. A letra Σ representará seqüências de deduções incluindo a seqüência vazia. Π e Σ podem eventualmente ser indexadas. O símbolo $\equiv$ indica a identidade sintática entre deduções.

Uma dedução em cálculo de seqüentes cujo seqüente final é $\Gamma \vdash \Delta$ pode ser denotada por:

$$\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \vdash \Delta\end{array}$$

Seja Π uma dedução em cálculo de seqüentes, então $r(\Pi)$ denota a última regra de inferência de Π, ou seja, $r(\Pi)$ é a regra cuja conclusão é o seqüente final de Π.

Definição 2.13 (Tamanho de uma dedução em cálculo de seqüentes) *O tamanho de uma dedução Π em cálculo de seqüentes, denotado por $l(\Pi)$, é definido indutivamente como segue:*

1. *Se Π é uma regra axioma, então $l(\Pi) = 1$.*
2. *Se Π é:*

$$\frac{\Pi_1}{\Gamma \vdash \Delta}\ r(\Pi)$$

   tal que $r(\Pi)$ é uma regra L_1, R_F, $L_\otimes$, $R_\invamp$, $L_{1\&}$, $L_{2\&}$, $R_{1\oplus}$, $R_{2\oplus}$, $R_\multimap$, $L_\perp$, $R_\perp$, $L_\forall$, $R_\forall$, $L_\exists$, $R_\exists$, $L_{c!}$, $R_{c?}$, $L_{w!}$, $R_{w?}$, $L_!$, $R_?$, $L_?$ ou $R_!$, então $l(\Pi) = l(\Pi_1) + 1$.

3. *Se Π é:*

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\Gamma \vdash \Delta}\ r(\Pi)$$

   tal que $r(\Pi)$ é uma regra Cut, $R_\otimes$, $L_\invamp$, $R_\&$, $L_\oplus$ ou $L_\multimap$, então $l(\Pi) = l(\Pi_1) + l(\Pi_2) + 1$.

Fragmentos multiplicativo e aditivo

Em cálculo de seqüentes, as regras "$R_\&$" e "$L_\oplus$" compartilham contextos Γ e Δ. Portanto, "$\&$" e "$\oplus$" são classificados como conectivos aditivos ou contextuais. Em contraste, "$\otimes$" e "$\invamp$" são classificados como conectivos multiplicativos ou livres de contexto.

Dessa forma, a lógica linear pode ser dividida nos fragmentos multiplicativo e aditivo, cada um desses contendo uma conjunção e uma disjunção. A negação linear, os operadores exponenciais e os quantificadores de primeira ordem pertencem a ambos fragmentos. A implicação "$\multimap$" é considerada multiplicativa porque pode ser obtida através da disjunção "$\invamp$".

As constantes lógicas podem ser divididas como segue:

Multiplicativo	**Aditivo**
$\otimes$	$\&$
$\invamp$	$\oplus$
1	
$\perp$	
$\multimap$	
$^\perp$! ? $\forall$ $\exists$	

As constantes "$\perp$" e "1" são consideradas como multiplicativas já que 1 é equivalente a uma fórmula da forma $\alpha \invamp \alpha^\perp$ enquanto que $\perp$ é equivalente a uma fórmula da forma $\alpha \otimes \alpha^\perp$.

Na lógica linear, existem duas outras constantes "Verdade" ($\top$) e "Zero" (0) consideradas como aditivas. $\top$ é equivalente a uma fórmula da forma $\alpha \oplus \alpha^\perp$ enquanto que 0 é equivalente a uma fórmula da forma $\alpha \& \alpha^\perp$.

Já que essas duas constantes aditivas são consideradas menos relevantes, não são usadas com freqüência. No entanto, no Apêndice E, nós as investigamos.

2.5 Proof-nets

Em [Gir87], Girard introduziu um novo sistema dedutivo chamado proof-nets. Proof-nets provêem uma representação baseada em grafos para deduções em lógica linear. Elas são bastante empregadas para o fragmento multiplicativo da lógica linear sem constantes e operadores exponenciais, mas elas podem ser estendidas para suportar conectivos aditivos e constantes como em [Gir96]. Infelizmente, as proof-nets ainda não são adequadas para lidar com o operador exponencial !.

Proof-nets são construídas a partir dos seguintes links:

Link axioma:

$$\alpha \qquad \alpha^\perp$$

(α e $\alpha^\perp$ são conclusões)

Link corte:

$$\alpha \qquad\qquad \alpha^{\perp}$$

(α e $\alpha^{\perp}$ são premissas)

Link times:

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \otimes \beta}$$

(α e β são premissas enquanto $\alpha \otimes \beta$ é conclusão)

Link par:

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \parr \beta}$$

(α e β são premissas enquanto $\alpha \parr \beta$ é conclusão)

Definição 2.14 (Proof-structure) *Uma proof-structure consiste num conjunto não vazio de ocorrências de fórmulas e num conjunto de links entre essas ocorrências de fórmulas. Toda ocorrência de fórmula numa proof-structure pertence a pelo menos um link. Uma ocorrência de fórmula não pode ser simultaneamente conclusão de dois links. O mesmo ocorre com premissas, uma ocorrência de fórmula não pode ser simultaneamente premissa de dois links. Uma proof-structure pode também ser definida como um grafo conexo não orientado cujos vértices são ocorrências de fórmulas e cujas arestas são links.*

Definição 2.15 (Premissa de uma proof-structure) *Numa proof-structure* Π*, seja* α *uma ocorrência de fórmula que é premissa de um certo link e não é conclusão de nenhum link, então* α *é premissa de* Π*.*

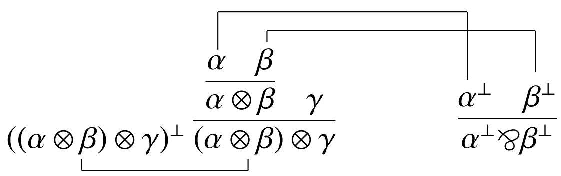
Definição 2.16 (Conclusão de uma proof-structure) *Numa proof-structure* Π*, seja* α *uma ocorrência de fórmula que é conclusão de um certo link e não é premissa de nenhum link, então* α *é conclusão de* Π*.*

Como podemos observar, uma única proof-structure pode ter muitas conclusões e premissas. Seja Γ o multiset de premissas de uma certa proof-structure Π e Δ o multiset de conclusões de Π. Nesse caso, podemos dizer que Π prova Δ a partir de Γ ou $\Gamma \vdash_{\text{ps}} \Delta$. Contudo, Π pode ser incorreta, ou seja, o seqüente $\Gamma \vdash \Delta$ pode não ser provado em cálculo de seqüentes. Assim, podemos notar que nem todas as proof-structures são corretas.

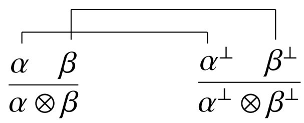
Definição 2.17 (Proof-net) *Uma proof-net é uma proof-structure que é aprovada por um critério de corretude, em outras palavras, uma proof-net é uma proof-structure correta.*

Os exemplos a seguir ilustram proof-structures corretas e incorretas:

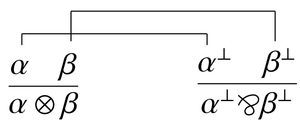
1. A seguinte proof-structure deduz $\gamma, ((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma)^\perp \vdash_{\mathrm{ps}} \alpha^\perp \parr \beta^\perp$. Ela é correta e, conseqüentemente, é uma proof-net.



2. A seguinte proof-structure deduz $\vdash_{\mathrm{ps}} \alpha \otimes \beta, \alpha^\perp \otimes \beta^\perp$. Podemos observar que ela obviamente é incorreta e, conseqüentemente, não pode ser considerada como uma proof-net.



3. A seguinte proof-structure deduz $\vdash_{\mathrm{ps}} \alpha \otimes \beta, \alpha^\perp \parr \beta^\perp$. Ela é correta e, conseqüentemente, é uma proof-net.



Vários critérios de corretude foram desenvolvidos para reconhecer uma proof-structure como proof-net. O critério de Danos-Regnier [DR99], por exemplo, é bastante simples e conhecido. É reconhecido como uma simplificação de um critério de corretude introduzido por Girard [Gir87] chamado *No shorttrip condition*. No presente trabalho, elegemos o critério de Danos-Regnier para ser brevemente introduzido. Esse critério associa um conjunto de grafos a uma proof-structure. Se cada um dos grafos nesse conjunto é conexo e acíclico, ou seja, é uma árvore, então a proof-structure é uma proof-net. Esses grafos, chamados grafos D-R, são definidos a seguir:

Definição 2.18 (Grafo D-R) *Um grafo D-R é um grafo não orientado construído a partir de uma proof-structure tal que cada ocorrência de fórmula na proof-structure é um vértice e as arestas são dispostas da seguinte forma:*

1. *Seja* $\boldsymbol{G}$ *um grafo D-R de uma proof-structure* Π. *Se um link axioma ocorre em* Π *com conclusões* α *e* $\alpha^{\perp}$, *então existe uma aresta* $(\alpha, \alpha^{\perp})$ *em* $\boldsymbol{G}$.

2. *Seja* $\boldsymbol{G}$ *um grafo D-R de uma proof-structure* Π. *Se um link corte ocorre em* Π *com premissas* α *e* $\alpha^{\perp}$, *então existe uma aresta* $(\alpha, \alpha^{\perp})$ *em* $\boldsymbol{G}$.

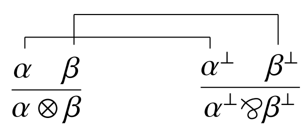
3. *Seja* $\boldsymbol{G}$ *um grafo D-R de uma proof-structure* Π. *Se um link times ocorre em* Π *com premissas* α *e* β *e conclusão* $\alpha \otimes \beta$, *então ambas arestas* $(\alpha \otimes \beta, \alpha)$ *e* $(\alpha \otimes \beta, \beta)$ *ocorrem em* $\boldsymbol{G}$.

4. *Seja* $\boldsymbol{G}$ *um grafo D-R de uma proof-structure* Π. *Se um link par ocorre em* Π *com premissas* α *e* β *e conclusão* $\alpha \parr \beta$, *então uma e somente uma das duas arestas* $(\alpha \otimes \beta, \alpha)$ *e* $(\alpha \otimes \beta, \beta)$ *ocorre em* $\boldsymbol{G}$.

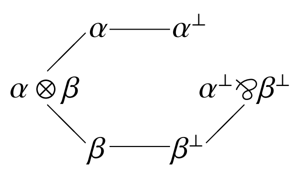
Uma proof-structure Π é uma proof-net se e somente se todo grafo D-R associado a Π é conexo e acíclico. Os seguintes exemplos ilustram aplicações de grafos D-R para reconhecer proof-nets:

1. A seguinte proof-structure Π é associada a um conjunto de dois grafos D-R, especificamente, G_1 e G_2 como mostrado abaixo. Já que ambos os grafos G_1 e G_2 são conexos e acíclicos, Π é uma proof-net:

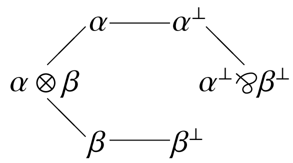
   $\Pi \equiv$



   $G_1 \equiv$

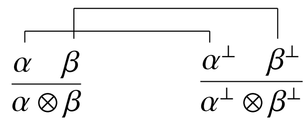


   $G_2 \equiv$

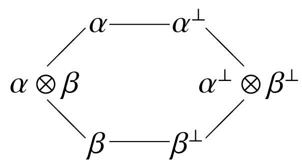


2. A seguinte proof-structure Π é associada a um único grafo D-R $\boldsymbol{G}$ como mostrado abaixo. Já que $\boldsymbol{G}$ é cíclico, Π não é proof-net:

   $\Pi \equiv$

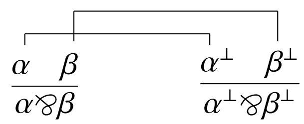
   

   $\boldsymbol{G} \equiv$

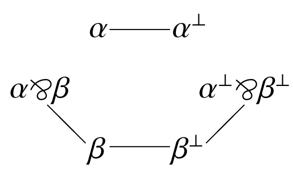
   

3. A seguinte proof-structure Π é associada a um conjunto de quatro grafos D-R, especificamente, $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$ e $\boldsymbol{G}_4$ como mostrado abaixo. Já que $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3$ e $\boldsymbol{G}_4$ são desconexos, Π não é proof-net:

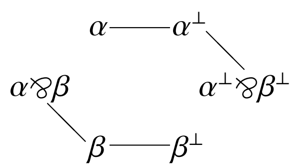
   $\Pi \equiv$

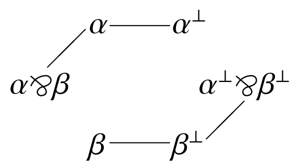
   $\boldsymbol{G}_1 \equiv$

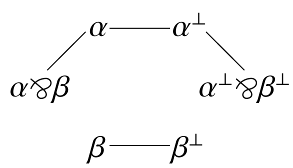
   $\boldsymbol{G}_2 \equiv$



$G_3 \equiv$



$G_4 \equiv$



2.6 Conclusão

Nesse Capítulo, apresentamos as principais características da lógica linear assim como algumas definições e notações importantes que serão bastante utilizadas nesse trabalho. Além disso, apresentamos os dois cálculos lineares mais famosos: cálculo de seqüentes e proof-nets.

É importante observar que o cálculo de seqüentes linear será usado posteriormente para provar a corretude e completude do nosso sistema de dedução natural para a lógica linear NDLL.

Capítulo 3

O Sistema de Dedução Natural NDLL

3.1 Introdução

Em [Gen69], Gentzen propôs uma nova abordagem sintática para a lógica clássica chamada dedução natural. Posteriormente, Prawitz, em seu famoso trabalho [Pra65], apresentou uma investigação profunda sobre dedução natural na perspectiva da teoria da prova.

De acordo com Prawitz [Pra65], um sistema de dedução natural pode ser definido como um conjunto de regras que determinam o conceito de dedução para uma linguagem. As regras de tal sistema devem passar a idéia de "naturais" como tencionado por Gentzen e são de dois tipos: de introdução e de eliminação para cada um dos símbolos da linguagem. Essas regras indicam, em passos atômicos, como usar os símbolos lógicos numa dedução.

Esse Capítulo é dedicado ao nosso sistema de dedução natural chamado NDLL. A linguagem da lógica linear que usaremos foi definida na Seção 2.2 é as regras que propomos serão dadas abaixo na Seção 3.3. Corretude e completude do nosso sistema dedutivo serão provadas em relação ao cálculo de seqüentes de Girard no próximo Capítulo.

Na próxima Seção, apresentamos algumas definições preliminares necessárias para apresentar as regras do sistema NDLL. A Seção 3.4 investiga algumas noções importantes em relação a deduções em NDLL. Regras alternativas para os operadores exponenciais são discutidas na Seção 3.5. A Seção 3.6 explora as regras do sistema NDLL para obter um melhor entendimento dos conectivos lineares.

3.2 Conceitos e noções preliminares

No sistema de dedução natural de Gentzen [Gen69] e de Prawitz [Pra65] para a lógica clássica, uma dedução consiste em derivar uma fórmula α a partir de um conjunto de fórmulas Γ, usando algumas regras de inferência predefinidas. No nosso sistema NDLL , Γ é um multiset de fórmulas chamadas suposições, e usaremos a notação $\Gamma \vdash_{\text{ndll}} \alpha$ para designar que, usando o sistema NDLL, podemos provar α a partir do multiset de suposições Γ.

Definição 3.1 (Regra de inferência em NDLL) *Regras de inferência (ou simplesmente regras) são os passos atômicos do sistema NDLL. Uma regra de inferência R é indicada por uma linha horizontal com $n \geq 0$ fórmulas acima e uma única fórmula abaixo como na seguinte ilustração:*

$$\frac{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n}{\beta}\, R$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são então chamadas de fórmulas superiores ou premissas de R, e β de fórmula inferior ou conclusão de R. Nesse caso, também podemos dizer que α_i, para cada $1 \leq i \leq n$, ocorre imediatamente acima de β assim como β ocorre imediatamente abaixo de α_i. O conjunto das regras de inferência do sistema NDLL serão apresentadas na Seção 3.3.

Definição 3.2 (Dedução em NDLL) *Deduções em NDLL são árvores de fórmulas definidas indutivamente como segue:*

1. *Toda fórmula é uma dedução em NDLL.*

2. *Se $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, com $n \geq 0$, são deduções em NDLL e R é uma regra de inferência em NDLL, então a seguinte árvore de fórmulas também é uma dedução em NDLL:*

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \dots \quad \Pi_n}{\alpha}\, R$$

Definição 3.3 (Ocorrência de fórmula) *Uma única aparição de uma certa fórmula em uma dedução define a noção de ocorrência de fórmula. Duas ocorrências de fórmulas são da mesma forma se ambas são ocorrências de uma mesma fórmula; são idênticas apenas se elas também situam-se na mesma posição em uma dedução.*

Dessa forma, uma dedução em NDLL consiste em um número de ocorrências de fórmulas (pelo menos uma) que combinam para formar regras de inferência do seguinte modo: Uma ocorrência de fórmula pode simultaneamente ser conclusão de uma regra e premissa de outra. Cada ocorrência de fórmula (com exceção de exatamente uma) é fórmula superior de pelo menos uma regra de inferência.

Daqui por diante, usaremos a palavra "dedução" aludindo a deduções em NDLL a não ser em casos nos quais mencionamos explicitamente de qual sistema se trata a dedução em questão. Como observamos na Seção 2.4, usaremos a letra grega maiúscula Π para denotar deduções. A letra Σ representa seqüência de deduções incluindo a seqüência vazia. Π e Σ são eventualmente indexadas. O símbolo $\equiv$ indica a identidade sintática entre deduções.

Definição 3.4 (Aplicação ou instância de uma regra de inferência) *Uma única aparição de uma certa regra de inferência em uma dedução define o conceito de uma aplicação ou instância de uma regra de inferência.*

Definição 3.5 (Hipótese) *Numa dedução, algumas fórmulas chamadas hipóteses podem ocorrer. Hipóteses são como suposições mas são "dispensadas" ou "descartadas" por aplicações de regras de inferência. Não podem ser conclusão de regras de inferência nem pertencem ao multiset de suposições.*

Como explicamos anteriormente, $\Gamma \vdash_{\text{ndll}} \alpha$ significa que através do sistema NDLL podemos provar a fórmula α a partir do multiset de suposições Γ. Então, em uma dedução Π que prova $\Gamma \vdash_{\text{ndll}} \alpha$, para cada elemento de Γ temos uma ocorrência de fórmula da mesma forma que não é "descartada" por nenhuma regra nem é conclusão de nenhuma regra. Assim, a diferença entre suposições e hipóteses é que hipóteses são sempre "descartadas" em uma dedução enquanto que suposições não são.

Definição 3.6 (Fórmula topo em uma dedução) *Uma fórmula topo numa dedução Π é uma ocorrência de fórmula que não está imediatamente abaixo de nenhuma ocorrência de fórmula em Π. Assim, uma fórmula topo é ou uma suposição ou uma hipótese.*

Definição 3.7 (Fórmula final de uma dedução) *A fórmula final de uma dedução Π é a ocorrência de fórmula que não está imediatamente acima de nenhuma ocorrência de fórmula em Π.*

Podemos aplicar o conceito de ocorrência de fórmula a hipóteses, fórmulas topo e fórmulas finais. Nesses casos, podemos usar "ocorrência de hipótese", "ocorrência de fórmula topo" ou "ocorrência de fórmula final" para designar uma ocorrência de fórmula que também é uma hipótese, uma fórmula topo ou uma fórmula final respectivamente.

Definição 3.8 (Traçado) *Uma seqüência* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *de ocorrências de fórmulas em uma dedução* Π *é uma traçado em* Π *se:*

1. α_1 *é uma fórmula topo em* Π.
2. α_i *está situada imediatamente acima de* α_{i+1} *em* Π *para cada* $i < n$.
3. α_n *é a fórmula final de* Π.

Nesse caso, podemos dizer que α_i *está acima de* α_j *se* $i < j$, *e podemos dizer que* α_i *está abaixo de* α_j *se* $i > j$.

Definição 3.9 (Subdedução determinada por uma fórmula) *Se* α *é uma ocorrência de fórmula numa dedução* Π, *a subdedução de* Π *determinada por* α *é a dedução obtida a partir de* Π *pela remoção de todas as fórmulas exceto* α *e as fórmulas acima de* α.

Definição 3.10 (Subdedução imediata) *Seja* R *uma aplicação de regra de inferência em uma dedução* Π, *e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *as premissas de* R. *A subdedução determinada por* α_i, *para cada* $1 \leq i \leq n$, *é uma subdedução imediata de* R.

Definição 3.11 (Fórmula vizinha) *Sejam* α *e* β *premissas de uma mesma instância de regra de inferência numa dedução, então* α *é vizinha de* β *e vice versa.*

Definição 3.12 (Tamanho de uma dedução em NDLL) *O tamanho de uma dedução* Π *em NDLL, denotado por* $l(\Pi)$ *é o número de ocorrências de fórmulas em* Π.

O conceito de fórmulas essencialmente modais foi usado por Prawitz em [Pra65] para definir regras de dedução natural para operadores modais nas lógicas S4 e S5. Adaptamos esse conceito para definir nossas regras exponenciais para os operadores ! e ?.

Definição 3.13 (Formulas essencialmente !-modais e ?-modais) *Formulas essencialmente* !*-modais e* ?*-modais são definidas indutivamente da seguinte forma:*

1. 1 *é uma fórmula essencialmente* !*-modal.*
2. $\perp$ *é uma fórmula essencialmente* ?*-modal.*
3. $!\alpha$ *é uma fórmula essencialmente* !*-modal.*

4. *$?\alpha$ é uma fórmula essencialmente $?$-modal.*

5. *Se α e β são fórmulas essencialmente $!$-modais, então $\alpha \otimes \beta$ também é.*

6. *Se α e β são fórmulas essencialmente $?$-modais, então $\alpha \parr \beta$ também é.*

7. *Se α é uma fórmula essencialmente $?$-modal, então $\alpha^\perp$ é fórmula essencialmente $!$-modal.*

8. *Se α é uma fórmula essencialmente $!$-modal, então $\alpha^\perp$ é fórmula essencialmente $?$-modal.*

Usaremos as seguintes notações em relação a regras de inferência e deduções em NDLL:

1. Seja α uma ocorrência de hipótese descartada por uma aplicação R de regra de inferência em uma dedução Π, então α ocorre em Π indexada por um inteiro positivo j (como α^j) tal que:

   (a) j é indicada no lado direito de R entre parênteses como segue:

   $$\frac{\Sigma}{\beta}\, R_{(j)}$$

   (b) j pode indexar outra ocorrência de hipótese da mesma forma que α. Nesse caso, toda ocorrência de hipótese indexada por j é descartada pela mesma aplicação R.

   (c) ocorrências de hipóteses que não são da mesma forma de α ou que são descartadas por aplicação de regra diferente de R não podem ser indexadas pelo mesmo inteiro j.

2. Duas ocorrências de fórmulas de uma mesma forma α são uma mesma hipótese em uma dedução Π se elas são indexadas por um mesmo inteiro positivo em Π. Se elas são indexadas por números diferentes, logo são também hipóteses diferentes.

3. Uma notação como $[\alpha]$ indica um número arbitrário (possivelmente zero) de ocorrências da fórmula α.

4. Uma notação como $[\alpha]^j$ indica um número arbitrário (possivelmente zero) de ocorrências de hipóteses da forma α indexadas pelo mesmo inteiro positivo j e, conseqüentemente, descartadas por uma mesma aplicação de regra de inferência.

5. $\Gamma^{j_1 \ldots j_n}$ denota um multiset (possivelmente vazio) de n ocorrências de hipóteses e um número arbitrário de suposições, cada hipótese nesse multiset é rotulada por um índice j_i com $1 \leq i \leq n$.

6. Uma dedução cuja fórmula final é α pode ser denotada por:

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ \alpha \end{array}$$

7. Uma dedução cujas subdeduções imediatas são $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ e α é sua fórmula final pode ser denotada por:

$$\frac{\Pi_1 \ldots \Pi_n}{\alpha}$$

8. Uma dedução de $\Gamma \mid_{\overline{\text{ndll}}} \alpha$ pode ser denotada por:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma \\ \alpha \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \alpha \end{array}$$

9. Uma dedução de $\Gamma, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid_{\overline{\text{ndll}}} \beta$ pode ser denotada:

$$\begin{array}{c} \Gamma\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \Sigma \\ \beta \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \Sigma \\ \beta \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \Gamma\ \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \vdots \\ \beta \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \alpha_1 \ldots \alpha_n \\ \vdots \\ \beta \end{array}$$

   Podemos notar que não é preciso indicar explicitamente o multiset Γ.

10. Seja Π uma dedução de $\Gamma \mid_{\overline{\text{ndll}}} \alpha$ com $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$. Seja T_i, para cada $1 \leq i \leq n$, o traçado entre γ_i e α. Em Π, cada T_i contém uma certa ocorrência de fórmula β_j tal que $1 \leq j \leq m$ e $m \leq n$. Então, Π pode ser denotada por:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ [\beta_1 \ldots \beta_m] \\ \vdots \\ \alpha \end{array}$$

11. Seja α uma fórmula topo de uma dedução Π. Seja Π' a dedução obitida a partir de Π pela sobreposição de Σ acima da fórmula topo α de Π. Então, Π' pode ser denotada por:

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ \alpha \\ \Pi \end{array}$$

12. Seja $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ uma seqüência de deduções e Γ_i, para cada $1 \leq i \leq n$, o multiset de suposições de Π_i. Então a seqüencia $\Pi_1, \ldots \Pi_n$ pode ser denotada por:

$$\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\end{array}$$

onde Γ é $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$.

13. $r(\Pi)$ denota a última regra de inferência usada em Π, ou em outras palavras, $r(\Pi)$ é a aplicação de regra de inferência cuja conclusão é a fórmula final de Π.

14. Σ_t^a denota o resultado da substituição de todas as ocorrências de a por t em todas as fórmulas que ocorrem nas deduções que pertencem à seqüencia Σ.

Definição 3.14 (Dependência) *Numa dedução Π, uma ocorrência de fórmula depende de uma fórmula topo α se está abaixo de α e, se α for hipótese, acima da fórmula inferior da aplicação de regra de inferência que descarta α. Uma fórmula topo depende apenas de si mesma.*

3.3 Regras de inferência de NDLL

Regras de introdução são indicadas pela letra "I" e regras de eliminação pela letra "E". A letra "C" e "W" indicam regras de contração e enfraquecimento respectivamente. "$\perp_c$" indica a regra de redução ao absurdo.

As regras de inferências do nosso sistema de dedução linear NDLL são apresentadas a seguir:

Implicação linear

$$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \multimap \beta}\ \mathrm{I}_{\multimap(j)} \qquad\qquad \dfrac{\alpha \quad \alpha \multimap \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{\multimap}$$

Essas regras se assemelham as regras da implicação clássica, mas é importante notar que apenas uma única ocorrência da hipótese α é descartada pela regra $\mathrm{I}_{\multimap}$ enquanto que na dedução natural clássica isso não ocorre*.

*Veja Apêndice B no qual um sistema de dedução natural clássico é apresentado

Conjunções e disjunções

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \otimes \beta}\ \mathrm{I}_{\otimes}$$

$$\frac{\alpha \otimes \beta \qquad \begin{matrix}\alpha^{j} \quad \beta^{k} \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{\otimes(j,k)}$$

$$\frac{\begin{matrix}\alpha^{\perp j} \quad \beta^{\perp k} \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\alpha \parr \beta}\ \mathrm{I}_{\parr(j,k)}$$

$$\frac{\alpha \parr \beta \quad \alpha^{\perp} \quad \beta^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\parr}$$

$$\frac{\alpha \& \beta}{\alpha}\ \mathrm{E}_{1\&}$$

$$\frac{\begin{matrix}\Gamma^{j_1 \cdots j_n} \\ \vdots \\ \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma^{j_1 \cdots j_n} \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \& \beta}\ \mathrm{I}_{\&}$$

$$\frac{\alpha \& \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{2\&}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \oplus \beta}\ \mathrm{I}_{1\oplus}$$

$$\frac{\alpha \oplus \beta \qquad \begin{matrix}\Gamma^{j_1 \cdots j_n}\ \alpha^{k_1} \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma^{j_1 \cdots j_n}\ \beta^{k_2} \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

$$\frac{\beta}{\alpha \oplus \beta}\ \mathrm{I}_{2\oplus}$$

É importante notar que ambas premissas da regra $\mathrm{I}_{\&}$ dependem do mesmo multiset de fórmulas topo. Dessa forma, em uma dedução Π, seja R uma aplicação de uma regra $\mathrm{I}_{\&}$ cujas premissas são α e β. Se a premissa α depende de uma fórmula topo γ, então a premissa β depende de uma ocorrência diferente de γ em Π. Se γ é uma hipótese, ambas ocorrência de γ são descartadas por uma mesma aplicação de regra de inferência ocorrendo abaixo de

R. Se γ é uma suposição, então o multiset Γ de suposições de Π contém apenas uma única ocorrência da suposição γ.

Uma condição similar acontece com a regra $R_\oplus$. Isso ocorre porque $\&$ e $\oplus$ são conectivos contextuais.

Quantificadores

$$\frac{\alpha_a^x}{\forall x\alpha}\,\mathrm{I}_\forall$$

(a não ocorre em qualquer fórmula topo da qual α_a^x depende.)

$$\frac{\forall x\alpha}{\alpha_t^x}\,\mathrm{E}_\forall$$

$$\frac{\alpha_t^x}{\exists x\alpha}\,\mathrm{I}_\exists$$

$$\frac{\exists x\alpha \qquad \begin{matrix}\alpha_a^{x\,j}\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{E}_{\exists(j)}$$

(a não ocorre em $\exists x\alpha$, em β ou em qualquer fórmula topo da qual a ocorrência mais acima de β depende, excluindo α_a^x.)

Na lógica linear, os quantificadores de primeira ordem $\forall$ e $\exists$ se comportam de forma semelhante como na lógica clássica de primeira ordem. Assim, essas regras acima são similares às regras dos quantificadores num sistema de dedução natural clássico[†].

[†]Veja Apêndice B no qual um sistema de dedução natural clássico é apresentado

Operadores exponenciais

$$\dfrac{\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n \qquad \begin{array}{c} \alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n} \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{!\beta}\ \mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}$$

($n \geq 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são fórmulas essencialmente !-modais e β não depende de nenhuma outra ocorrência de fórmula topo além de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Assim, se $n = 0$, β é um teorema.)

$$\dfrac{!\alpha}{\alpha}\ \mathrm{E}_!$$

$$\dfrac{\alpha}{?\alpha}\ \mathrm{I}_?$$

$$\dfrac{?\alpha \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_n \qquad \begin{array}{c} \beta_1^{j_1} \quad \dots \quad \beta_n^{j_n} \quad \alpha^k \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k)}$$

($n \geq 0$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ são fórmulas essencialmente !-modais, γ é fórmula essencialmente ?-modal e não depende de qualquer fórmula topo além de $\beta_1, \dots, \beta_n$ e α.)

$$\dfrac{\alpha \qquad \begin{array}{c} \alpha^j \quad \alpha^j \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta}\ \mathrm{C}_{!(j)}$$

(α é essencialmente !-modal.)

$$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\beta}\ \mathrm{W}_!$$

(α é essencialmente !-modal.)

Constantes e a negação linear

$$\dfrac{}{1}\ \mathrm{I}_1 \qquad\qquad \dfrac{1 \quad \alpha}{\alpha}\ \mathrm{E}_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\alpha^\perp}\ \mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad\qquad \dfrac{\alpha \quad \alpha^\perp}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

A fórmula $\alpha^\perp$ poderia ter sido apresentada como uma abreviação sintática da fórmula $\alpha \multimap \perp$. Nesse caso, as regras $\mathrm{I}_\perp$ e $\mathrm{E}_\perp$ seriam dispensadas e seriam substituídas por $\mathrm{I}_\multimap$ e $\mathrm{E}_\multimap$ respectivamente.

Redução ao absurdo

$$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\alpha}\ \perp_{c(j)}$$

No Apêndice D, o conjunto das regras de NDLL é apresentado numa forma mais contingua.

3.4 Noções referentes a deduções

Apresentamos a seguir algumas noções importantes concernentes a deduções:

Definição 3.15 (Premissa maior de uma regra) *Nas regras de eliminação apresentadas na Seção 3.3, a premissa que contém a constante lógica "eliminada" é dita ser a premissa maior. O mesmo é dito sobre a primeira premissa (na ordem da esquerda para a direita) de uma regra $C_!$ ou $W_!$. Em outras palavras, a premissa "contraída" ou "enfraquecida" também é dita ser a premissa maior de sua respectiva regra.*

Definição 3.16 (Premissa menor de uma regra) *Nas regras $C_!$, $W_!$ e de eliminação apresentadas na Seção 3.3, uma premissa que não é a premissa maior é dita ser premissa menor.*

Podemos notar que uma mesma regra pode ter várias premissas menores, mas apenas uma premissa maior.

Definição 3.17 (Premissa intermediária) *Uma premissa α de uma aplicação de $I_!$ ou $E_?$ é uma premissa intermediária se qualquer uma das seguintes condições ocorre:*

1. *α é uma premissa de uma aplicação de $I_!$ mas não é a última premissa na ordem da esquerda para a direita.*

2. *α é uma premissa menor de uma aplicação de $E_?$ mas não é a última premissa menor na ordem da esquerda para a direita.*

Definição 3.18 (Subdedução) *Uma árvore de fórmulas Π' contida em uma dedução Π é uma subdedução de Π apenas se Π' é uma dedução válida em NDLL, ou seja, as ocorrências de fórmulas topo em Π' se comportam como hipóteses e suposições para as aplicações de regra de inferência em Π'.*

Seja Π uma dedução em NDLL e β uma ocorrência de fórmula que não é fórmula topo em Π. Seja Π' uma árvore de fórmula contida em Π tal que β é fórmula topo em Π' e α é a fórmula final de Π'. Para verificar se Π' é uma subdedução de Π, primeiro checamos, em Π, se β não depende de nenhuma fórmula topo da qual α também não dependa. Então checamos se entre β e α existe alguma aplicação das seguintes regras: $I_\&$, $E_\oplus$, $I_\forall$, $E_\exists$, $I_!$ e $E_?$. Essas regras obedecem restrições sobre fórmulas topo. Se qualquer uma delas ocorrer entre β e α é necessário checar se β obedece tais restrições em Π'. Esse mesmo procedimento deve ser repetido para cada uma das fórmulas topo de Π'.

Em particular, podemos notar que uma subdedução determinada por qualquer ocorrência de fórmula numa dedução Π atende essas restrições já que suas fórmulas topo são também fórmulas topo de Π.

3.5 Regras alternativas para exponenciais

A regra de introdução para o operador ! poderia ter sido apresentada numa forma alternativa como segue:

$$
\begin{array}{c}
\Gamma \\
\vdots \\
[\alpha_1 \ldots \alpha_n] \\
\vdots \\
\dfrac{\beta}{!\beta}\ \mathrm{I}'_!
\end{array}
$$

($\alpha_1 \ldots \alpha_n$ são fórmulas essencialmente !-modais e a árvore de fórmulas cujas fórmulas topo são $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ e fórmula final é β é uma subdedução válida)

Essa regra $\mathrm{I}'_!$ é baseada na regra de introdução apresentada por Prawitz para o operador "Necessário" ($\Box$) da lógica modal S4 como podemos ver no Apêndice C. Troelstra [Tro95] usou esse mesmo estilo para definir sua regra de introdução do operador linear !.

Contudo, regras modais baseadas no estilo Prawitz/Troelstra requerem a existência de uma certa fórmula essencialmente !-modal no traçado que liga a premissa da regra e cada uma das fórmulas topo das quais essa premissa depende, caracterizando assim, um critério de corretude não local. Essa é realmente uma condição bastante onerosa, pois precisa ser checada ao final de cada derivação.

Além disso, a regra apresentada por Prawitz para S4 é, de fato, problemática. Em [dPNdM03], *de Medeiros* apresentou um contra-exemplo no qual uma redução envolvendo a regra do absurdo clássico falha por causa de uma aplicação da regra de introdução do $\Box$. Abaixo, adaptamos o contra-exemplo de *de Medeiros* para a lógica linear.

Seja NDLL' um sistema de dedução natural obtido a partir de NDLL pela substituição da nossa regra $\mathrm{I}_!$ pela regra $\mathrm{I}'_!$. Logo a seguinte dedução Π_1 é uma dedução de NDLL':

$\Pi_1 \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(!\alpha)^{\perp 1} \quad (!\alpha)^{\perp} \multimap \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{\multimap} \quad \beta^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}}{!\alpha}\ \perp_{c(1)}}{\alpha}\ \mathrm{E}_! \quad !\gamma}{\alpha \otimes !\gamma}\ \mathrm{I}_{\otimes}}{!(\alpha \otimes !\gamma)}\ \mathrm{I}'_!}{}
$$

Nesse caso, as ocorrência de fórmula da forma $!\alpha$ e $!\gamma$ em Π_1 garantem a corretude da aplicação da regra $\mathrm{I}'_!$. Como $!\alpha$ é conclusão de $\perp_c$ e, ao mesmo tempo, premissa maior de uma regra de eliminação, então $!\alpha$ é uma ocorrência de fórmula máxima [‡] e, portanto, deve ser eliminada num processo de normalização. A redução adequada para esse caso de ocorrência de fórmula máxima é a seguinte[§]:

$$
\begin{array}{c}
\alpha^{\perp j} \\
\Sigma_1 \\
\dfrac{\dfrac{\perp}{\alpha}\;\perp_{c(j)} \qquad \Sigma_2}{\beta}\;R \\
\Pi
\end{array}
\qquad \rhd\rhd \qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^k \quad \Sigma_2}{\beta}\;R \qquad \beta^{\perp l}}{\perp}\;\mathrm{E}_\perp}{\alpha^\perp}\;\mathrm{I}_{\perp(k)} \\
\Sigma_1 \\
\dfrac{\perp}{\beta}\;\perp_{c(l)} \\
\Pi
\end{array}
$$

Na redução acima, R é uma regra de eliminação ou uma aplicação de $\mathrm{C}_!$ ou $\mathrm{W}_!$, e α é a premissa maior de R. Σ_2 pode estar a esquerda de α e pode também ser uma seqüencia vazia.

Assim obtemos a dedução Π_2 resultante da aplicação da redução descrita acima à dedução Π_1:

$\Pi_2 \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\alpha^2}{\alpha}\;\mathrm{E}_! \qquad \alpha^{\perp 3}}{\perp}\;\mathrm{E}_\perp}{(!\alpha)^\perp}\;\mathrm{I}_{\perp(2)} \qquad (!\alpha)^\perp \multimap \beta}{\beta}\;\mathrm{E}_\multimap \qquad \beta^\perp}{\perp}\;\mathrm{E}_\perp}{\alpha}\;\perp_{c(3)} \qquad !\gamma}{\alpha\otimes !\gamma}\;\mathrm{I}_\otimes}{!(\alpha\otimes !\gamma)}\;\mathrm{I}'_!
$$

Notadamente, em Π_2 as retrições da regra $\mathrm{I}'_!$ não são obedecidas, pois o traçado entre a premissa $\alpha\otimes!\gamma$ de $\mathrm{I}'_!$ e a fórmula topo $\beta^\perp$, por exemplo, não contém nenhuma fórmula essencialmente !-modal.

Por outro lado, usando nossa regra $\mathrm{I}_!$, Π_1 é traduzida para a seguinte dedução Π_1^*:

[‡]Veja definição 6.2

[§]Veja Seção 6.3 na qual são apresentadas as reduções

$\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(!\alpha)^{\perp 1} \quad (!\alpha)^{\perp} \multimap \beta}{\beta}\,\mathrm{E}_{\multimap} \quad \beta^{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{!\alpha}\,\perp_{c(1)} \qquad !\gamma \qquad \dfrac{\dfrac{!\alpha^2}{\alpha}\,\mathrm{E}_! \quad !\gamma^3}{\alpha\otimes !\gamma}\,\mathrm{I}_{\otimes}}{!(\alpha\otimes !\gamma)}\,\mathrm{I}_{!(2,3)}$$

Também em Π_1^*, $!\alpha$ é uma ocorrência de fórmula máxima e a redução apropriada para esse caso é da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{\alpha}\,\perp_{c(j)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \beta_1^{l_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(k,l_1,\ldots,l_n)}\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^{j_1} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \beta_1^{l_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(k,l_1,\ldots,l_n)} \quad (!\gamma)^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\alpha^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{!\gamma}\,\perp_{c(j_2)}\\ \Pi\end{array}$$

Na redução acima, a premissa intermediária α da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa intermediária β_i tal que $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa intermediária α também está a direita de β_i.

Assim obtemos a dedução Π_2^* resultante da aplicação da redução descrita acima à dedução Π_1^*:

$\Pi_2^* \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{!\alpha^4 \quad !\gamma \quad \dfrac{\dfrac{!\alpha^2}{\alpha}\,\mathrm{E}_! \quad !\gamma^3}{\alpha\otimes !\gamma}\,\mathrm{I}_{\otimes}}{!(\alpha\otimes !\gamma)}\,\mathrm{I}_{!(2,3)} \quad (!(\alpha\otimes !\gamma))^{\perp 5}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{(!\alpha)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(4)} \quad (!\alpha)^{\perp} \multimap \beta}{\beta}\,\mathrm{E}_{\multimap} \quad \beta^{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{!(\alpha\otimes !\gamma)}\,\perp_{c(5)}$$

Podemos notar que a dedução resultante em NDLL Π_2^* é correta.

A nossa regra de introdução para o operador !, como apresentada na Seção 3.3, é baseada na regra "Promotion" apresentada em [BBHdP92] para a lógica linear intuicionística. A regra "Promotion" é como segue:

$$\dfrac{!\alpha_1 \quad \ldots \quad !\alpha_n \qquad \begin{matrix} !\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad !\alpha_n^{j_n} \\ \vdots \\ \beta \end{matrix}}{!\beta}\ \text{Promotion}_{(j_1,\ldots,j_n)}$$

Em nossa versão da introdução do operador "Of Course" as premissas intermediárias são fórmulas essencialmente !-modais. Por outro lado, na regra "Promotion", as premissas intermediárias são simplesmente da forma $!\alpha$. Essa diferença ocorre porque se a regra "Promotion" fosse usada no lugar de nossa regra $\text{I}_!$ não poderíamos prova a completude de nosso sistema já que, no sistema NDLL, ? é um símbolo primitivo. Para demonstrar esse resultado, seja NDLL' o sistema de dedução natural obtido de NDLL pela substituição da regra $\text{I}_!$ pela regra "Promotion". O Teorema F.1 no Apêndice F prova que NDLL' é incompleto.

Outro resultado de incompletude relacionado com a regra "Promotion" é o seguinte: seja NDLL" o sistema de dedução natural obtido de NDLL pela substituição respectiva das regras $\text{I}_!$, $\text{E}_?$, $\text{C}_!$ e $\text{W}_!$ pelas regras "Promotion", $\text{E}_?$', $\text{C}_!$' e $\text{W}_!$' mostradas abaixo:

$$\dfrac{?\alpha \quad !\beta_1 \quad \ldots \quad !\beta_n \qquad \begin{matrix} !\beta_1^{j_1} \quad \ldots \quad !\beta_n^{j_n} \quad \alpha^k \\ \vdots \\ \gamma \end{matrix}}{\gamma}\ \text{E}_?{'}_{(j_1,\ldots,j_n,k)}$$

($n \geq 0$, γ é da forma $?\delta$ ou $\perp$ e não depende de qualquer ocorrência de fórmula topo além de $!\beta_1, \ldots, !\beta_n$ e α.)

$$\dfrac{!\alpha \qquad \begin{matrix} !\alpha^j \quad !\alpha^j \\ \vdots \\ \beta \end{matrix}}{\beta}\ \text{C}_!{'}_{(j)}$$

$$\frac{!\alpha \quad \beta}{\beta}\ \mathrm{W}_!\text{'}$$

O Teorema F.2 no Apêndice F prova que NDLL" também é incompleto.

Por outro lado, nosso sistema NDLL é correto e completo conforme demonstrações no Capítulo 4.

3.6 Significado dos conectivos

Usando NDLL pretendemos obter um melhor entendimento dos conectivos lineares. Algumas considerações significantes surgem pela comparação entre o sistema de dedução natural clássico e nosso sistema NDLL[¶]. A regra de introdução $\mathrm{I}_{\rightarrow}$ para a implicação clássica $\rightarrow$, por exemplo, é da forma:

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha]^j \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \rightarrow \beta}\ \mathrm{I}_{\rightarrow(j)}$$

Os colchetes que envolvem a hipótese α indica que $\mathrm{I}_{\rightarrow}$ pode descartar qualquer conjunto de ocorrências da hipótese α, incluindo o conjunto vazio. Por outro lado, nossa regra de introdução $\mathrm{I}_{\multimap}$ para a implicação linear $\multimap$ descarta precisamente uma ocorrência da hipótese α. Em outras palavras, na lógica linear, a hipótese α é tratada como um recurso limitado e relevante pela implicação linear.

Uma divergência análoga ocorre entre a regra de introdução para a negação clássica $\neg$ e a regra de introdução para a negação linear $^{\perp}$. A regra de introdução para a negação no sistema de dedução natural clássico é da seguinte forma:

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha]^j \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg\alpha}\ \mathrm{I}_{\neg(j)}$$

Várias ocorrências da hipótese α podem ser descartadas por uma única aplicação de $\mathrm{I}_{\neg}$. Por outro lado, na lógica linear, a hipótese α da regra $\mathrm{I}_{\perp}$ é

[¶]Veja Apêndice B no qual um sistema de dedução natural clássico é apresentado descartada precisamente uma vez. Isso ocorre devido ao fato de que a negação linear pode ser obtida através da implicação linear $\multimap$ e da constante linear para a falsidade $\bot$, já que $\alpha^\bot$ é equivalente a $\alpha \multimap \bot$.

Em geral, regras que descartam hipóteses no sistema NDLL descartam uma única ocorrência de cada hipótese. Exceções ocorrem quando as regra aditivas $I_\&$ e $E_\oplus$ são usadas. De certa forma, elas duplicam ocorrências de fórmulas de uma mesma hipóteses, assim, uma regra pode descartar um número par de ocorrências de uma mesma hipótese numa dedução na qual $I_\&$ e/ou $E_\oplus$ são aplicadas. Contudo, mesmo nesses casos, hipóteses continuam tendo um caráter de recursos limitados e relevantes.

Prosseguindo com comparações, uma diferença sutil é observada entre a conjunção multiplicativa linear $\otimes$ e a conjunção clássica $\wedge$. Nossa regra de introdução $I_\otimes$ é similar a $I_\wedge$ e indica que se temos α e β podemos concluir $\alpha \otimes \beta$. Isso evidentemente caracteriza $\otimes$ como conjunção. No entanto, na regra de eliminação para o conectivo $\otimes$ temos uma subdedução da forma:

$$\begin{array}{c} \alpha^j \quad \beta^k \\ \vdots \\ \gamma \end{array}$$

Isso indica que temos que lidar com ambas subfórmulas α e β de $\alpha \otimes \beta$, já que são recursos relevantes. Já as regras de eliminação para $\wedge$ concluem ou α ou β, cada um de maneira independente. As regras clássicas de eliminação para $\wedge$ são análogas às nossas regras de eliminação para o conectivo $\&$:

$$\frac{\alpha \& \beta}{\alpha}\, E_{1\&} \qquad \text{e} \qquad \frac{\alpha \& \beta}{\beta}\, E_{2\&}$$

Na lógica linear, $\alpha \& \beta$ expressa a disponibilidade de duas ações α e β, mas que apenas uma delas é executada e devemos decidir qual.

Numa aplicação da regra $I_\&$ cujas premissas são α e β, α depende de ocorrências de hipóteses similares às ocorrências de hipóteses das quais β depende. Essas ocorrências similares têm um mesmo índice e são descartadas num único passo. Dizemos ainda que são uma mesma hipótese. Dessa forma, α e β compartilham hipóteses. Em outras palavras, α e β compartilham contexto. Logo, $\&$ é um conectivo aditivo.

O conectivo $\invamp$ é considerado de entendimento difícil. Como observamos na Seção 2.3, $\invamp$ expressa uma dependência entre duas ações. As regras de inferência $I_\invamp$ e $E_\invamp$ confirmam essa idéia. Na regra $I_\invamp$, por exemplo, temos uma subdedução da forma:

$$\begin{array}{c} \alpha^{\bot x} \quad \beta^{\bot y} \\ \vdots \\ \bot \end{array}$$

$\alpha^\perp$ sugere que α não é executada. Assim, a subdedução acima indica que temos uma inconsistência ($\perp$) quando ambas ações α e β não podem ser executadas simultaneamente. Pela regra $\mathrm{I}_\parr$, nessas circunstâncias, podemos concluir $\alpha \parr \beta$.

Podemos notar que a regra $\mathrm{I}_\parr$ lembra a regra de redução ao absurdo. Assim, seria interessante construir uma versão intuicionística do sistema NDLL e investigar o comportamento do conectivo $\parr$ nesse sistema.

A dedução seguinte prova o axioma $(\alpha \multimap \beta) \multimap (\alpha^\perp \parr \beta)$ usando a regra $\mathrm{I}_\parr$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^{\perp 1} \quad \alpha^{\perp\perp 2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha}\,\perp_{c(1)} \qquad \alpha \multimap \beta^{3}}{\beta}\,\mathrm{E}_\multimap \qquad \beta^{\perp 4}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha^\perp \parr \beta}\,\mathrm{I}_{\parr(2,4)}}{(\alpha \multimap \beta) \multimap (\alpha^\perp \parr \beta)}\,\mathrm{I}_{\multimap(3)}$$

Esse axioma nos ajuda a esclarece o significado de $\parr$. Ele nos diz que uma ação do tipo $\alpha \multimap \beta$, se executada, pode gerar uma ação do tipo $\alpha^\perp \parr \beta$ que, por sua vez, indica que não temos mais α, embora certamente temos β. Assim, apesar de $\parr$ ser uma disjunção, $\parr$ carrega uma idéia de conjunção.

Não podemos deixar de observar a regra $\mathrm{E}_\parr$. A intuição dessa regra lembra a intuição da regra $\mathrm{I}_\parr$. $\mathrm{E}_\parr$ é da seguinte forma:

$$\dfrac{\alpha \parr \beta \quad \alpha^\perp \quad \beta^\perp}{\perp}\,\mathrm{E}_\parr$$

Assim, pela regra $\mathrm{E}_\parr$, obtemos uma inconsistência quando $\alpha \parr \beta$, $\alpha^\perp$ e $\beta^\perp$ ocorrem simultaneamente. Em outras palavras, $\mathrm{E}_\parr$ indica que se temos $\alpha \parr \beta$ então, pelo menos uma das fórmulas α e β tem que ser válida, caso contrário, obtemos uma inconsistência.

A intuição da disjunção aditiva $\oplus$ é um pouco mais clara. As regras $\mathrm{I}_{1\oplus}$ e $\mathrm{I}_{2\oplus}$, por exemplo, são da forma:

$$\dfrac{\alpha}{\alpha \oplus \beta}\,\mathrm{I}_{1\oplus} \qquad \text{e} \qquad \dfrac{\beta}{\alpha \oplus \beta}\,\mathrm{I}_{2\oplus}$$

Essas regras são similares às regras de introdução para a disjunção clássica $\vee$ e evidenciam que se temos $\alpha \oplus \beta$ então, pelo menos uma das fórmulas α e β é válida, mas não nos cabe a tarefa de decidir qual.

A regra $E_{\oplus}$ lembra a regra de eliminação clássica $E_{\vee}$. No entanto, como na regra $I_{\&}$, as premissas de $E_{\oplus}$ compartilham hipóteses.

Na Seção 3.5 relatamos que a regra de introdução para o operador ! poderia ter sido concebida numa forma altenativa baseada na regra de introdução de Prawitz para o operador "Necessário" ($\square$) da lógica modal S4. Nossa regra de eliminação para o operador ? poderia também ter sido concebida numa forma alternativa, mas por sua vez, baseada na regra de eliminação de Prawitz para o operador "Possível" ($\diamond$) da lógica modal S4. Assim, os operadores exponenciais são considerados, de certo modo, como operadores modais.

Duas regras relacionadas com o operador ! merecem atenção especial: $C_!$ e $W_!$. Essas regras não são inspiradas na lógica modal e expressam o caráter de verdade estável de uma fórmula essencialmente !-modal. A regra $C_!$, por exemplo, se usada consecutivamente sobre uma mesma fórmula α essencialmente !-modal reproduz o recurso α tantas vezes quanto necessário ou desejável.

Por outro lado, a regra $W_!$ introduz uma espécie de monotonicidade, pois se temos uma dedução Π_1 de $\Gamma_1 \mid_{\overline{\text{ndll}}} \alpha$, tal que α é uma fórmula essencialmente !-modal, e a dedução Π_2 de $\Gamma_2 \mid_{\overline{\text{ndll}}} \beta$ podemos construir a dedução Π de $\Gamma_1, \Gamma_2 \mid_{\overline{\text{ndll}}} \beta$ usando a regra $W_!$ como segue:

$\Pi_1 \equiv$

$$\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \alpha \end{array}$$

$\Pi_2 \equiv$

$$\begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \beta \end{array}$$

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \alpha & \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

3.7 Conclusão

O presente Capítulo pode ser considerado o mais importante de nosso trabalho. Apresentamos aqui nosso sistema de dedução natural NDLL com regras inéditas para os conectivos "Par" ($\parr$) e "Why not" (?). Dessa forma, no sistema NDLL, os conectivos lineares $\parr$ e ? são tratados como primitivos ao invés de abreviações de fórmulas definidas pelas dualidades de *de Morgan*.

Relatamos que em decorrência do tratamendo do operador ? como primitivo pelo sistema NDLL tivemos que definir o conceito de fórmula essencialmente !-modal e usá-lo em nossas regras exponenciais, pois, caso contrário, não poderíamos provar a completude do sistema NDLL.

No entanto, no Capítulo 6 iremos nos deparar com uma complexidade adicional no processo de normalização fraca para o sistema NDLL justamente em decorrência do uso de fórmulas essencialmente !-modais como premissas de regras exponenciais. Para solucionar tal complexidade adicional teremos que criar novas reduções.

As novas regras de inferência (para $\parr$ e ?) apresentadas no presente Capítulo aliadas às novas reduções que serão apresentadas posteriormente no Capítulo 6 são as principais contribuições de nosso trabalho.

Capítulo 4

Equivalência entre NDLL e o Cálculo de Seqüentes

4.1 Introdução

Para provar a equivalência entre NDLL e o cálculo de seqüentes de Girard, empregamos o mesmo esquema de prova indutiva usado por *de Medeiros* [dPNdM01].

Na próxima Seção, provamos um Lema importante e bastante útil sobre fórmulas essencialmente !-modais e ?-modais. Na Seção 4.3, a corretude do sistema NDLL é provada. A completude de NDLL é provada na Seção 4.4. Finalmente, na Seção 4.5 obtemos a equivalência entre NDLL e o cálculo de seqüentes linear como uma conseqüência direta da corretude e completude.

4.2 Lema preliminar

Lema 4.1 (Lema sobre fórmulas essencialmente !-modais e ?-modais) *Para toda fórmula α em $\mathfrak{L}$, se α é uma fórmula essencialmente !-modal, então o seqüente $\alpha \vdash !\alpha$ é provado no cálculo de seqüentes; e se α é uma fórmula essencialmente ?-modal, então o seqüente $?\alpha \vdash \alpha$ é provado no cálculo de seqüentes.*

O Lema 4.1 é provado por indução em $d(\alpha)$[*]:

Base: $d(\alpha) = 0$.

[*]Veja Definição 2.4

Nesse caso α é uma fórmula atômica. Suponha que α é uma fórmula essencialmente !-modal, então α é 1. Logo provamos o seqüente $1 \vdash !1$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash 1}\,\mathrm{R}_1}{\vdash !1}\,\mathrm{R}_!}{1 \vdash !1}\,\mathrm{L}_1$$

Suponha que α é uma fórmula essencialmente ?-modal, então α é $\perp$. Logo provamos o seqüente $?\perp \vdash \perp$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\perp \vdash}\,\mathrm{L}_F}{?\perp \vdash}\,\mathrm{L}_?}{?\perp \vdash \perp}\,\mathrm{R}_F$$

Passo indutivo: $d(\alpha) > 0$.

Suponha que α é uma fórmula essencialmente !-modal. Temos os seguintes subcasos dependendo de α:

1. α é da forma $!\beta$. Logo provamos o seqüente $!\beta \vdash !!\beta$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{}{!\beta \vdash !\beta}\,\mathrm{Id}}{!\beta \vdash !!\beta}\,\mathrm{R}_!$$

2. α é da forma $\beta \otimes \gamma$ e as subfórmulas β e γ são essencialmente !-modal. Assim provamos o seqüente $\beta \otimes \gamma \vdash !(\beta \otimes \gamma)$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \vdash !\beta \quad \gamma \vdash !\gamma}{\beta, \gamma \vdash !\beta \otimes !\gamma}\,\mathrm{R}_\otimes}{\beta \otimes \gamma \vdash !\beta \otimes !\gamma}\,\mathrm{L}_\otimes \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,\mathrm{Id}}{!\beta \vdash \beta}\,\mathrm{L}_! \quad \dfrac{\dfrac{}{\gamma \vdash \gamma}\,\mathrm{Id}}{!\gamma \vdash \gamma}\,\mathrm{L}_!}{!\beta, !\gamma \vdash \beta \otimes \gamma}\,\mathrm{R}_\otimes}{!\beta, !\gamma \vdash !(\beta \otimes \gamma)}\,\mathrm{R}_!}{!\beta \otimes !\gamma \vdash !(\beta \otimes \gamma)}\,\mathrm{L}_\otimes}{\beta \otimes \gamma \vdash !(\beta \otimes \gamma)}\,\mathrm{Cut}$$

Por hipótese de indução, os seqüentes $\beta \vdash !\beta$ e $\gamma \vdash !\gamma$ são válidos.

3. α é da forma $\beta^\perp$ e a subfórmula β é essencialmente ?-modal. Assim provamos o seqüente $\beta^\perp \vdash !(\beta^\perp)$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,\mathrm{Id}}{\beta \vdash ?\beta}\,\mathrm{R}_?}{\vdash ?\beta, \beta^\perp}\,\mathrm{R}_\perp}{\vdash ?\beta, !(\beta^\perp)}\,\mathrm{R}_! \qquad ?\beta \vdash \beta}{\vdash \beta, !(\beta^\perp)}\,\mathrm{Cut}}{\beta^\perp \vdash !(\beta^\perp)}\,\mathrm{L}_\perp$$

Por hipótese de indução, o seqüente $?\beta \vdash \beta$ é válido.

Suponha que α é uma fórmula essencialmente ?-modal, então temo um dos seguintes casos:

1. α é da forma $?\beta$. Logo provamos o seqüente $??\beta \vdash ?\beta$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{}{?\beta \vdash ?\beta}\,\mathrm{Id}}{??\beta \vdash ?\beta}\,\mathrm{L}_?$$

2. α é da forma $\beta \parr \gamma$ e as subfórmulas β e γ são essencialmente ?-modal. Assim provamos o seqüente $?(\beta \parr \gamma) \vdash \beta \parr \gamma$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,\mathrm{Id}}{\beta \vdash ?\beta}\,\mathrm{R}_? \qquad \dfrac{\dfrac{}{\gamma \vdash \gamma}\,\mathrm{Id}}{\gamma \vdash ?\gamma}\,\mathrm{R}_?}{\beta \parr \gamma \vdash ?\beta, ?\gamma}\,\mathrm{L}_\parr}{?(\beta \parr \gamma) \vdash ?\beta, ?\gamma}\,\mathrm{L}_?}{?(\beta \parr \gamma) \vdash ?\beta \parr ?\gamma}\,\mathrm{R}_\parr \qquad \dfrac{\dfrac{?\beta \vdash \beta \qquad ?\gamma \vdash \gamma}{?\beta \parr ?\gamma \vdash \beta, \gamma}\,\mathrm{L}_\parr}{?\beta \parr ?\gamma \vdash \beta \parr \gamma}\,\mathrm{R}_\parr}{?(\beta \parr \gamma) \vdash \beta \parr \gamma}\,\mathrm{Cut}$$

Por hipótese de indução, os seqüentes $?\beta \vdash \beta$ e $?\gamma \vdash \gamma$ são válidos.

3. α é da forma $\beta^\perp$ e a subfórmula β é essencialmente !-modal. Assim provamos o seqüente $?(\beta^\perp) \vdash \beta^\perp$ como segue:

$$\dfrac{\dfrac{\beta \vdash !\beta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,\mathrm{Id}}{!\beta \vdash \beta}\,\mathrm{L}_!}{\beta^\perp, !\beta \vdash}\,\mathrm{L}_\perp}{?(\beta^\perp), !\beta \vdash}\,\mathrm{L}_?}{?(\beta^\perp), \beta \vdash}\,\mathrm{Cut}}{?(\beta^\perp) \vdash \beta^\perp}\,\mathrm{R}_\perp$$

Por hipótese de indução, o seqüente $\beta \vdash !\beta$ é válido.

■

4.3 Corretude

Teorema 4.2 (Corretude do sistema NDLL) *Se* $\Gamma \mid\!\frac{}{\mathit{ndll}}\, \alpha$*, então o seqüente* $\Gamma \vdash \alpha$ *é provado no cálculo de seqüentes linear.*

Suponha que $\Gamma \mid\!\frac{}{\text{ndll}}\, \alpha$. Isso significa que existe uma dedução Π em NDLL de α a partir de Γ. Por indução em $l(\Pi)^{\dagger}$, provamos que existe uma dedução no cálculo de seqüentes linear cujo seqüente final é $\Gamma \vdash \alpha$:

Base: $l(\Pi) = 1$.

Π é constituída por uma simples hipótese ou por uma aplicação da regra I_1. No primeiro caso, podemos transformar Π numa dedução Π' no cálculo de seqüentes contendo apenas uma aplicação da regra Id. No segundo caso, podemos transformar Π numa dedução Π' no cálculo de seqüentes contendo apenas uma aplicação da regra R_1.

Passo indutivo: $l(\Pi) > 1$.

De acordo com a Seção 3.2, $r(\Pi)$ denota a última regra de inferência de Π. Temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi)$:

1. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_{\multimap}$ e α é $\beta \multimap \gamma$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\ \beta^{j}\\ \Sigma\\ \gamma\end{array}}{\beta \multimap \gamma}\ \mathrm{I}_{\multimap(j)}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\frac{\Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \beta \multimap \gamma}\ \mathrm{R}_{\multimap}$$

   O seqüente "$\Gamma, \beta \vdash \gamma$" vale por hipótese de indução.

2. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_{\multimap}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

---

†Veja Definição 3.12

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \beta \multimap \alpha\end{matrix}}{\alpha}\ \mathrm{E}_{\multimap}$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma_2 \vdash \beta \multimap \alpha \qquad \dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\ \mathrm{Id} \qquad \dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Id}}{\beta, \beta \multimap \alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{L}_{\multimap}}{\Gamma_1, \beta \multimap \alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Cut}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha}\ \mathrm{Cut}$$

Os seqüentes "$\Gamma_2 \vdash \beta \multimap \alpha$" e "$\Gamma_1 \vdash \beta$" valem por hipótese de indução.

3. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_{\otimes}$, α é $\beta \otimes \gamma$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \gamma\end{matrix}}{\beta \otimes \gamma}\ \mathrm{I}_{\otimes}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta \qquad \Gamma_2 \vdash \gamma}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \beta \otimes \gamma}\ \mathrm{R}_{\otimes}$$

   Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \beta$" e "$\Gamma_2 \vdash \gamma$" valem por hipótese de indução.

4. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_{\otimes}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \beta \otimes \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2\ \beta^j\ \gamma^k \\ \Sigma_2 \\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\ \mathrm{E}_{\otimes(j,k)}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta \otimes \gamma \qquad \dfrac{\Gamma_2, \beta, \gamma \vdash \alpha}{\Gamma_2, \beta \otimes \gamma \vdash \alpha}\, \mathrm{L}_{\otimes}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha}\, \mathrm{Cut}$$

Os seqüentes “$\Gamma_1 \vdash \beta \otimes \gamma$” e “$\Gamma_2, \beta, \gamma \vdash \alpha$” valem por hipótese de indução.

5. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_{⅋}$ e α é $\beta ⅋ \gamma$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\begin{array}{c} \Gamma\ {\beta^{\perp}}^{j} {\gamma^{\perp}}^{k} \\ \Sigma \\ \dfrac{\perp}{\beta ⅋ \gamma}\, \mathrm{I}_{⅋ (j,k)} \end{array}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\gamma \vdash \gamma}\,\mathrm{Id}}{\vdash \gamma^{\perp}, \gamma}\,\mathrm{R}_{\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,\mathrm{Id}}{\vdash \beta^{\perp}, \beta}\,\mathrm{R}_{\perp} \qquad \Gamma, \beta^{\perp}, \gamma^{\perp} \vdash \perp}{\Gamma, \gamma^{\perp} \vdash \beta, \perp}\,\mathrm{Cut}}{\Gamma \vdash \beta, \gamma, \perp}\,\mathrm{Cut} \qquad \dfrac{}{\perp \vdash}\,\mathrm{L}_F}{\dfrac{\Gamma \vdash \beta, \gamma}{\Gamma \vdash \beta ⅋ \gamma}\,\mathrm{R}_{⅋}}\,\mathrm{Cut}$$

   O seqüente “$\Gamma, \beta^{\perp}, \gamma^{\perp} \vdash \perp$” vale por hipótese de indução.

6. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_{⅋}$, α é $\perp$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \beta ⅋ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \beta^{\perp} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Gamma_3 \\ \Sigma_3 \\ \gamma^{\perp} \end{array}}{\perp}\, \mathrm{E}_{⅋}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta \parr \gamma \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \vdash \beta^{\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,\mathrm{Id}}{\beta^{\perp}, \beta \vdash}\,\mathrm{L}_{\perp}}{\Gamma_2, \beta \vdash}\,\mathrm{Cut} \qquad \dfrac{\Gamma_3 \vdash \gamma^{\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\gamma \vdash \gamma}\,\mathrm{Id}}{\gamma^{\perp}, \gamma \vdash}\,\mathrm{L}_{\perp}}{\Gamma_3, \gamma \vdash}\,\mathrm{Cut}}{\Gamma_2, \Gamma_3, \beta \parr \gamma \vdash}\,\mathrm{L}_{\parr}}{\Gamma_2, \Gamma_3, \beta \parr \gamma \vdash \perp}\,\mathrm{R}_F}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \perp}\,\mathrm{Cut}$$

Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \beta \parr \gamma$", "$\Gamma_2 \vdash \beta^{\perp}$" e "$\Gamma_3 \vdash \gamma^{\perp}$" valem por hipótese de indução.

7. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_{\&}$, α é $\beta \& \gamma$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma_1 \\ \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma_2 \\ \gamma\end{matrix}}{\beta \& \gamma}\,\mathrm{I}_{\&}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \beta \qquad \Gamma \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \beta \& \gamma}\,\mathrm{R}_{\&}$$

   Os seqüentes "$\Gamma \vdash \beta$" e "$\Gamma \vdash \gamma$" valem por hipótese de indução.

8. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_{1\&}$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ \alpha \& \beta\end{matrix}}{\alpha}\,\mathrm{E}_{1\&}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta \qquad \dfrac{\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}\,\mathrm{Id}}{\alpha \& \beta \vdash \alpha}\,\mathrm{L}_{1\&}}{\Gamma \vdash \alpha}\,\mathrm{Cut}$$

   O seqüente "$\Gamma \vdash \alpha \& \beta$" vale por hipótese de indução.

9. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_{2\&}$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \beta\&\alpha\end{array}}{\alpha}\ \mathrm{E}_{2\&}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \beta\&\alpha \quad \dfrac{\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Id}}{\beta\&\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{I}_{2\&}}{\Gamma \vdash \alpha}\ \mathrm{Cut}$$

   O seqüente "$\Gamma \vdash \beta\&\alpha$" vale por hipótese de indução.

10. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_{1\oplus}$ e α é $\beta \oplus \gamma$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \beta\end{array}}{\beta \oplus \gamma}\ \mathrm{I}_{1\oplus}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta \oplus \gamma}\ \mathrm{R}_{1\oplus}$$

    O seqüente "$\Gamma \vdash \beta$" vale por hipótese de indução.

11. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_{2\oplus}$ e α é $\beta \oplus \gamma$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \gamma\end{array}}{\beta \oplus \gamma}\ \mathrm{I}_{2\oplus}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\frac{\Gamma \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \beta \oplus \gamma}\ \mathrm{R}_{2\oplus}$$

O seqüente "$\Gamma \vdash \gamma$" vale por hipótese de indução.

12. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_{\oplus}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ \beta \oplus \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2\ \beta^j\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2\ \gamma^k\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\ \mathrm{E}_{\oplus(j,k)}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \beta \oplus \gamma \qquad \dfrac{\Gamma_2, \beta \vdash \alpha \quad \Gamma_2, \gamma \vdash \alpha}{\Gamma_2, \beta \oplus \gamma \vdash \alpha}\ \mathrm{L}_{\oplus}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha}\ \mathrm{Cut}$$

    Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \beta \oplus \gamma$", "$\Gamma_2, \beta \vdash \alpha$" e "$\Gamma_2, \gamma \vdash \alpha$" valem por hipótese de indução.

13. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_{\forall}$ e α é $\forall x \beta$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \beta^x_a\end{array}}{\forall x \beta}\ \mathrm{I}_{\forall}$$

    a não ocorre em Γ.

    $\Pi' \equiv$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta^x_a}{\Gamma \vdash \forall x \beta}\ \mathrm{R}_{\forall}$$

    O seqüente "$\Gamma \vdash \beta^x_a$" vale por hipótese de indução.

14. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $E_\forall$ e α é β^x_t. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \Sigma\\ \forall x\beta\end{matrix}}{\beta^x_t}\,E_\forall$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\beta \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta^x_t \vdash \beta^x_t}\,\mathrm{Id}}{\forall x\beta \vdash \beta^x_t}\,L_\forall}{\Gamma \vdash \beta^x_t}\,\mathrm{Cut}$$

O seqüente "$\Gamma \vdash \forall x\beta$" vale por hipótese de indução.

15. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $I_\exists$ e α é $\exists x\beta$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \Sigma\\ \beta^x_t\end{matrix}}{\exists x\beta}\,I_\exists$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \beta^x_t}{\Gamma \vdash \exists x\beta}\,R_\exists$$

O seqüente "$\Gamma \vdash \beta^x_t$" vale por hipótese de indução.

16. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $E_\exists$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ \exists x\beta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2\ \beta^{x\,j}_a\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\,E_{\exists(j)}$$

a não ocorre em $\exists x\beta$, α e Γ_2.

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma_1 \vdash \exists x\beta \qquad \dfrac{\Gamma_2, \beta^x_a \vdash \alpha}{\Gamma_2, \exists x\beta \vdash \alpha}\,\mathrm{L}_\exists}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha}\,\text{Cut}$$

Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \exists x\beta$" e "$\Gamma_2, \beta^x_a \vdash \alpha$" valem por hipótese de indução.

17. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_!$, α é $!\gamma$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ \beta_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Gamma_n\\ \Sigma_n\\ \beta_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\beta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \gamma\end{matrix}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}$$

    $\beta_1, \ldots, \beta_n$ são fórmulas essencialmente !-modais.

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_n \vdash \beta_n \quad \beta_n \vdash !\beta_n}{\Gamma_n \vdash !\beta_n}\,\text{Cut} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta_1 \quad \beta_1 \vdash !\beta_1}{\Gamma_1 \vdash !\beta_1}\,\text{Cut} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash \gamma}{!\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \vdash \gamma}\,\mathrm{L}_! \\ \vdots \\ !\beta_1, \ldots, !\beta_{n-1}, \beta_n \vdash \gamma\end{array}}{!\beta_1, \ldots, !\beta_n \vdash \gamma}\,\mathrm{L}_!}{!\beta_1, \ldots, !\beta_n \vdash !\gamma}\,\mathrm{R}_!}{\Gamma_1, !\beta_2, \ldots, !\beta_n \vdash !\gamma}\,\text{Cut} \\ \vdots \\ \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}, !\beta_n \vdash !\gamma \end{array}}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash !\gamma}\,\text{Cut}$$

    Os seqüentes "$\beta_1 \vdash !\beta_1$", ..., "$\beta_n \vdash !\beta_n$" valem pelo Lema 4.1 já que $\beta_1, \ldots, \beta_n$ são fórmulas essencialmente !-modais.

    Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \beta_1$", ..., "$\Gamma_n \vdash \beta_n$" e "$\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash \gamma$" valem por hipótese de indução.

18. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_!$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \Sigma\\ !\alpha\end{matrix}}{\alpha}\ \mathrm{E}_!$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\Gamma \vdash !\alpha \qquad \dfrac{\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Id}}{!\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{L}_!}{\Gamma \vdash \alpha}\ \mathrm{Cut}$$

O seqüente "$\Gamma \vdash !\alpha$" vale por hipótese de indução.

19. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{I}_?$ e α é $?\beta$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

    $$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \Sigma\\ \beta\end{matrix}}{?\beta}\ \mathrm{I}_?$$

    $\Pi' \equiv$

    $$\dfrac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash ?\beta}\ \mathrm{R}_?$$

    O seqüente "$\Gamma \vdash \beta$" vale por hipótese de indução.

20. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{E}_?$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_{n+1}$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

    $$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ ?\beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_2\\ \Sigma_2\\ \gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Gamma_{n+1}\\ \Sigma_{n+1}\\ \gamma_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\gamma_1^{j_1} \quad \ldots \quad \gamma_n^{j_n} \quad \beta^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\ \mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_n,k)}$$

    $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ são fórmulas essencialmente !-modais e α é essencialmente ?-modal.

$\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{
  \dfrac{\Gamma_{n+1} \vdash \gamma_n \quad \gamma_n \vdash !\gamma_n}{\Gamma_{n+1} \vdash !\gamma_n}\,\text{Cut}
  \qquad
  \begin{array}{c}
  \dfrac{
    \dfrac{\Gamma_2 \vdash \gamma_1 \quad \gamma_1 \vdash !\gamma_1}{\Gamma_2 \vdash !\gamma_1}\,\text{Cut}
    \qquad
    \dfrac{\Gamma_1 \vdash ?\beta \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{
          \dfrac{
            \dfrac{
              \begin{array}{c}
              \dfrac{\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \beta \vdash \alpha}{!\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \beta \vdash \alpha}\,\text{L}_!\\
              \vdots\\
              !\gamma_1, \ldots, !\gamma_{n-1}, \gamma_n, \beta \vdash \alpha
              \end{array}
            }{!\gamma_1, \ldots, !\gamma_n, \beta \vdash \alpha}\,\text{L}_!
          }{!\gamma_1, \ldots, !\gamma_n, \beta \vdash ?\alpha}\,\text{R}_?
        }{!\gamma_1, \ldots, !\gamma_n, ?\beta \vdash ?\alpha}\,\text{L}_?
        \qquad ?\alpha \vdash \alpha
      }{!\gamma_1, \ldots, !\gamma_n, ?\beta \vdash \alpha}\,\text{Cut}
    }{\Gamma_1, !\gamma_1, \ldots, !\gamma_n \vdash \alpha}\,\text{Cut}
  }{\Gamma_1, \Gamma_2, !\gamma_2, \ldots, !\gamma_n \vdash \alpha}\,\text{Cut}\\
  \vdots\\
  \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, !\gamma_n \vdash \alpha
  \end{array}
}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n+1} \vdash \alpha}\,\text{Cut}
$$

Os seqüentes "$\gamma_1 \vdash !\gamma_1$", ..., "$\gamma_n \vdash !\gamma_n$" e "$?\alpha \vdash \alpha$" valem pelo Lema 4.1 já que $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ são fórmulas essencialmente !-modais e α é essencialmente ?-modal.

Os seqüentes "$\Gamma_2 \vdash \gamma_1$", ..., "$\Gamma_{n+1} \vdash \gamma_n$", "$\Gamma_1 \vdash ?\beta$" e "$\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \beta \vdash \alpha$" valem por hipótese de indução.

21. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $C_!$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ \beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2\ \beta^j \quad \beta^j\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\ C_{!(j)}$$

    β é fórmula essencialmente !-modal.

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta \quad \beta \vdash !\beta}{\Gamma_1 \vdash !\beta}\ \text{Cut} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2, \beta, \beta \vdash \alpha}{\Gamma_2, !\beta, \beta \vdash \alpha}\ L_!}{\Gamma_2, !\beta, !\beta \vdash \alpha}\ L_!}{\Gamma_2, !\beta \vdash \alpha}\ L_{c!}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha}\ \text{Cut}$$

    O seqüente "$\beta \vdash !\beta$" vale pelo Lema 4.1 já que β é uma fórmula essencialmente !-modal.

    Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \beta$" e "$\Gamma_2, \beta, \beta \vdash \alpha$" valem por hipótese de indução.

22. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $W_!$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ \beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\ W_!$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta \quad \beta \vdash !\beta}{\Gamma_1 \vdash !\beta}\ \text{Cut} \qquad \dfrac{\Gamma_2 \vdash \alpha}{\Gamma_2, !\beta \vdash \alpha}\ L_{w!}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha}\ \text{Cut}$$

    O seqüente "$\beta \vdash !\beta$" vale pelo Lema 4.1 já que β é uma fórmula essencialmente !-modal.

    Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \beta$" e "$\Gamma_2 \vdash \alpha$" valem por hipótese de indução.

23. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra E_1 e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

    $$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ 1 & \alpha\end{matrix}}{\alpha}\ E_1$$

    $\Pi' \equiv$

    $$\dfrac{\Gamma_1 \vdash 1 \quad \dfrac{\Gamma_2, \vdash \alpha}{\Gamma_2, 1 \vdash \alpha}\ L_1}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \alpha}\ \mathrm{Cut}$$

    Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash 1$" e "$\Gamma_2, \vdash \alpha$" valem por hipótese de indução.

24. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $I_\perp$ e α é $\beta^\perp$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

    $$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \beta^j \\ \Sigma \\ \perp\end{matrix}}{\beta^\perp}\ I_{\perp(j)}$$

    $\Pi' \equiv$

    $$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \beta \vdash \perp \quad \overline{\perp \vdash}\ L_F}{\Gamma, \beta \vdash}\ \mathrm{Cut}}{\Gamma \vdash \beta^\perp}\ R_\perp$$

    O seqüente "$\Gamma, \beta \vdash \perp$" vale por hipótese de indução.

25. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $E_\perp$, α é $\perp$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

    $$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \beta & \beta^\perp\end{matrix}}{\perp}\ E_\perp$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash \beta \qquad \dfrac{\Gamma_2 \vdash \beta^\perp \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\,\mathrm{Id}}{\beta,\beta^\perp \vdash}\,\mathrm{L}_\perp}{\Gamma_2,\beta \vdash}\,\mathrm{Cut}}{\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash}\,\mathrm{Cut}}{\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \perp}\,\mathrm{R}_F$$

Os seqüentes "$\Gamma_1 \vdash \beta$" e "$\Gamma_2 \vdash \beta^\perp$" valem por hipótese de indução.

26. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\perp_c$. Π pode ser transformada numa dedução Π' em cálculo de seqüentes da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\begin{array}{c} \Gamma \ \alpha^{\perp j} \\ \Sigma \\ \dfrac{\perp}{\alpha}\,\perp_{c(j)} \end{array}$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \vdash \alpha}\,\mathrm{Id}}{\vdash \alpha^\perp, \alpha}\,\mathrm{R}_\perp \qquad \Gamma, \alpha^\perp \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha, \perp}\,\mathrm{Cut} \qquad \dfrac{}{\perp \vdash}\,\mathrm{L}_F}{\Gamma \vdash \alpha}\,\mathrm{Cut}$$

O seqüente "$\Gamma, \alpha^\perp \vdash \perp$" vale por hipótese de indução.

■

4.4 Completude

Teorema 4.3 (Completude do sistema NDLL) *Seja* $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$*, eventualmente vazio, e seja* $\Delta^\perp = \{\alpha_1^\perp, \ldots, \alpha_n^\perp\}$*. Se* $\Gamma \vdash \Delta$ *é um seqüente provado no cálculo de seqüentes linear, então* $\Gamma, \Delta^\perp \mathrel{|}\!\!\!\frac{\quad}{ndll} \perp$*.*

Para provar o Teorema 4.3, suponha que o seqüente $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ é provado no cálculo de seqüentes, ou seja, existe pelo menos uma dedução Π em cálculo de seqüentes cujo seqüente final é $\Gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Por indução em $l(\Pi)$[‡], provamos que existe uma dedução Π' em NDLL de $\perp$ a partir de $\Gamma \cup \Delta^\perp$:

[‡]Veja Definição 2.13

Base: $l(\Pi) = 1$.

Nesse caso, Π é constituída por uma das seguintes regras axiomas:

1. Π é constituída pela regra Id, então Π é da forma:

   $\Pi \equiv$

   $$\dfrac{}{\beta \vdash \beta}\ \mathrm{Id}$$

   Em Π, $\Gamma = \{\beta\}$ e $\Delta^{\perp} = \{\beta^{\perp}\}$. Construímos Π' em NDLL como segue:

   $\Pi' \equiv$

   $$\dfrac{\beta \quad \beta^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

2. Π é constituída pela regra L_F, então Π é da forma:

   $\Pi \equiv$

   $$\dfrac{}{\perp \vdash}\ \mathrm{L}_F$$

   Em Π, $\Gamma = \{\perp\}$ e $\Delta^{\perp} = \emptyset$. Construímos Π' em NDLL como segue:

   $\Pi' \equiv$

   $$\perp$$

3. Π é constituída pela regra R_1, então Π é da forma:

   $\Pi \equiv$

   $$\dfrac{}{\vdash 1}\ \mathrm{R}_1$$

   Em Π, $\Gamma = \emptyset$ e $\Delta^{\perp} = \{1^{\perp}\}$. Construímos Π' em NDLL como segue:

   $\Pi' \equiv$

   $$\dfrac{\dfrac{}{1}\ \mathrm{I}_1 \quad 1^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

Passo indutivo: $l(\Pi) > 1$.

Para efeito de notação, no decorrer dessa demonstração, as subdeduções Σ, Σ_1 e Σ_2 de Π no cálculo de seqüentes linear são transformadas, por hipótese de indução, nas deduções Σ', Σ_1' e Σ_2' em NDLL, respectivamente.

Como alegado na Seção 2.4, $r(\Pi)$ denota a última aplicação de regra de inferência de Π. Temos então os seguintes casos dependendo de $r(\Pi)$:

1. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra Cut e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma_1 \vdash \alpha_1,\ldots,\alpha_h,\beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta,\Gamma_2 \vdash \alpha_{h+1},\ldots,\alpha_n\end{array}}{\Gamma_1,\Gamma_2 \vdash \alpha_1,\ldots,\alpha_n}\ \text{Cut}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \Gamma_2\ \alpha_{h+1}^{\perp}\ldots\alpha_n^{\perp} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp}\ldots\alpha_h^{\perp}\ \beta^{\perp j}\\ \Sigma_1'\\ \dfrac{\perp}{\beta}\ \perp_{c(j)}\end{array}\\ \Sigma_2' \\ \perp\end{array}$$

   Tal que $0 \leq h \leq n$.

2. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra L_1 e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{1\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma_1 \vdash \alpha_1,\ldots,\alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, 1 \vdash \alpha_1,\ldots,\alpha_n}\ \mathrm{L}_1$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{1 \quad \begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp}\ldots\alpha_n^{\perp}\\ \Sigma'\\ \perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_1$$

3. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra R_F e α_1 é $\bot$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \vdash \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma \vdash \bot, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_F$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ \alpha_2^\bot \ldots \alpha_n^\bot\\ \Sigma'\\ \bot\end{array} \qquad \bot^\bot}{\bot}\ \mathrm{E}_\bot$$

4. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_\otimes$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\beta \otimes \gamma\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma_1, \beta, \gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, \beta \otimes \gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_\otimes$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\beta \otimes \gamma \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^\bot \ldots \alpha_n^\bot\ \beta^j\ \gamma^k\\ \Sigma'\\ \bot\end{array}}{\bot}\ \mathrm{E}_{\otimes(j,k)}$$

5. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_\otimes$, α_1 é $\beta \otimes \gamma$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma_1 \vdash \beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_h\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Gamma_2 \vdash \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \beta \otimes \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_\otimes$$

   $\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_2^\perp \ldots \alpha_h^\perp\ \beta^{\perp j} \\ \Sigma_1' \\ \dfrac{\perp}{\beta}\ \perp_{c(j)}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\ \alpha_{h+1}^\perp \ldots \alpha_n^\perp\ \gamma^{\perp k} \\ \Sigma_2' \\ \dfrac{\perp}{\gamma}\ \perp_{c(k)}\end{array}}{\beta \otimes \gamma}\ \mathrm{I}_\otimes \qquad (\beta \otimes \gamma)^\perp}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp
$$

Tal que $1 \leq h \leq n$.

6. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_{\parr}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\beta \parr \gamma\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

$\Pi \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma_1, \beta \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_h\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \Gamma_2, \gamma \vdash \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \beta \parr \gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_{\parr}
$$

$\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\beta \parr \gamma \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^\perp \ldots \alpha_h^\perp\ \beta^{j} \\ \Sigma_1' \\ \dfrac{\perp}{\beta^\perp}\ \mathrm{I}_{\perp(j)}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\ \alpha_{h+1}^\perp \ldots \alpha_n^\perp\ \gamma^{k} \\ \Sigma_2' \\ \dfrac{\perp}{\gamma^\perp}\ \mathrm{I}_{\perp(k)}\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\parr}
$$

Tal que $0 \leq h \leq n$.

7. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_{\parr}$ e α_1 é $\beta \parr \gamma$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

$\Pi \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \vdash \beta, \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma \vdash \beta \parr \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_{\parr}
$$

$\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ \alpha_2^\perp \ldots \alpha_n^\perp\ \beta^{\perp j}\ \gamma^{\perp k} \\ \Sigma' \\ \dfrac{\perp}{\beta \parr \gamma}\ \mathrm{I}_{\parr(j,k)}\end{array} \qquad (\beta \parr \gamma)^\perp}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp
$$

8. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $L_{1\&}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\beta\&\gamma\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma_1, \beta \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, \beta\&\gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ L_{1\&}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp} \dfrac{\beta\&\gamma}{\beta}\ E_{1\&}\\ \Sigma'\\ \perp\end{array}$$

9. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $L_{2\&}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\beta\&\gamma\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma_1, \gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, \beta\&\gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ L_{2\&}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp} \dfrac{\beta\&\gamma}{\gamma}\ E_{2\&}\\ \Sigma'\\ \perp\end{array}$$

10. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $R_{\&}$ e α_1 é $\beta\&\gamma$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \vdash \beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Gamma \vdash \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma \vdash \beta\&\gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ R_{\&}$$

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \alpha_2^\perp \dots \alpha_n^\perp\ \beta^{\perp j} \\ \Sigma_1' \\ \perp\end{matrix}}{\beta}\perp_{c(j)} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \alpha_2^\perp \dots \alpha_n^\perp\ \gamma^{\perp k} \\ \Sigma_2' \\ \perp\end{matrix}}{\gamma}\perp_{c(k)}}{\beta \& \gamma}\mathrm{I}_\& \qquad (\beta\&\gamma)^\perp}{\perp}\mathrm{E}_\perp$$

11. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_\oplus$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\beta \oplus \gamma\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma_1, \beta \vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Gamma_1, \gamma \vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma_1, \beta \oplus \gamma \vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n}\mathrm{L}_\oplus$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\beta \oplus \gamma \quad \begin{matrix}\Gamma_1\ \alpha_1^\perp \dots \alpha_n^\perp\ \beta^j \\ \Sigma_1' \\ \perp\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_1\ \alpha_1^\perp \dots \alpha_n^\perp\ \gamma^k \\ \Sigma_2' \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\mathrm{E}_{\oplus(j,k)}$$

12. $r(\Pi)$ é uma aplication da regra $\mathrm{R}_{1\oplus}$ e α_1 é $\beta \oplus \gamma$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \vdash \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma \vdash \beta \oplus \gamma, \alpha_2, \dots, \alpha_n}\mathrm{R}_{1\oplus}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \alpha_2^\perp \dots \alpha_n^\perp\ \beta^{\perp j} \\ \Sigma' \\ \perp\end{matrix}}{\beta}\perp_{c(j)}}{\beta \oplus \gamma}\mathrm{I}_{1\oplus} \qquad (\beta \oplus \gamma)^\perp}{\perp}\mathrm{E}_\perp$$

13. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_{2\oplus}$ e α_1 é $\beta \oplus \gamma$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \vdash \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma \vdash \beta \oplus \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_{2\oplus}$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \alpha_2^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp}\ \gamma^{\perp j} \\ \Sigma' \\ \perp\end{matrix}}{\gamma}\ \perp_{c(j)}}{\beta \oplus \gamma}\ \mathrm{I}_{2\oplus} \qquad (\beta \oplus \gamma)^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

14. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_{\multimap}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\beta \multimap \gamma\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma_1 \vdash \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_h\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Gamma_2, \gamma \vdash \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma_1, \Gamma_2, \beta \multimap \gamma \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_{\multimap}$$

$\Pi' \equiv$

$$\begin{matrix} \Gamma_2\ \alpha_{h+1}^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp} \ldots \alpha_h^{\perp}\ \beta^{\perp j} \\ \Sigma_1' \\ \perp\end{matrix}}{\beta}\ \perp_{c(j)} \qquad \beta \multimap \gamma}{\gamma}\ \mathrm{E}_{\multimap} \\ \Sigma_2' \\ \perp \end{matrix}$$

Tal que $0 \leq h \leq n$.

15. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_{\multimap}$ e α_1 é $\beta \multimap \gamma$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma, \beta \vdash \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma \vdash \beta \multimap \gamma, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_{\multimap}$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \alpha_2^{\perp}\ldots\alpha_n^{\perp}\ \beta^{j}\ \gamma^{\perp k}\\ \Sigma'\\ \perp\end{matrix}}{\gamma}\ \perp_{c(k)}}{\beta \multimap \gamma}\ \mathrm{I}_{\multimap(j)} \qquad (\beta \multimap \gamma)^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

16. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_{\perp}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\beta^{\perp}\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Gamma_1 \vdash \beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma_1, \beta^{\perp} \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_{\perp}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp}\ldots\alpha_n^{\perp}\ \beta^{\perp j}\\ \Sigma'\\ \perp\end{matrix}}{\beta}\ \perp_{c(j)} \qquad \beta^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

17. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_{\perp}$ e α_1 é $\beta^{\perp}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Gamma, \beta \vdash \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma \vdash \beta^{\perp}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_{\perp}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \alpha_2^{\perp}\ldots\alpha_n^{\perp}\ \beta^{j}\\ \Sigma'\\ \perp\end{matrix}}{\beta^{\perp}}\ \mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \beta^{\perp\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

18. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_{\forall}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\forall x \beta\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma_1, \beta^x_t \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma_1, \forall x\beta \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_\forall$$

$\Pi' \equiv$

$$\begin{matrix}\Gamma_1\ \alpha_1^\perp \ldots \alpha_n^\perp\ \dfrac{\forall x\beta}{\beta^x_t}\ \mathrm{E}_\forall \\ \Sigma' \\ \perp\end{matrix}$$

19. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_\forall$ e α_1 é $\forall x\beta$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \vdash \beta^x_a, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma \vdash \forall x\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_\forall$$

   a não ocorre em $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nem em qualquer fórmula de Γ.

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\ \alpha_2^\perp \ldots \alpha_n^\perp\ \beta^{x\perp j}_a \\ \Sigma' \\ \perp\end{matrix}}{\beta^x_a}\ \perp_{c(j)}}{\forall x\beta}\ \mathrm{I}_\forall \qquad (\forall x\beta)^\perp}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

20. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_\exists$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{\exists x\beta\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma_1, \beta^x_a \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{matrix}}{\Gamma_1, \exists x\beta \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_\exists$$

   a não ocorre em $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nem em qualquer fórmula de Γ_1

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\exists x\beta \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp}\ \beta_a^{x\,j} \\ \Sigma' \\ \perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\exists(j)}$$

21. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_{\exists}$ e α_1 é $\exists x\beta$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \vdash \beta_t^x, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma \vdash \exists x\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_{\exists}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\ \alpha_2^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp}\ \beta_t^{x\perp j} \\ \Sigma' \\ \perp\end{array}}{\beta_t^x}\ \perp_{c(j)}}{\exists x\beta}\ \mathrm{I}_{\exists} \qquad (\exists x\beta)^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

22. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_{c!}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{!\beta\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma_1, !\beta, !\beta \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, !\beta \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_{c!}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{!\beta \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp}\ !\beta^j\ !\beta^j \\ \Sigma' \\ \perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(j)}$$

23. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_{c?}$ e α_1 é $?\beta$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \vdash ?\beta, ?\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma \vdash ?\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_{c?}$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{(?\beta)^{\perp} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\ (?\beta)^{\perp j}\ (?\beta)^{\perp j}\ \alpha_2^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp}\\ \Sigma'\\ \perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(j)}$$

24. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{L}_{w!}$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{!\beta\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma_1 \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, !\beta \vdash \alpha_1, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{L}_{w!}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{!\beta \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1\ \alpha_1^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp}\\ \Sigma'\\ \perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{W}_{!}$$

25. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_{w?}$ e α_1 é $?\beta$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \vdash \alpha_2, \ldots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma \vdash ?\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}\ \mathrm{R}_{w?}$$

    $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{(?\beta)^{\perp} \qquad \begin{array}{c}\Gamma\ \alpha_2^{\perp} \ldots \alpha_n^{\perp}\\ \Sigma'\\ \perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{W}_{!}$$

26. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $L_!$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \{!\beta\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma_1, \beta \vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma_1, !\beta \vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n}\, L_!$$

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \Gamma_1 \;\; \alpha_1^{\perp} \dots \alpha_n^{\perp} \quad \dfrac{!\beta}{\beta}\, E_! \\ \Sigma' \\ \perp \end{array}$$

27. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $R_?$ e α_1 é $?\beta$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \vdash \beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n\end{array}}{\Gamma \vdash ?\beta, \alpha_2, \dots, \alpha_n}\, R_?$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \;\; \alpha_2^{\perp} \dots \alpha_n^{\perp} \;\; \beta^{\perp j}\\ \Sigma' \\ \perp\end{array}}{\beta}\, \perp_{c(j)}}{?\beta}\, I_? \qquad (?\beta)^{\perp}}{\perp}\, E_{\perp}$$

28. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $L_?$, α_i é $?\beta_i$ para cada $1 \leq i \leq n$ e $\Gamma = !\Gamma_1 \cup \{?\gamma\}$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ !\Gamma_1, \gamma \vdash ?\beta_1, \dots, ?\beta_n\end{array}}{!\Gamma_1, ?\gamma \vdash ?\beta_1, \dots, ?\beta_n}\, L_?$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{?\gamma \quad !\Gamma_1 \quad (?\beta_1)^{\perp} \quad \dots \quad (?\beta_n)^{\perp} \qquad \begin{array}{c} !\Gamma_1^{k_1 \dots k_m} \; (?\beta_1)^{\perp l_1} \dots (?\beta_n)^{\perp l_n} \; \gamma^j \\ \Sigma' \\ \perp \end{array}}{\perp} \mathrm{E}_{?(k_1,\dots,k_m,l_1,\dots,l_n,j)}$$

29. $r(\Pi)$ é uma aplicação da regra $\mathrm{R}_!$, α_1 é $!\gamma$, α_i é $?\beta_i$ para cada $2 \leq i \leq n$ e $\Gamma = !\Gamma_1$. Π pode ser transformada em uma dedução Π' em NDLL como segue:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Sigma \\ !\Gamma_1 \vdash \gamma, ?\beta_2, \dots, ?\beta_n \end{array}}{!\Gamma_1 \vdash !\gamma, ?\beta_2, \dots, ?\beta_n} \mathrm{R}_!$$

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{!\Gamma_1 \quad (?\beta_2)^{\perp} \quad \dots \quad (?\beta_n)^{\perp} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} !\Gamma_1^{k_1 \dots k_m} \; (?\beta_2)^{\perp l_1} \dots (?\beta_n)^{\perp l_n} \; \gamma^{\perp j} \\ \Sigma' \\ \perp \end{array}}{\gamma} \perp_{c(j)}}{!\gamma} \mathrm{I}_{!(k_1,\dots,k_m,l_1,\dots,l_n)} \qquad (!\gamma)^{\perp}}{\perp} \mathrm{E}_{\perp}$$

■

4.5 Equivalência

Corolário 4.4 (Equivalência entre NDLL e cálculo de seqüentes) *O sistema NDLL é equivalente ao cálculo de seqüentes de Girard.*

O Corolário 4.4 é uma conseqüência imediata dos Teoremas 4.2 e 4.3.

■

4.6 Conclusão

Nesse Capítulo, usamos o cálculo de seqüentes de Girard previamente apresentado no Capítulo 2 para provar a corretude e a completude do nosso sistema de dedução natural NDLL. Como uma conseqüência, demonstramos a equivalência (no sentido de demonstrabilidade) entre NDLL e o cálculo de seqüentes linear.

Capítulo 5

Sistemas de Dedução Natural Linear

5.1 Introdução

Alguns trabalhos recentes [Tro92, BBHdP92, Tro95, Mar00, dPNdM01] apresentam sistemas de dedução natural para a lógica linear. Nesse Capítulo, investigamos as principais características de cada um desses sistemas e apresentamos algumas comparações com o nosso sistema NDLL.

Na próxima Seção, os sistemas N-CLL e N-ILL são apresentados. A Seção 5.3 explora os sistemas ILL e ILL^{+}. Finalmente, os sistemas NLLM e NL são apresentados nas Seções 5.4 e 5.5 respectivamente.

5.2 Os sistemas N-CLL e N-ILL

Troelstra, em seu livro [Tro92], apresentou os sistemas N-CLL e N-ILL. N-CLL indica um sistema de dedução natural linear clássico e N-ILL um sistema de dedução natural linear intuicionístico. Esses dois sistemas incluem os fragmentos aditivo e multiplicativo, apesar de não oferecerem regras para os conectivos "Par" ($\invamp$) e "Why not" (?). Esses conectivos são tratados por definição usando as dualidades de *de Morgan*.

Um sistema de dedução natural pode ser apresentado numa formato alternativo como árvores cujos nós são rotulados por seqüentes da forma $\Gamma \vdash \alpha$ nos quais α é uma ocorrência de fórmula e Γ é um registro de todas as hipóteses não descartadas no estágio da dedução associado com esse nó. Apesar dessa notação ser considerada de mais fácil manipulação do ponto de vista matemático, ela é muito redundante e não tão natural quanto a notação padrão do ponto de vista humano.

Os sistemas N-CLL e N-ILL foram originalmente apresentados através dessa notação de seqüentes. As seguintes regras de inferência formam o sistema N-CLL:

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Ax}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \mathrm{I}_{\top} \qquad \frac{}{\Gamma, 0 \vdash \alpha}\ \mathrm{E}_{0}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta}\ \mathrm{I}_{\otimes} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \otimes \beta \quad \Delta, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \Delta \vdash \gamma}\ \mathrm{E}_{\otimes}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha}\ \mathrm{E}_{1\&}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}\ \mathrm{I}_{\&}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta}\ \mathrm{E}_{2\&}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta}\ \mathrm{I}_{1\oplus}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta \quad \Delta, \alpha \vdash \gamma \quad \Delta, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, \Delta \vdash \gamma}\ \mathrm{E}_{\oplus}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \oplus \beta}\ \mathrm{I}_{2\oplus}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta}\ \mathrm{I}_{\multimap} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta \quad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}\ \mathrm{E}_{\multimap}$$

$$\frac{}{\vdash 1}\ \mathrm{I}_{1} \qquad \frac{\Gamma \vdash 1 \quad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha}\ \mathrm{E}_{1}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \multimap \bot \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}\ \bot\text{-rule}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha^x_t}{\Gamma \vdash \exists x\alpha}\ \mathrm{I}_{\exists} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\alpha \quad \Delta, \alpha^x_a \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}\ \mathrm{E}_{\exists}$$

(a não ocorre em $\exists x\alpha$, Δ ou β)

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha^x_a}{\Gamma \vdash \forall x\alpha}\ \mathrm{I}_{\forall} \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\alpha}{\Gamma \vdash \alpha^x_t}\ \mathrm{E}_{\forall}$$

(a não ocorre em Γ)

$$\frac{!\Gamma \vdash \alpha}{!\Gamma \vdash !\alpha}\ \mathrm{I}_! \qquad \frac{\Gamma \vdash !\alpha \quad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}\ \mathrm{E}_!^{w}$$

$$\frac{\Gamma \vdash !\alpha \quad \Delta, \alpha \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}\ \mathrm{E}_! \qquad \frac{\Gamma \vdash !\alpha \quad \Delta, !\alpha, !\alpha \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta}\ \mathrm{E}_!^{c}$$

Suprimindo a regra "$\perp$-rule" do sistema N-CLL obtemos o sistema N-ILL.

Em N-CLL e N-ILL, $\parr$ e ? são definidos pelas dualidades de *de Morgan* e $\alpha^\perp$ é uma abreviação da fórmula $\alpha \multimap \perp$.

5.3 Os sistemas ILL e ILL$^+$

Em [BBHdP92], Benton, Bierman, Hyland e *de Paiva* propuseram o sistema ILL para a lógica linear multiplicativa intuicionística. Eles abordaram o fragmento $\{1, \otimes, \multimap, !\}$ dessa lógica.

As seguintes regras de inferência formam o sistema ILL:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \multimap \beta}\ \mathrm{I}_{\multimap(j)} \qquad \frac{\alpha \quad \alpha \multimap \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{\multimap}$$

$$\frac{}{1}\ \mathrm{I}_1 \qquad \frac{\alpha \quad 1}{\alpha}\ \mathrm{E}_1$$

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \otimes \beta}\ \mathrm{I}_{\otimes} \qquad \frac{\alpha \otimes \beta \quad \begin{array}{c}\alpha^j \quad \beta^k\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{\otimes(j,k)}$$

$$\frac{!\alpha \quad \beta}{\beta}\ \text{Weakening} \qquad \frac{!\alpha \quad \begin{array}{c}!\alpha^j \quad !\alpha^k\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\beta}\ \text{Contraction}_{(j,k)}$$

$$\dfrac{!\alpha_1 \ldots !\alpha_n \qquad \begin{array}{c} !\alpha_1^{j_1} \ldots !\alpha_n^{j_n} \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{!\beta}\ \text{Promotion}_{(j_1,\ldots,j_n)} \qquad \dfrac{!\alpha}{\alpha}\ \text{Dereliction}$$

Num trabalho subseqüente [Tro95], Troelstra repensou o trabalho apresentado por Benton et al. e introduziu o sistema ILL^+. As principais características nas quais ILL^+ difere de ILL são as seguintes:

1. Regra "Promotion":

   No sistema ILL^+, a regra "Promotion" é substituída pela seguinte regra $!\mathrm{I}^+$:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ [!\beta_1 \ldots !\beta_n] \\ \vdots \\ \dfrac{\alpha}{!\alpha}\ !\mathrm{I}^+ \end{array}$$

   Tal que a árvore de fórmulas cujas fórmulas topo são $!\beta_1 \ldots !\beta_n$ e fórmula final é $!\alpha$ é uma subdedução válida no sistema ILL^+.

   Podemos notar que essa regra segue o estilo proposto por Prawitz para a lógica modal S4 como mostrado no Apêndice C.

2. Regra "Contraction":

   No sistema ILL^+, ao invés da regra "Contraction", múltiplas ocorrências de rótulos para hipóteses são usadas sob certas condições como segue:

   Seja Π uma dedução em ILL^+ de $\Gamma \vdash_{\mathrm{ill}^+} !\alpha$ da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma_1 \\ !\alpha \end{array}$$

   Assim, em ILL^+, uma dedução Π' da seguinte forma pode ocorrer:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Gamma^{j_1 \ldots j_n} & & \Gamma^{j_1 \ldots j_n} \\ \Sigma_1 & & \Sigma_1 \\ !\alpha & \ldots & !\alpha \end{array} \\ \Sigma_2 \\ \beta \end{array}$$

Tal que a árvore de fórmulas cujas fórmulas topo são $!\alpha \ldots !\alpha$ e a fórmula final é β é uma subdedução válida em ILL$^+$.

Essas características do sistema ILL$^+$ requerem verificações de corretude não locais, de forma que é preciso fazer uma varredura numa dedução para garantir que as restrições relacionadas a regra $!\mathrm{I}^+$ e as múltiplas ocorrências de rótulos são obedecidas.

É importante notar que ambos sistemas ILL e ILL$^+$ são normalizados. No entanto, as provas de normalização para o sistema ILL$^+$ estão mais no espírito da normalização de Prawitz para a lógica modal S4.

5.4 O sistema NLLM

Em [dPNdM01], *de Medeiros* apresentou um investigação profunda sobre traduções entre lógicas distintas. O principal objetivo do trabalho dela foi usar teoremas de normalização como ponto de partida para definir novas traduções. Ela propôs o sistema NLLM, um cálculo de dedução natural para o fragmento multiplicativo da lógica linear. Ela também provou a equivalência entre o sistema NLLM e o fragmento multiplicativo do cálculo de seqüentes de Girard, além dos teoremas de normalização e traduções envolvendo esse fragmento.

Algumas das idéias que usamos para desenvolver nosso sistema NDLL foram inspiradas pelo trabalho de *de Medeiros*. Pretendemos posteriormente definir traduções no espírito do trabalho de *de Medeiros* usando nossos teoremas de normalização para NDLL.

O sistema de dedução natural NLLM é bastante similar ao sistema ILL apresentado acima na Seção 5.3. No entanto, NLLM trata da lógica linear clássica enquanto que ILL trata da intuicionística. Assim, em NLLM, existe uma regra "Involution" equivalente a nossa regra de redução ao absurdo. Além disso, no sistema NLLM, não existe qualquer regra para a constante multiplicativa 1.

Tal como o sistema ILL, NLLM não contém regras para os conectivos "Par" ($\parr$) e "Why not" (?). Esses conectivos são tratados por definição.

5.5 O sistema NL

Maraist [Mar00] propôs o sistema NL. Esse sistema abrange quase toda a lógica linear incluindo os fragmentos aditivo e multiplicativo, apesar de não oferecer regras para o operador ?. Notavelmente, Maraist propôs regras para o conectivo $\parr$.

O sistema NL é apresentado através da notação de seqüentes com alguns ajustes. Cada seqüente numa dedução tem duas componentes: uma zona não linear e uma zona linear. Essas zonas são separadas por um símbolo de ponto-e-vírgula ";" que ocorre no lado esquerdo de cada seqüente. A esquerda do sinal de ponto-e-vírgula temos a zona não linear, e a direita, a zona linear.

Maraist introduziu a noção de árvore de prova bem formada. Uma dedução no sistema NL é considerada uma árvore de prova bem formada se a zona não linear de seu seqüente final é vazia. Um seqüente é considerado provado se ocorre no final de uma árvore de prova bem formada.

O sistema NL apresenta um sistema de dedução natural e um sistema de tipos juntos. Para enfatizar a face de dedução natural do sistema NL omitimos a notação de tipos desse sistema.

O conjunto das regras de inferência do sistema NL é apresentado como segue:

$$\frac{}{;\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Id} \qquad \frac{}{\alpha; \vdash \alpha}\ \mathrm{Id}_!$$

$$\frac{}{; \vdash 1}\ \mathrm{I}_1 \qquad \frac{\Gamma_1;\Delta \vdash 1 \quad \Gamma_2;\Psi \vdash \alpha}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \alpha}\ \mathrm{E}_1$$

$$\frac{\Gamma_1;\Delta,\alpha \multimap \bot \vdash \bot \quad \Gamma_2;\Psi,\alpha \vdash \beta}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \beta}\ \mathrm{E}_\bot$$

$$\frac{\Gamma; \vdash \alpha}{\Gamma; \vdash !\alpha}\ \mathrm{I}_! \qquad \frac{\Gamma_1;\Delta \vdash !\alpha \quad \Gamma_2,\alpha;\Psi \vdash \beta}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \beta}\ \mathrm{E}_!$$

$$\frac{\Gamma;\Delta,\alpha \vdash \beta}{\Gamma;\Delta \vdash \alpha \multimap \beta}\ \mathrm{I}_\multimap \qquad \frac{\Gamma_1;\Delta \vdash \alpha \multimap \beta \quad \Gamma_2;\Psi \vdash \alpha}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \beta}\ \mathrm{E}_\multimap$$

$$\frac{\Gamma_1;\Delta \vdash \alpha \quad \Gamma_2;\Psi \vdash \beta}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \alpha \otimes \beta}\ \mathrm{I}_\otimes \qquad \frac{\Gamma_1;\Delta \vdash \alpha \otimes \beta \quad \Gamma_2;\Psi,\alpha,\beta \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \gamma}\ \mathrm{E}_\otimes$$

$$\frac{\Gamma_1;\Delta,\alpha \vdash \beta \quad \Gamma_2;\Psi,\alpha \multimap \bot \vdash \gamma}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \beta \parr \gamma}\ \mathrm{I}_{1\parr} \qquad \frac{\Gamma_1;\Delta \vdash \alpha \parr \beta \quad \Gamma_2;\Psi,\alpha \vdash \bot}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \beta}\ \mathrm{E}_{1\parr}$$

$$\frac{\Gamma_1;\Delta,\alpha \vdash \gamma \quad \Gamma_2;\Psi,\alpha \multimap \bot \vdash \beta}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \beta \parr \gamma}\ \mathrm{I}_{2\parr} \qquad \frac{\Gamma_1;\Delta \vdash \alpha \parr \beta \quad \Gamma_2;\Psi,\beta \vdash \bot}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2;\Delta,\Psi \vdash \alpha}\ \mathrm{E}_{2\parr}$$

$$\frac{\Gamma_1;\Delta\vdash\alpha \quad \Gamma_2;\Delta\vdash\beta}{\Gamma_1\cup\Gamma_2;\Delta\vdash\alpha\&\beta}\,\mathrm{I}_{\&} \qquad \frac{\Gamma;\Delta\vdash\alpha\&\beta}{\Gamma;\Delta\vdash\alpha}\,\mathrm{E}_{1\&}$$

$$\frac{\Gamma;\Delta\vdash\alpha}{\Gamma;\Delta\vdash\alpha\oplus\beta}\,\mathrm{I}_{1\oplus} \qquad \frac{\Gamma;\Delta\vdash\alpha\&\beta}{\Gamma;\Delta\vdash\beta}\,\mathrm{E}_{2\&}$$

$$\frac{\Gamma;\Delta\vdash\beta}{\Gamma;\Delta\vdash\alpha\oplus\beta}\,\mathrm{I}_{2\oplus} \qquad \frac{\Gamma_1;\Delta\vdash\alpha\oplus\beta \quad \Gamma_2;\Psi,\alpha\vdash\gamma \quad \Gamma_3;\Psi,\beta\vdash\gamma}{\Gamma_1\cup\Gamma_2,\cup\Gamma_3;\Delta,\Psi\vdash\gamma}\,\mathrm{E}_{\oplus}$$

A seguir mostramos um exemplo de dedução no sistema NL que prova o seqüente "$!\alpha\otimes!\beta\vdash!(\alpha\&\beta)$":

$$\dfrac{\dfrac{}{;!\alpha\otimes!\beta\vdash!\alpha\otimes!\beta}\,\mathrm{Id} \quad \dfrac{\dfrac{}{;!\alpha\vdash!\alpha}\,\mathrm{Id} \quad \dfrac{\dfrac{}{;!\beta\vdash!\beta}\,\mathrm{Id} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha;\vdash\alpha}\,\mathrm{Id}_! \quad \dfrac{}{\beta;\vdash\beta}\,\mathrm{Id}_!}{\alpha,\beta;\vdash\alpha\&\beta}\,\mathrm{I}_{\&}}{\alpha,\beta;\vdash!(\alpha\&\beta)}\,\mathrm{I}_!}{\alpha;!\beta\vdash!(\alpha\&\beta)}\,\mathrm{E}_!}{;!\alpha,!\beta\vdash!(\alpha\&\beta)}\,\mathrm{E}_!}{;!\alpha\otimes!\beta\vdash!(\alpha\&\beta)}\,\mathrm{E}_{\otimes}$$

Podemos observar que a zona não linear é dedicada às regras do operador !. Essa é uma maneira original de lidar com o aspecto modal do operador !. No entanto, a tarefa de reconhecer uma dedução como árvore de prova bem formada onera o processo de construção de deduções corretas no sistema NL.

Notadamente, Maraist propôs regras para o conectivo $\parr$. As regras de Maraist são baseadas numa espécie de silogismo em virtude do fato de que uma fórmula da forma $\alpha\parr\beta$ pode ser lida como $\alpha^{\perp}\multimap\beta$ ou como $\beta^{\perp}\multimap\alpha$.

5.6 Conclusão

Nesse Capítulo, apresentamos seis sistemas de dedução natural para a lógica linear, especificamente: N-CLL e N-ILL apresentados em [Tro92], ILL apresentado em [BBHdP92], ILL^{+} apresentado em [Tro95], NLLM apresentado em [dPNdM01] e, finalmente, o sistema NL apresentado em [Mar00].

Entre esses sistemas de dedução natural apresentados nesse Capítulo, apenas o sistema NL proposto por Maraist tem regras para $\parr$. No entanto as regras de Maraist são diferentes das nossas.

É importante notar que entre esses seis sistemas apenas N-CLL e N-ILL não foram normalizados. No entanto, como esses seis sistemas não contêm regras para o operador exponencial "Why not" (?), os sistemas que foram normalizados não apresentam os obstáculos que enfrentamos no nosso procedimento de normalização fraca em virtude do fato de que o operador ? é tratado como primitivo em nosso sistema NDLL.

Capítulo 6

Normalização para o Sistema NDLL

6.1 Introdução

Prawitz, em seu famoso trabalho [Pra65], apresentou teoremas de normalização para sistemas de dedução natural para a lógica clássica, para a lógica intuicionística e para as lógicas modais S4 e S5, promovendo a área de teoria da prova. No entanto, para provar teoremas de normalização para a lógica clássica de primeira ordem, as regras para os conectivos "$\vee$" e "$\exists$" foram suprimidas por Prawitz.

Alguns trabalhos subseqüentes preencheram essa lacuna. O trabalho de Massi [Mas90], por exemplo, propôs teoremas de normalização incluindo reduções referentes às regras para os conectivos "$\vee$" e "$\exists$".

Em nossas demonstrações dos teoremas de normalização para o sistema NDLL aplicamos a metodologia de Massi [Mas90]. Contudo, regra que envolvem os operadores exponenciais requerem e merecem uma abordagem especial, pois as reduções de Massi não cobrem regras similares às nossas regras exponenciais.

Na próxima Seção, definições importantes relacionadas a deduções normais são apresentadas. A Seção 6.3 lista e ilustra reduções, os passos atômicos empregados num procedimento de normalização. O teorema da normalização fraca bem como algumas definições adicionais são explorados na Seção 6.4. Finalmente, na Seção 6.5, o princípio da subfórmula para deduções normais é garantido.

Lemas importantes e empregados na demonstração do teorema da normalização fraca são apresentados e provados no Apêndice G.

6.2 Definições preliminares

Definição 6.1 (Segmento) *Um segmento numa dedução* Π *é uma seqüência* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *de ocorrências de fórmulas em* Π *tal que:*

1. α_1 *não é:*
   (a) *hipótese descartada por uma aplicação de* $C_!$, *nem é conseqüência de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $E_?$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1; *e*
   (b) *hipótese descartada por uma aplicação de* $I_!$ *ou* $E_?$ *que corresponde a uma premissa intermediária da mesma forma* α_1 *nessa aplicação;*
2. *Se* $i < n$, α_i *é:*
   (a) *uma premissa menor de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1, *e* α_{i+1} *ocorre imediatamente abaixo de* α_i; *ou*
   (b) *a última premissa (na ordem da esquerda para a direita) de uma aplicação de* $E_?$, *e* α_{i+1} *ocorre imediatamente abaixo de* α_i; *ou*
   (c) *uma premissa intermediária de uma aplicação de* $I_!$ *ou* $E_?$, *e* α_{i+1} *é a hipótese correspondente da mesma forma* α_i *descartada por essa aplicação; ou*
   (d) *a premissa maior de uma aplicação de* $C_!$, *e* α_{i+1} *é qualquer uma das hipóteses descartadas por essa aplicação;*
3. α_n *não é:*
   (a) *premissa menor de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $E_?$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1; *nem*
   (b) *premissa intermediária de uma aplicação de* $I_!$; *nem*
   (c) *premissa maior de uma aplicação de* $C_!$.

Podemos observar que todas as ocorrências de fórmulas num mesmo segmento são da mesma forma.

É conveniente para efeito de notação dizer que um segmento S é conseqüência de uma aplicação R de uma regra de inferência quando a primeira ocorrência de fórmula de S é conclusão de R. Podemos também dizer que um segmento S é premissa de uma aplicação R de uma regra de inferência quando a última ocorrência de fórmula de S é premissa de R.

Definição 6.2 (Segmento máximo e ocorrência de fórmula máxima) *Um segmento $S = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, é um segmento máximo se pelo menos uma das seguintes condições é válida:*

1. $n = 1$ *e* α_1 $(= \alpha_n)$ *é:*
   (a) *conclusão de uma regra de introdução e, simultaneamente, premissa maior de uma regra de eliminação.*
   (b) *conclusão de uma regra de introdução e, simultaneamente, premissa maior de uma regra* $W_!$.
   (c) *conclusão de uma aplicação de* $\perp_c$ *e, simultaneamente, premissa maior de uma regra de eliminação.*
   (d) *conclusão de uma aplicação de* $\perp_c$ *e, simultaneamente, premissa maior de uma regra* $W_!$.
   (e) *conclusão de uma aplicação de* $\perp_c$ *e, simultaneamente, premissa menor de uma aplicação de* $E_\perp$ *cuja premissa maior é uma fórmula topo da forma* $\beta^\perp$.

   Nesse caso, α_1 $(= \alpha_n)$ *é uma ocorrência de fórmula máxima.*

2. $n > 1$ *e* α_1 *é:*
   (a) *conclusão de uma regra de introdução e, simultaneamente, premissa intermediária de uma aplicação de* $I_!$.
   (b) *conclusão de uma regra de introdução e, simultaneamente, premissa intermediária de uma aplicação de* $E_?$.
   (c) *conclusão de uma regra de introdução e, simultaneamente, premissa maior de uma regra* $C_!$.
   (d) *conclusão de uma regra* $\perp_c$ *e, simultaneamente, premissa intermediária de uma aplicação de* $I_!$.
   (e) *conclusão de uma regra* $\perp_c$ *e, simultaneamente, premissa intermediária de uma aplicação de* $E_?$.
   (f) *conclusão de uma regra* $\perp_c$ *e, simultaneamente, premissa maior de uma regra* $C_!$.

   Nesse caso, α_1 *é uma ocorrência de fórmula máxima.*

3. $n > 1$ *e* α_i*, para* $1 < i < n$*, é:*
   (a) *conclusão de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1 *e, simultaneamente, premissa intermediária de* $I_!$.

(b) *conclusão de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1 *e, simultaneamente, premissa intermediária de* $E_?$.

(c) *conclusão de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1 *e, simultaneamente, premissa maior de* $C_!$.

Nesse caso, α_i *é uma ocorrência de fórmula máxima.*

4. $n > 1$ *e* α_n *é:*

(a) *conclusão de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $E_?$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1 *e, simultaneamente, premissa maior de uma regra de eliminação.*

(b) *conclusão de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1 *e, simultaneamente, premissa maior de uma aplicação de* $W_!$.

(c) *conclusão de uma aplicação de* $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $E_?$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1 *e, simultaneamente, premissa menor de uma aplicação de* $E_\perp$ *cuja premissa maior é uma fórmula topo da forma* $\beta^\perp$.

Nesse caso, α_n *é uma ocorrência de fórmula máxima.*

Podemos notar que um mesmo segmento máximo pode conter mais de uma ocorrência de fórmula máxima. Esse é o caso do segmento máximo $S = \alpha_1, \ldots, \alpha_4$ apresentado em negrito na seguinte dedução Π:

$\Pi \equiv$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{γ}
\AxiomC{$\gamma \multimap (!\beta)$}
\RightLabel{$\mathrm{E}_\multimap$}
\BinaryInfC{$!\beta$}
\AxiomC{$!\beta^1$}
\RightLabel{$\mathrm{I}_{!(1)}$}
\BinaryInfC{$\mathbf{!!\beta}$}
\AxiomC{$!!\beta^2$}
\AxiomC{$\mathbf{!!\beta}^2$}
\RightLabel{$\mathrm{W}_!$}
\BinaryInfC{$\mathbf{!!\beta}$}
\RightLabel{$\mathrm{C}_{!(2)}$}
\BinaryInfC{$\mathbf{!!\beta}$}
\RightLabel{$\mathrm{E}_!$}
\UnaryInfC{$!\beta$}
\end{prooftree}
$$

Tanto α_1 quanto α_4 são ocorrências de fórmulas máximas em S.

Definição 6.3 (Dedução normal) *Uma dedução* Π *é normal se e somente se* Π *não contém segmentos máximos.*

Podemos observar que nenhum dos segmentos numa dedução normal é conclusão de regra de introdução ou $\perp_c$ e, simultaneamente, premissa maior de regra de eliminação ou $\mathrm{W}_!$.

6.3 Reduções

Nessa Seção, apresentamos as redução aplicadas para remover ocorrências de fórmulas máximas de deduções em NDLL. Classificamos essas reduções em quatro categorias: reduções operacionais, reduções permutativas, reduções do absurdo e reduções exponenciais.

Nossas reduções operacionais, permutativas e do obsurdo são análogas às do mesmo tipo apresentadas por Massi em [Mas90] e algumas de nossas reduções exponenciais são baseadas no trabalho de *de Medeiros* [dPNdM01].

Contudo, as reduções exponenciais 29, 33, 37 e 41 apresentadas a seguir foram formuladas de acordo com circunstâncias peculiares que podem ocorrer numa dedução NDLL quando uma premissa intermediária ou quando uma premissa maior de $C_!$ ou $W_!$ é simultaneamente conclusão de $I_\perp$.

Reduções operacionais

Reduções operacionais são empregadas para remover ocorrências de fórmulas máximas do tipo 1.(a).

1. redução-$\multimap$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\alpha \multimap \beta}\,\mathrm{I}_{\multimap(j)}}{\beta}\,\mathrm{E}_{\multimap}\\ \Pi\end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\\ \Sigma_2\\ \beta\\ \Pi\end{array}$$

2. redução-$\otimes$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \alpha & \beta\end{array}}{\alpha\otimes\beta}\,\mathrm{I}_{\otimes} \quad \begin{array}{c}\alpha^j \quad \beta^k\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{\otimes(j,k)}\\ \Pi\end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \alpha & \beta\end{array}\\ \Sigma_3\\ \gamma\\ \Pi\end{array}$$

3. redução-$⅋$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j_1} \quad \beta^{\perp j_2}\\ \Sigma_1\\ \perp\end{array}}{\alpha⅋\beta}\,\mathrm{I}_{⅋(j_1,j_2)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \alpha^\perp\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \beta^\perp\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_{⅋}\\ \Pi\end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\Sigma_2 & \Sigma_3\\ \alpha^\perp & \beta^\perp\end{array}\\ \Sigma_1\\ \perp\\ \Pi\end{array}$$

4. redução-&: ($i = 1$ ou 2)

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{j_1\cdots j_n}\\ \Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1\cdots j_n}\\ \Sigma_2\\ \alpha_2\end{array}}{\alpha_1 \& \alpha_2}\,\mathrm{I}_{\&}}{\alpha_i}\,\mathrm{E}_{i\&} \\ \Pi \end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1\cdots j_n}\\ \Sigma_i\\ \alpha_i\\ \Pi\end{array}$$

5. redução-⊕: ($i = 1$ ou 2)

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_i\\ \alpha_i\end{array}}{\alpha_1 \oplus \alpha_2}\,\mathrm{I}_{i\oplus} \quad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1\cdots j_n}\ \alpha_1^{k_1}\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1\cdots j_n}\ \alpha_2^{k_2}\\ \Sigma_4\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \\ \Pi \end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \Sigma_i \\ \Gamma^{j_1\cdots j_n} & \alpha_i \end{array}\\ \Sigma_{i+2}\\ \gamma\\ \Pi\end{array}$$

6. redução-∀:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \alpha_a^x\end{array}}{\forall x\alpha}\,\mathrm{I}_{\forall}}{\alpha_t^x}\,\mathrm{E}_{\forall} \\ \Pi \end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c}\Sigma_t^a\\ \alpha_t^x\\ \Pi\end{array}$$

7. redução-∃:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_t^x\end{array}}{\exists x\alpha}\,\mathrm{I}_{\exists} \quad \begin{array}{c}\alpha_a^{x\,j}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{E}_{\exists(j)} \\ \Pi \end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_t^x\\ {\Sigma_2}_t^a\\ \beta\\ \Pi\end{array}$$

8. redução-!:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ \ldots\ \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}}{\beta}\,\mathrm{E}_{!} \\ \Pi \end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\\ \Pi\end{array}$$

9. redução-?:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array}}{?\alpha}\,\mathrm{I}_{?} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta_1^{j_1}\ \ldots\ \beta_n^{j_n}\quad \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_n,k)} \\ \Pi \end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\\ \Pi\end{array}$$

10. redução-1:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,\mathrm{E}_1\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\\ \Pi\end{array}$$

11. redução-$\perp$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \Sigma_2\\ \perp\end{array}}{\alpha^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\\ \Sigma_2\\ \perp\\ \Pi\end{array}$$

Reduções permutativas

Reduções permutativas são empregadas para remover ocorrências de fórmulas máximas dos tipos 3.(a)-(c) e 4.(a)-(b).

12.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,R_1 \quad \Sigma_3}{\gamma}\,R_2\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array} \quad \Sigma_3}{\gamma}\,R_2}{\gamma}\,R_1\\ \Pi\end{array}$$

$R_1 = \mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1 e α é a premissa maior de R_1. R_2 é uma regra de eliminação ou é uma aplicação de $\mathrm{C}_!$ ou $\mathrm{W}_!$. β é a premissa maior de R_2. Σ_3 pode estar a esquerda de β e pode também ser vazia.

13. redução-$\mathrm{E}_\oplus$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\oplus\beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \alpha^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \beta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\ldots l_n}\\ \Sigma_4\end{array}}{\delta}\,R\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\oplus\beta\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \alpha^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\ldots l_n}\\ \Sigma_4\end{array}}{\delta}\,R \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \beta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\ldots l_n}\\ \Sigma_4\end{array}}{\delta}\,R}{\delta}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}\\ \Pi\end{array}$$

R é uma regra de eliminação ou é uma aplicação de $\mathrm{C}_!$ ou $\mathrm{W}_!$. γ é a premissa maior de R. Σ_4 pode estar a esquerda de γ e pode também ser vazia. É importante notar que a redução-$E_\oplus$ duplica o multiset de fórmulas topo $\Gamma_2^{l_1 \dots l_n}$ e assim preserva as restrições da regra $E_\oplus$.

14. redução-$E_?$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix}\quad \dots \quad\begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix}\quad\begin{matrix}\beta_1^{j_1}\ \dots\ \beta_n^{j_n}\ \ \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k)}\quad \Sigma'}{\begin{matrix}\delta\\ \Pi\end{matrix}}\,R$$

γ é a premissa maior de R e Σ', se R for $E_\perp$, está a esquerda de γ. Como γ é uma fórmula essencialmente ?-modal, R é $E_\parr$, $E_?$ ou $E_\perp$. Assim temos um dos seguintes casos:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix}\quad \dots \quad\begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix}\quad\begin{matrix}\beta_1^{j_1}\ \dots\ \beta_n^{j_n}\ \ \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \psi\parr\phi\end{matrix}}{\psi\parr\phi}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k)}\quad \begin{matrix}\Sigma_{n+3}\\ \psi^\perp\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma_{n+4}\\ \phi^\perp\end{matrix}}{\begin{matrix}\perp\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_\parr \qquad \rhd\rhd$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix}\quad \dots \quad\begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma_{n+3}\\ \psi^\perp\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma_{n+4}\\ \phi^\perp\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{matrix}\beta_1^{j_1}\ \dots\ \beta_n^{j_n}\ \ \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \psi\parr\phi\end{matrix}\quad {\psi^\perp}^{l_1}\quad {\phi^\perp}^{l_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\parr}{\begin{matrix}\perp\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,l_1,l_2,k)}$$

Nesse caso δ é $\perp$ e γ é $\psi\parr\phi$. $\perp$ é por definição uma fórmula essencialmente ?-modal. Como γ também é uma fórmula essencialmente ?-modal, então $\psi^\perp$ e $\phi^\perp$ são ambas fórmulas essencialmente !-modais. Dessa forma, essa redução preserva as restrições da regra $E_?$.

(b)

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\quad \dots\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\quad \begin{array}{c}\beta_1^{j_1}\quad \dots\quad \beta_n^{j_n}\quad \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ ?\psi\end{array}}{?\psi}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k)}\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+3}\\ \phi_1\end{array}\quad \dots\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+m+2}\\ \phi_m\end{array}\quad \begin{array}{c}\phi_1^{l_1}\quad \dots\quad \phi_m^{l_m}\quad \psi^{l_{m+1}}\\ \Sigma_{n+m+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{m+1})}\\
\Pi
\end{array}
\quad \rhd\rhd
$$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\quad \dots\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+3}\\ \phi_1\end{array}\quad \dots\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+m+2}\\ \phi_m\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\beta_1^{j_1}\quad \dots\quad \beta_n^{j_n}\quad \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ ?\psi\end{array}\quad \phi_1^{j_{n+1}}\quad \dots\quad \phi_m^{j_{n+m}}\quad \begin{array}{c}\phi_1^{l_1}\quad \dots\quad \phi_m^{l_m}\quad \psi^{l_{m+1}}\\ \Sigma_{n+m+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{m+1})}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_{n+m},k)}\\
\Pi
\end{array}
$$

Como δ é uma fórmula essencialmente ?-modal e $\phi_1, \dots, \phi_m$ são fórmulas essencialmente !-modais, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_?$.

(c)

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{n+3}\\ \psi\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix}\quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\beta_1^{j_1}\ \ \dots\ \ \beta_n^{j_n}\ \ \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \psi^\perp\end{matrix}}{\psi^\perp}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k)}}{\begin{matrix}\perp\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_\perp \qquad \rhd\rhd$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix}\quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+3}\\ \psi\end{matrix} \qquad \dfrac{\psi^l \qquad \begin{matrix}\beta_1^{j_1}\ \ \dots\ \ \beta_n^{j_n}\ \ \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \psi^\perp\end{matrix}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\begin{matrix}\perp\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,l,k)}$$

Nessa caso δ é $\perp$ e γ é $\psi^\perp$. Por definição $\perp$ é uma fórmula essencialmente ?-modal. Como γ é também uma fórmula essencialmente ?-modal, então ψ é uma fórmula essencialmente !-modal. Dessa forma, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_?$.

15.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,R \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{matrix}\quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\beta^k\ \ \gamma_1^{j_1}\ \ \dots\ \ \gamma_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{matrix}}{\begin{matrix}!\delta\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{I}_{!(k,j_1,\dots,j_n)} \qquad \rhd\rhd$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha\end{matrix}\qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{matrix}\quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\beta^k\ \ \gamma_1^{j_1}\ \ \dots\ \ \gamma_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{matrix}}{!\delta}\,\mathrm{I}_{!(k,j_1,\dots,j_n)}}{\begin{matrix}!\delta\\ \Pi\end{matrix}}\,R$$

$R = \mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1 e α é a premissa maior de R. A premissa β da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segundo dedução, a premissa β também está a direita de γ_i.

16.

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\oplus\beta\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.m}} \quad \alpha^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \gamma\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.m}} \quad \beta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array}
}{\gamma}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}
\quad
\begin{array}{c}\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.p}}\\ \Sigma_4\\ \delta_1\end{array}
\quad \dots \quad
\begin{array}{c}\Gamma_{n+1}^{j_{n+1.1}\cdots j_{n+1.q}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta_n\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\gamma^{k_3} \quad \delta_1^{l_1} \quad \dots \quad \delta_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi\end{array}
}{!\psi}\,\mathrm{I}_{!(k_3,l_1,\dots,l_n)}\\
\Pi
\end{array}
\qquad \rhd\rhd
$$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\oplus\beta\end{array}
\quad
\dfrac{
\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.m}} \quad \alpha^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \gamma\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.p}}\\ \Sigma_4\\ \delta_1\end{array}
\quad \dots \quad
\begin{array}{c}\Gamma_{n+1}^{j_{n+1.1}\cdots j_{n+1.q}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta_n\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\gamma^{k_3} \quad \delta_1^{l_1} \quad \dots \quad \delta_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi\end{array}
}{!\psi}\,\mathrm{I}_{!(k_3,l_1,\dots,l_n)}
\quad
\dfrac{
\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.m}} \quad \beta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.p}}\\ \Sigma_4\\ \delta_1\end{array}
\quad \dots \quad
\begin{array}{c}\Gamma_{n+1}^{j_{n+1.1}\cdots j_{n+1.q}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta_n\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\gamma^{k_4} \quad \delta_1^{l_{n+1}} \quad \dots \quad \delta_n^{l_{2n}}\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi\end{array}
}{!\psi}\,\mathrm{I}_{!(k_4,l_{n+1},\dots,l_{2n})}
}{!\psi}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}\\
\Pi
\end{array}
$$

A premissa γ da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa δ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa γ também está a direita de δ_i.

É importante notar que essa redução duplica os multisets de fórmulas topo $\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.p}}, \dots, \Gamma_{n+1}^{j_{n+1.1}\cdots j_{n+1.q}}$ e assim preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_\oplus$.

17.

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,R \quad \begin{matrix}\Sigma_4\\ \delta_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+3}\\ \delta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\gamma^k \quad \delta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \delta_n^{j_n} \quad \alpha^l\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi\end{matrix}}{\begin{matrix}\psi\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{?(k,j_1,\ldots,j_n,l)} \qquad \rhd\rhd
$$

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_4\\ \delta_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+3}\\ \delta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\gamma^k \quad \delta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \delta_n^{j_n} \quad \alpha^l\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(k,j_1,\ldots,j_n,l)}}{\begin{matrix}\psi\\ \Pi\end{matrix}}\,R
$$

$R = \mathrm{E}_{\otimes}$, $\mathrm{E}_{\exists}$, $\mathrm{C}_{!}$, $\mathrm{W}_{!}$ ou E_{1} e β é a premissa maior de R. A premissa γ da regra $\mathrm{E}_{?}$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa δ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa γ também está a direita de δ_i.

18. Seja Σ' a seguinte seqüência de deduções:

$$\Sigma' \equiv \begin{array}{c}\Gamma_3^{j_{3.1}\cdots j_{3.p}}\\ \Sigma_5\\ \psi_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Gamma_{n+2}^{j_{n+2.1}\cdots j_{n+2.q}}\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi_n\end{array}$$

Então temos a seguinte redução:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.r}}\\ \Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\oplus\gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.m}} \ \beta^{k_1}\\ \Sigma_3\\ \delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.m}} \ \gamma^{k_2}\\ \Sigma_4\\ \delta\end{array}}{\delta}\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \quad \Sigma' \quad \begin{array}{c}\delta^{k_3} \ \psi_1^{l_1} \ \ldots \ \psi_n^{l_n} \ \alpha_4^{k}\\ \Sigma_{n+5}\\ \phi\end{array}}{\phi}\mathrm{E}_{?(k_3,l_1,\ldots,l_n,k_4)}\\ \Pi\end{array} \quad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\oplus\gamma\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.r}}\\ \Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.m}} \ \beta^{k_1}\\ \Sigma_3\\ \delta\end{array} \quad \Sigma' \quad \begin{array}{c}\delta^{k_3} \ \psi_1^{l_1} \ \ldots \ \psi_n^{l_n} \ \alpha^{k_4}\\ \Sigma_{n+5}\\ \phi\end{array}}{\phi}\mathrm{E}_{?(k_3,l_1,\ldots,l_n,k_4)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.r}}\\ \Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{j_{2.1}\cdots j_{2.m}} \ \gamma^{k_2}\\ \Sigma_4\\ \delta\end{array} \quad \Sigma' \quad \begin{array}{c}\delta^{k_5} \ \psi_1^{l_{n+1}} \ \ldots \ \psi_n^{l_{2n}} \ \alpha^{k_6}\\ \Sigma_{n+5}\\ \phi\end{array}}{\phi}\mathrm{E}_{?(k_5,l_{n+1},\ldots,l_{2n},k_6)}}{\phi}\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa δ da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa ψ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa δ também está a direita de ψ_i.

É importante notar que essa redução duplica os multisets de fórmulas topo $\Gamma_1^{j_{1.1}\cdots j_{1.r}}, \Gamma_3^{j_{3.1}\cdots j_{3.p}}, \ldots, \Gamma_{n+2}^{j_{n+2.1}\cdots j_{n+2.q}}$ e assim preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_\oplus$.

Reduções do absurdo

Reduções do absurdo são empregadas para remover ocorrências de fórmulas máximas dos tipos 1.(c)-(e), 2.(d)-(f) e 4.(c).

19.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{\alpha}\,\perp_{c(j)}\end{array}\qquad \Sigma_2}{\beta}\,R\\ \Pi\end{array}\qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^k \quad \Sigma_2}{\beta}\,R \qquad \beta^{\perp l}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(k)}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(l)}\\ \Pi\end{array}$$

R é uma regra de eliminação ou é uma aplicação de $\mathrm{C}_!$ ou $\mathrm{W}_!$. α é a premissa maior de R. Σ_2 pode estar a esquerda de α e pode também ser vazia.

20.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{\alpha}\,\perp_{c(j)}\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \beta_1^{l_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(k,l_1,\ldots,l_n)}\\ \Pi\end{array}\qquad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^{j_1}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \beta_1^{l_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(k,l_1,\ldots,l_n)} \qquad (!\gamma)^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{!\gamma}\,\perp_{c(j_2)}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa α da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita da premissa β_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa α também está a direita de β_i.

21.

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^{\perp j}\\ \Sigma_2\\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^{k_1} \quad \gamma_1^{l_1} \quad \ldots \quad \gamma_n^{l_n} \quad \alpha^{k_2}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{\begin{array}{c}\delta\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{?(k_1,l_1,\ldots,l_n,k_2)} \qquad \rhd\rhd
$$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \beta^{j_1} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^{k_1} \quad \gamma_1^{l_1} \quad \ldots \quad \gamma_n^{l_n} \quad \alpha^{k_2}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(k_1,l_1,\ldots,l_n,k_2)} \qquad \delta^{\perp j_2}}{\dfrac{\perp}{\beta^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}}\,\mathrm{E}_{\perp}\\
\Sigma_2\\
\dfrac{\perp}{\delta}\,\perp_{c(j_2)}\\
\Pi
\end{array}
$$

A premissa β da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa β também está a direita de γ_i.

22.

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{\alpha}\,\perp_{c(j)}\end{array} \quad \alpha^{\perp k}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{\perp} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\alpha^{\perp k}\\ \Sigma_1\\ \perp\\ \Pi\end{array}
$$

23.

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,R \qquad \beta^{\perp j}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{\perp} \qquad \rhd\rhd \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array} \quad \beta^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Pi\end{array}}\,R
$$

$R = \mathrm{E}_{\otimes}$, $\mathrm{E}_{\exists}$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1 e α é a premissa maior de R.

24.

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha \oplus \beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1 \ldots j_n} \; \alpha^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1 \ldots j_n} \; \beta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \qquad \gamma^{\perp l}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{\perp} \qquad \rhd\rhd
$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\oplus\beta\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{j_1\ldots j_n}\ \alpha^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \gamma\end{array} \quad \gamma^{\perp l}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{j_1\ldots j_n}\ \beta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array} \quad \gamma^{\perp l}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

É importante notar que essa redução duplica a hipótese $\gamma^{\perp l}$ e assim preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_{\oplus}$.

25.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{j_n} \quad \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_n,k)} \quad \gamma^{\perp l}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{\perp} \qquad \rhd\rhd$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \gamma^{\perp l} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\beta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{j_n} \quad \alpha^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array} \quad \gamma^{\perp j_{n+1}}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_{n+1},k)}$$

Por definição $\perp$ é uma fórmula essencialmente ?-modal. Como γ é também uma fórmula essencialmente ?-modal, então $\gamma^{\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal. Dessa forma, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_{?}$.

Reduções exponenciais

Reduções exponenciais para a regra $\mathrm{I}_!$

Reduções exponenciais para a regra $\mathrm{I}_!$ são empregadas para remover ocorrências de fórmulas máximas do tipo 2.(a).

26.

$$\dfrac{\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}1^{j_1} \quad \alpha_1^{j_2} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_{n+1}}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{\begin{array}{c}!\beta\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_{n+1})} \qquad \rhd\rhd \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \alpha_1^{j_2} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_{n+1}}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{\begin{array}{c}!\beta\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{I}_{!(j_2,\ldots,j_{n+1})}$$

A premissa 1 da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa α_i para $1 \leq i \leq n$.

27.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array}\quad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\alpha\otimes\beta}\,\mathrm{I}_\otimes\quad\begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array}\qquad\begin{array}{c}\alpha\otimes\beta^k\ \ \gamma_1^{j_1}\ \dots\ \gamma_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{!\delta}\,\mathrm{I}_{!(k,j_1,\dots,j_n)}\\ \Pi\end{array}\qquad\rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array}\ \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}\ \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\alpha^{k_1}\quad\beta^{k_2}}{\alpha\otimes\beta}\,\mathrm{I}_\otimes\ \ \gamma_1^{j_1}\ \dots\ \gamma_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{!\delta}\,\mathrm{I}_{!(k_1,k_2,j_1,\dots,j_n)}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa $\alpha\otimes\beta$ da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \le i \le n$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas α e β também estão a direita de γ_i.

Como $\alpha\otimes\beta$ é uma fórmula essencialmente !-modal, α e β também são fórmulas essencialmente !-modais. Dessa forma, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{I}_!$.

28.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array}\quad\begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ \dots\ \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}\quad\begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+m+1}\\ \gamma_m\end{array}\qquad\begin{array}{c}!\beta^k\ \ \gamma_1^{l_1}\ \dots\ \gamma_m^{l_m}\\ \Sigma_{n+m+2}\\ \delta\end{array}}{!\delta}\,\mathrm{I}_{!(k,l_1,\dots,l_m)}\\ \Pi\end{array}\qquad\rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array}\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+m+1}\\ \gamma_m\end{array}\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\alpha_1^{k_1}\ \dots\ \alpha_n^{k_n}\quad\begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ \dots\ \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}\ \ \gamma_1^{l_1}\ \dots\ \gamma_m^{l_m}\\ \Sigma_{n+m+2}\\ \delta\end{array}}{!\delta}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\dots,k_n,l_1,\dots,l_m)}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa $!\beta$ da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \le i \le m$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ também estão a direita de γ_i.

29.

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\alpha^j\\ \Sigma_1\\ \perp\end{matrix}}{\alpha^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\alpha^{\perp l_1} \quad \beta_1^{l_2} \quad \dots \quad \beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{matrix}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\dots,l_{n+1})}\\
\Pi
\end{array}
$$

A premissa $\alpha^{\perp}$ da regra $\mathrm{I}_!$ pode estar a direita de uma premissa β_i para $1 \leq i \leq n$.

A ocorrência de hipótese α^j é premissa de uma regra R. Como $\alpha^{\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal, α é uma fórmula essencialmente ?-modal. Dessa forma, se α^j for premissa maior de R, então R é $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{E}_{⅋}$ ou $\mathrm{E}_{\perp}$. Assim, temos uma das seguintes reduções dependendo de R e α^j:

(a) R é uma aplicação de regra de introdução ou α^j é premissa menor de R:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\alpha^j\\ \Sigma_1\\ \perp\end{matrix}}{\alpha^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\alpha^{\perp l_1} \quad \beta_1^{l_2} \quad \dots \quad \beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{matrix}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\dots,l_{n+1})}\\
\Pi
\end{array}
\qquad \rhd\rhd
$$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^{\perp j_1} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\alpha^{\perp l_1} \quad \beta_1^{l_2} \quad \dots \quad \beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{matrix}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\dots,l_{n+1})} \quad (!\gamma)^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\alpha}\,\perp_{c(j_1)}\\
\Sigma_1\\
\dfrac{\perp}{!\gamma}\,\perp_{c(j_2)}\\
\Pi
\end{array}
$$

A premissa $\alpha^{\perp}$ da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa β_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa $\alpha^{\perp}$ também está a direita de β_i.

(b) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_{\perp}$ e α^j é a premissa maior de R, assim α^j é da forma $\delta^{\perp j}$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta\end{array}\quad \delta^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}\\ \Sigma_{1.2}\\ \perp\end{array}}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\delta^{\perp\perp l_1} \quad \beta_1^{l_2} \quad \ldots \quad \beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\ldots,l_{n+1})}\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta\end{array}\quad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\quad\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\delta^{l_1}\quad\delta^{\perp j_1}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}\quad \beta_1^{l_2}\quad\ldots\quad\beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\ldots,l_{n+1})}\quad (!\gamma)^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}\\ \Sigma_{1.2}\\ \dfrac{\perp}{!\gamma}\,\perp_{c(j_2)}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa $\delta^{\perp\perp}$ da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa β_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa δ também está a direita de β_i.

Como $\delta^{\perp\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal, δ também é. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{I}_!$.

(c) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_{\parr}$ e α^j é a premissa maior de R, assim α^j é da forma $\delta\parr\psi^j$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\delta\parr\psi^j\quad\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta^{\perp}\end{array}\quad\begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \psi^{\perp}\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}\\ \Sigma_{1.3}\\ \perp\end{array}}{(\delta\parr\psi)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)}\quad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\quad\begin{array}{c}(\delta\parr\psi)^{\perp l_1}\quad\beta_1^{l_2}\quad\ldots\quad\beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\ldots,l_{n+1})}\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta^{\perp}\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \psi^{\perp}\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_{2}\\ \beta_1\end{array}\quad \ldots\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\delta\parr\psi^{j_1}\quad \delta^{\perp j_2}\quad \psi^{\perp j_3}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}}{(\delta\parr\psi)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}\quad \beta_1^{l_2}\quad \ldots\quad \beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(j_2,j_3,l_2,\ldots,l_{n+1})}\qquad (!\gamma)^{\perp j_4}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Sigma_{1.3}\\ \dfrac{\perp}{!\gamma}\,\perp_{c(j_4)}\\ \Pi\end{array}}\,\mathrm{E}_{\perp}
$$

A premissa $(\delta\parr\psi)^{\perp}$ da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa β_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas $\delta^{\perp}$ e $\psi^{\perp}$ também estão a direita de β_i.

Como $(\delta\parr\psi)^{\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal, $\delta^{\perp}$ e $\psi^{\perp}$ também são. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{I}_!$.

(d) $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_?$ e α^j é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim α^j é da forma $?\delta^j$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{?\delta^j \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \psi_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.m}\\ \psi_m\end{matrix} \quad \begin{matrix}\psi_1^{k_1} \quad \dots \quad \psi_m^{k_m} \quad \delta^{k_{m+1}}\\ \Sigma_{1.(m+1)}\\ \phi\end{matrix}}{\phi}\ \mathrm{E}_{?(k_1,\dots,k_{m+1})}\\ \Sigma_{1.(m+2)}\end{matrix}}{\bot}}{(?\delta)^{\bot}}\ \mathrm{I}_{\bot(j)} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}(?\delta)^{\bot\, l_1} \quad \beta_1^{l_2} \quad \dots \quad \beta_n^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{matrix}}{\begin{matrix}!\gamma\\ \Pi\end{matrix}}\ \mathrm{I}_{!(l_1,\dots,l_{n+1})}
$$

$\rhd\rhd$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \psi_1\end{matrix}\quad \ldots \quad
\begin{matrix}\Sigma_{1.m}\\ \psi_m\end{matrix}\quad
\begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta_1\end{matrix}\quad \ldots \quad
\begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{matrix}\quad
\phi^{\perp\, j_1}
\qquad
\begin{matrix}
\dfrac{\dfrac{\dfrac{?\delta^{j_2} \quad \psi_1^{j_3} \quad \ldots \quad \psi_m^{j_{m+2}} \quad \begin{matrix}\psi_1^{k_1} \quad \ldots \quad \psi_m^{k_m} \quad \delta^{k_{m+1}}\\ \Sigma_{1.(m+1)}\\ \phi\end{matrix}}{\phi}\ \mathrm{E}_{?(k_1,\ldots,k_{m+1})} \quad \phi^{\perp\, j_{m+3}}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}}{(?\delta)^{\perp}}\ \mathrm{I}_{\perp(j_2)}
\quad \beta_1^{l_2} \quad \ldots \quad \beta_n^{l_{n+1}}\\
\Sigma_{n+2}\\
\gamma
\end{matrix}
}{!\gamma}\ \mathrm{I}_{!(j_3,\ldots,j_{m+3},l_2,\ldots,l_{n+1})}
\quad (!\gamma)^{\perp\, j_{m+4}}
}{\dfrac{\perp}{\phi}\ \perp_{c(j_1)}}\ \mathrm{E}_{\perp}
}{}
$$

$$
\begin{matrix}
\Sigma_{1.(m+2)}\\
\dfrac{\perp}{!\gamma}\ \perp_{c(j_{m+4})}\\
\Pi
\end{matrix}
$$

A premissa $(?\delta)^{\perp}$ da regra $\mathrm{I}_!$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa β_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas $\psi_1, \ldots, \psi_m$ também estão a direita de β_i.

Como ϕ é uma fórmula essencialmente ?-modal, então $\phi^{\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{I}_!$.

Reduções exponenciais para a regra $\mathrm{E}_?$

Reduções exponenciais para a regra $\mathrm{E}_?$ são empregadas para remover ocorrências de fórmulas máximas do tipo 2.(b).

30.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}1^k \quad \beta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{j_n} \quad \alpha^l\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{?(k,j_1,\ldots,j_n,l)}$$
$$\Pi \qquad\qquad \rhd\rhd$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \beta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \beta_n^{j_n} \quad \alpha^l\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_n,l)}$$
$$\Pi$$

A premissa 1 da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa β_i para $1 \leq i \leq n$.

31.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\beta\otimes\gamma}\,\mathrm{I}_\otimes \quad \begin{array}{c}\Sigma_4\\ \delta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+3}\\ \delta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta\otimes\gamma^k \quad \delta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \delta_n^{j_n} \quad \alpha^l\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi\end{array}}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(k,j_1,\ldots,j_n,l)}$$
$$\Pi \qquad\qquad \rhd\rhd$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_4\\ \delta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+3}\\ \delta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\beta^{k_1} \quad \gamma^{k_2}}{\beta\otimes\gamma}\,\mathrm{I}_\otimes \quad \delta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \delta_n^{j_n} \quad \alpha^l\\ \Sigma_{n+4}\\ \psi\end{array}}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(k_1,k_2,j_1,\ldots,j_n,l)}$$
$$\Pi$$

A premissa $\beta\otimes\gamma$ da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa δ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas β e γ também estão a direita de δ_i.

Como $\beta\otimes\gamma$ é uma fórmula essencialmente !-modal, β e γ também são. Dessa forma, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_?$.

32.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\quad \begin{array}{c}\beta_1^{j_1}\ \ldots\ \beta_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+3}\\ \delta_1\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+m+2}\\ \delta_m\end{array} \quad \begin{array}{c}!\gamma^{k}\ \ \delta_1^{k_1}\ \ldots\ \delta_m^{k_m}\ \ \alpha^{l}\\ \Sigma_{n+m+3}\\ \psi\end{array}}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(k,k_1,\ldots,k_m,l)}\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \ \ \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta_1\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \beta_n\end{array}\ \ \begin{array}{c}\Sigma_{n+3}\\ \delta_1\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+m+2}\\ \delta_m\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\beta_1^{j_{n+1}}\ \ldots\ \beta_n^{j_{2n}}\quad \begin{array}{c}\beta_1^{j_1}\ \ldots\ \beta_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}\ \ \delta_1^{k_1}\ \ldots\ \delta_m^{k_m}\ \ \alpha^{l}\\ \Sigma_{n+m+3}\\ \psi\end{array}}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(j_{n+1},\ldots,j_{2n},k_1,\ldots,k_m,l)}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa $!\gamma$ da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa δ_i para $1 \leq i \leq m$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ também estão a direita de δ_i.

33.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^j\\ \Sigma_2\\ \dfrac{\bot}{\beta^\bot}\,\mathrm{I}_{\bot(j)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array} \ \ldots \ \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^{\bot l_1} \ \ \gamma_1^{l_2} \ \ldots \ \gamma_n^{l_{n+1}} \ \ \alpha^{l_{n+2}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\ldots,l_{n+2})}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa $\beta^\bot$ da regra $\mathrm{E}_?$ pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \leq i \leq n$.

A ocorrência de hipótese β^j é premissa de uma regra R. Como $\beta^\bot$ é uma fórmula essencialmente !-modal, β é uma fórmula essencialmente ?-modal. Dessa forma, se β^j for premissa maior de R, então R é $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{E}_{⅋}$ ou $\mathrm{E}_\bot$. Assim, temos uma das seguintes reduções dependendo de R e β^j:

(a) R é uma aplicação de regra de introdução ou β^j é premissa menor de R:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^j\\ \Sigma_2\\ \dfrac{\bot}{\beta^\bot}\,\mathrm{I}_{\bot(j)}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array} \ \ldots \ \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^{\bot l_1} \ \ \gamma_1^{l_2} \ \ldots \ \gamma_n^{l_{n+1}} \ \ \alpha^{l_{n+2}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\ldots,l_{n+2})}\\ \Pi\end{array} \quad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \beta^{\bot j_1} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array} \ \ldots \ \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^{\bot l_1} \ \ \gamma_1^{l_2} \ \ldots \ \gamma_n^{l_{n+1}} \ \ \alpha^{l_{n+2}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\ldots,l_{n+2})} \quad \delta^{\bot j_2}}{\bot}\,\mathrm{E}_\bot}{\beta}\,\bot_{c(j_1)}\\ \Sigma_2\\ \dfrac{\bot}{\delta}\,\bot_{c(j_2)}\\ \Pi\end{array}$$

A premissa $\beta^\bot$ da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa $\beta^\bot$ também está a direita de γ_i.

(b) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_\bot$ e β^j é a premissa maior de R, assim β^j é da forma $\psi^{\bot j}$:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{2.1}\\ \psi\end{array} \quad \psi^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}\\ \Sigma_{2.2}\\ \perp\end{array}}{\psi^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\psi^{\perp\perp l_1} \quad \gamma_1^{l_2} \quad \dots \quad \gamma_n^{l_{n+1}} \quad \alpha^{l_{n+2}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{n+2})}\\
\Pi
\end{array}
\qquad \rhd\rhd
$$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{2.1}\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\psi^{l_1} \quad \psi^{\perp j_1}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\psi^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)} \quad \gamma_1^{l_2} \quad \dots \quad \gamma_n^{l_{n+1}} \quad \alpha^{l_{n+2}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{n+2})} \quad \delta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}\\
\Sigma_{2.2}\\
\dfrac{\perp}{\delta}\,\perp_{c(j_2)}\\
\Pi
\end{array}
$$

A premissa $\psi^{\perp\perp}$ da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, a premissa ψ também está a direita de γ_i.

Como $\psi^{\perp\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal, ψ também é. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_?$.

(c) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_{\parr}$ e β^j é a premissa maior de R, assim β^j é da forma $\psi\parr\phi^j$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\psi\parr\phi^j \quad \begin{matrix}\Sigma_{2.1}\\ \psi^\perp\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{2.2}\\ \phi^\perp\end{matrix}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}\\ \Sigma_{2.3}\\ \perp\end{matrix}}{(\psi\parr\phi)^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}(\psi\parr\phi)^{\perp l_1} \quad \gamma_1^{l_2} \quad \ldots \quad \gamma_n^{l_{n+1}} \quad \alpha^{l_{n+2}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{matrix}}{\begin{matrix}\delta\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\ldots,l_{n+2})} \qquad \rhd\rhd$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ ?\alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{2.1}\\ \psi^\perp\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{2.2}\\ \phi^\perp\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+2}\\ \gamma_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\psi\parr\phi^{j_1} \quad \psi^{\perp j_2} \quad \phi^{\perp j_3}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}}{(\psi\parr\phi)^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)} \quad \gamma_1^{l_2} \quad \ldots \quad \gamma_n^{l_{n+1}} \quad \alpha^{l_{n+2}}\\ \Sigma_{n+3}\\ \delta\end{matrix}}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(j_2,j_3,l_2,\ldots,l_{n+2})} \quad \delta^{\perp j_4}}{\begin{matrix}\perp\\ \Sigma_{2.3}\\ \dfrac{\perp}{\delta}\,\perp_{c(j_4)}\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{\perp}$$

A premissa $(\psi\parr\phi)^\perp$ da regra $\mathrm{E}_?$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas $\psi^\perp$ e $\phi^\perp$ também estão a direita de γ_i.

Como $(\psi\parr\phi)^\perp$ é uma fórmula essencialmente !-modal, $\psi^\perp$ e $\phi^\perp$ também são. Assim, essa redução preserva restrições da regra $\mathrm{E}_?$.

(d) $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_?$ e β^j é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim β^j é da forma $?\psi^j$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ ?\alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix} \dfrac{\dfrac{?\psi^j \quad \begin{matrix}\Sigma_{2.1}\\ \phi_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{2.m}\\ \phi_m\end{matrix} \quad \begin{matrix}\phi_1^{k_1} \quad \dots \quad \phi_m^{k_m} \quad \psi^{k_{m+1}} \\ \Sigma_{2.(m+1)} \\ \mu\end{matrix}}{\mu}\,\mathrm{E}_{?(k_1,\dots,k_{m+1})} \\ \Sigma_{2.(m+2)} \\ \dfrac{\perp}{(?\psi)^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_3 \\ \gamma_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+2} \\ \gamma_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}(?\psi)^{\perp l_1} \quad \gamma_1^{l_2} \quad \dots \quad \gamma_n^{l_{n+1}} \quad \alpha^{l_{n+2}} \\ \Sigma_{n+3} \\ \delta\end{matrix}}{\begin{matrix}\delta \\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{n+2})}$$

$\triangleright\triangleright$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{matrix}\Sigma_1 \\ ?\alpha\end{matrix}
\quad
\begin{matrix}\Sigma_{2.1} \\ \phi_1\end{matrix} \ldots \begin{matrix}\Sigma_{2.m} \\ \phi_m\end{matrix}
\quad
\begin{matrix}\Sigma_3 \\ \gamma_1\end{matrix} \ldots \begin{matrix}\Sigma_{n+2} \\ \gamma_n\end{matrix}
\quad
\mu^{\perp\, j_1}
\qquad
\begin{matrix}
\dfrac{
\dfrac{
?\psi^{j_2} \quad \phi_1^{j_3} \quad \ldots \quad \phi_m^{j_{m+2}} \quad
\begin{matrix} \phi_1^{k_1} \quad \ldots \quad \phi_m^{k_m} \quad \psi^{k_{m+1}} \\ \Sigma_{2.(m+1)} \\ \mu \end{matrix}
}{\mu}\,\mathrm{E}_{?(k_1,\ldots,k_{m+1})}
\quad \mu^{\perp\, j_{m+3}}
}{\dfrac{\perp}{(?\psi)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_2)}}\,\mathrm{E}_{\perp}
\quad
\gamma_1^{l_2} \quad \ldots \quad \gamma_n^{l_{n+1}} \quad \alpha^{l_{n+2}} \\
\Sigma_{n+3} \\
\delta
\end{matrix}
}{\delta}\,\mathrm{E}_{?(j_3,\ldots,j_{m+3},l_2,\ldots,l_{n+2})}
\qquad \delta^{\perp\, j_{m+4}}
}{
\begin{matrix}
\dfrac{\perp}{\mu}\,\perp_{c(j_1)} \\
\Sigma_{2.(m+2)} \\
\dfrac{\perp}{\delta}\,\perp_{c(j_{m+4})} \\
\Pi
\end{matrix}
}\,\mathrm{E}_{\perp}
$$

A premissa $(?\psi)^{\perp}$ da regra $\mathrm{E}_{?}$ na primeira dedução pode estar a direita de uma premissa γ_i para $1 \leq i \leq n$. Nesse caso, na segunda dedução, as premissas $\phi_1, \ldots, \phi_m$ também estão a direita de γ_i.

Como μ é uma fórmula essencialmente ?-modal, então $\mu^{\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{E}_{?}$.

Reduções exponenciais para a regra $\mathrm{C}_!$

Reduções exponenciais para a regra $\mathrm{C}_!$ são empregadas para remover ocorrências de fórmulas máximas do tipo 2.(c).

34.

$$\dfrac{\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \qquad \begin{array}{c}1^k\ \ 1^k\\ \Sigma_1\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,\mathrm{C}_{!(k)} \atop \Pi \qquad\qquad \rhd\rhd \qquad\qquad \begin{array}{c}\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1\\ \Sigma_1\\ \alpha\\ \Pi\end{array}$$

35.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\alpha\otimes\beta}\,\mathrm{I}_\otimes \qquad \begin{array}{c}\alpha\otimes\beta^k \quad \alpha\otimes\beta^k\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{C}_{!(k)}\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\alpha^{k_1} \quad \beta^{k_2}}{\alpha\otimes\beta}\,\mathrm{I}_\otimes\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\alpha^{k_1} \quad \beta^{k_2}}{\alpha\otimes\beta}\,\mathrm{I}_\otimes\\ \Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{C}_{!(k_2)}}{\gamma}\,\mathrm{C}_{!(k_1)}\\ \Pi\end{array}$$

Como $\alpha\otimes\beta$ é uma fórmula essencialmente !-modal, α e β também são. Dessa forma, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{C}_!$.

36.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \qquad \begin{array}{c}!\beta^k \quad !\beta^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{C}_{!(k)}\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd$$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\alpha_1^{k_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{k_n} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \qquad \dfrac{\alpha_1^{k_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{k_n} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{l_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\ldots,l_n)}\\ \Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{C}_{!(k_n)}\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{C}_{!(k_1)}\\ \Pi\end{array}$$

37.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \Sigma_1\\ \perp\end{array}}{\alpha^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}\alpha^{\perp k}\quad\alpha^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}\\ \Pi\end{array}$$

A ocorrência de hipótese α^j é premissa de uma regra R. Como $\alpha^\perp$ é uma fórmula essencialmente !-modal, α é uma fórmula essencialmente ?-modal. Dessa forma, se α^j for a premissa maior de R, então R é $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{E}_\invamp$ ou $\mathrm{E}_\perp$. Assim, temos uma das seguintes reduções dependendo de R e α^j:

(a) R é uma aplicação de regra de introdução ou α^j é premissa menor de R:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \Sigma_1\\ \perp\end{array}}{\alpha^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}\alpha^{\perp k}\quad\alpha^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}\\ \Pi\end{array} \quad \rhd\rhd \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^{\perp j_1} \qquad \begin{array}{c}\alpha^{\perp k}\quad\alpha^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)} \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha}\,\perp_{c(j_1)}\\ \Sigma_1\\ \perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\\ \Pi\end{array}$$

(b) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_\perp$ e α^j é a premissa maior de R, assim α^j é da forma $\gamma^{\perp j}$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \gamma\end{array} \quad \gamma^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_{1.2}\\ \perp\end{array}}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}\gamma^{\perp\perp k}\quad\gamma^{\perp\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}\\ \Pi\end{array} \quad \rhd\rhd$$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\gamma^{k} \quad \gamma^{\perp l_1}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_1)} \quad \dfrac{\dfrac{\gamma^{k} \quad \gamma^{\perp l_n}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_n)} \\ \Sigma_{1.1} \qquad\qquad \Sigma_2 \\ \gamma \qquad\qquad\qquad \beta \end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)} \qquad \beta^{\perp j}}{\begin{matrix}\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j)} \\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{\perp}
$$

Como $\gamma^{\perp\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal, γ também é. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{C}_{!}$.

(c) $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_{⅋}$ e α^{j} é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim α^{j} é da forma $\gamma⅋\delta^{j}$:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\gamma⅋\delta^{j} \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \gamma^{\perp}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.2}\\ \delta^{\perp}\end{matrix}}{\perp}\,\mathrm{E}_{⅋} \\ \Sigma_{1.3} \\ \perp \end{matrix}}{(\gamma⅋\delta)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{matrix}(\gamma⅋\delta)^{\perp k} \quad (\gamma⅋\delta)^{\perp k} \\ \Sigma_2 \\ \beta\end{matrix}}{\begin{matrix}\beta \\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{C}_{!(k)}
$$

$\rhd\rhd$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.1} \\ \gamma^{\perp}\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.2} \\ \delta^{\perp}\end{matrix} \quad \begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\gamma⅋\delta^{l_1} \quad \gamma^{\perp k_1} \quad \delta^{\perp k_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{⅋}}{(\gamma⅋\delta)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_1)} \quad \dfrac{\dfrac{\gamma⅋\delta^{l_n} \quad \gamma^{\perp k_1} \quad \delta^{\perp k_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{⅋}}{(\gamma⅋\delta)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_n)} \\ \Sigma_2 \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_2)}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_1)} \qquad \beta^{\perp j}}{\begin{matrix}\perp \\ \Sigma_{1.3} \\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j)} \\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{\perp}
$$

Como $(\gamma⅋\delta)^{\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal, $\gamma^{\perp}$ e $\delta^{\perp}$ também são. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{C}_{!}$.

(d) $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_?$ e α^j é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim α^j é da forma $?\gamma^j$:

$$
\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{?\gamma^j \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \delta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.n}\\ \delta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\delta_1^{l_1} \quad \dots \quad \delta_n^{l_n} \quad \gamma^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{n+1})}\\ \Sigma_{1.(n+2)}\\ \dfrac{\perp}{(?\gamma)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(?\gamma)^{\perp k} \quad (?\gamma)^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}
$$

$$
\begin{matrix}\\ \Pi\end{matrix}
$$

$\rhd\rhd$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta_1\end{array}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_{1.n}\\ \delta_n\end{array}
\qquad
\dfrac{
\psi^{\perp j_1}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
?\gamma^{l_{n+3}} \quad \delta_1^{k_1}\ldots\delta_n^{k_n} \quad
\begin{array}{c}\delta_1^{l_{1.1}} \quad \ldots \quad \delta_n^{l_{n.1}} \quad \gamma^{l_{(n+1).1}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{array}
}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(l_{1.1},\ldots,l_{(n+1).1})}
\qquad \psi^{\perp k_{n+1}}
}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}
}{(?\gamma)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_{n+3})}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
?\gamma^{l_{n+m+2}} \quad \delta_1^{k_1}\ldots\delta_n^{k_n} \quad
\begin{array}{c}\delta_1^{l_{1.m}} \quad \ldots \quad \delta_n^{l_{n.m}} \quad \gamma^{l_{(n+1).m}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{array}
}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(l_{1.m},\ldots,l_{(n+1).m})}
\qquad \psi^{\perp k_{n+1}}
}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}
}{(?\gamma)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_{n+m+2})}
\qquad
\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}
}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_{n+1})}
}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_n)}
}{
\begin{array}{c}\beta\\ \vdots\\ \beta\end{array}
}\,\mathrm{C}_{!(k_1)}
}{\beta}
\qquad \beta^{\perp j_2}
}{
\begin{array}{c}
\dfrac{\perp}{\psi}\,\perp_{c(j_1)}\\
\Sigma_{1.(n+2)}\\
\dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\\
\Pi
\end{array}
}\,\mathrm{E}_{\perp}
$$

Como ψ é uma fórmula essencialmente ?-modal, então $\psi^{\perp}$ é uma fórmula essencialmente !-modal. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{C}_!$.

Reduções exponenciais para a regra $\mathbf{W}_!$

Reduções exponenciais para a regra $\mathrm{W}_!$ são empregadas para remover ocorrências de fórmulas máximas do tipo 1.(b).

38.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\\ \Pi\end{array}$$

39.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\alpha\otimes\beta}\,\mathrm{I}_\otimes \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{W}_!}{\gamma}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array}$$

Como $\alpha\otimes\beta$ é uma fórmula essencialmente !-modal, α e β também são. Dessa forma, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{W}_!$.

40.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array} \qquad \rhd\rhd \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{W}_!\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array}$$

41.

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \Sigma_1\\ \bot\end{array}}{\alpha^\bot}\,\mathrm{I}_{\bot(j)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array}$$

A ocorrência de hipótese α^j é premissa de uma regra R. Como $\alpha^\bot$ é uma fórmula essencialmente !-modal, α é uma fórmula essencialmente ?-modal. Dessa forma, se α^j for a premissa maior de R, então R é $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{E}_⅋$ ou $\mathrm{E}_\bot$. Assim, temos uma das seguintes reduções dependendo de R e α^j:

(a) R é uma aplicação de regra de introdução ou α^j é premissa menor de R:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \Sigma_1\\ \bot\end{array}}{\alpha^\bot}\,\mathrm{I}_{\bot(j)}\qquad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array}\qquad\rhd\rhd\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^{\bot j_1}\quad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!\qquad\beta^{\bot j_2}}{\bot}\,\mathrm{E}_\bot}{\alpha}\,\bot_{c(j_1)}\\ \Sigma_1\\ \bot\end{array}}{\beta}\,\bot_{c(j_2)}\\ \Pi\end{array}$$

(b) $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_\bot$ e α^j é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim α^j é da forma $\gamma^{\bot j}$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \gamma\end{array}\quad\gamma^{\bot j}}{\bot}\,\mathrm{E}_\bot\\ \Sigma_{1.2}\\ \bot\end{array}}{\gamma^{\bot\bot}}\,\mathrm{I}_{\bot(j)}\qquad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array}\qquad\rhd\rhd\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \gamma\end{array}\quad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!\qquad\beta^{\bot j}}{\bot}\,\mathrm{E}_\bot\\ \Sigma_{1.2}\\ \bot\end{array}}{\beta}\,\bot_{c(j)}\\ \Pi\end{array}$$

Como $\gamma^{\bot\bot}$ é uma fórmula essencialmente !-modal, γ também é. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{W}_!$.

(c) $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_\parr$ e α^j é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim α^j é da forma $\gamma\parr\delta^j$:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\gamma\parr\delta^j\quad\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \gamma^\bot\end{array}\quad\begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \delta^\bot\end{array}}{\bot}\,\mathrm{E}_\parr\\ \Sigma_{1.3}\\ \bot\end{array}}{(\gamma\parr\delta)^\bot}\,\mathrm{I}_{\bot(j)}\qquad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!\\ \Pi\end{array}\qquad\rhd\rhd\qquad\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \gamma^\bot\end{array}\quad\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \delta^\bot\end{array}\quad\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!}{\beta}\,\mathrm{W}_!\qquad\beta^{\bot j}}{\bot}\,\mathrm{E}_\bot\\ \Sigma_{1.3}\\ \bot\end{array}}{\beta}\,\bot_{c(j)}\\ \Pi\end{array}$$

Como $(\gamma\parr\delta)^\bot$ é uma fórmula essencialmente !-modal, $\gamma^\bot$ e $\delta^\bot$ também são. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{W}_!$.

(d) $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_?$ e α^j é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim α^j é da forma $?\gamma^j$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\\ \\ ?\gamma^j\end{matrix} \quad \begin{matrix}\\ \Sigma_{1.1}\\ \delta_1\end{matrix} \quad \begin{matrix}\\ \\ \ldots\end{matrix} \quad \begin{matrix}\\ \Sigma_{1.n}\\ \delta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\delta_1^{l_1} \ \ldots \ \delta_n^{l_n} \ \gamma^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{matrix}}{\begin{matrix}\psi\\ \Sigma_{1.(n+2)}\\ \bot\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\ldots,l_{n+1})}}{(?\gamma)^{\bot}}\,\mathrm{I}_{\bot(j)} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\begin{matrix}\beta\\ \Pi\end{matrix}}\,\mathrm{W}_!
$$

$\rhd\rhd$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \delta_1\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.n}\\ \delta_n\end{matrix} \quad \dfrac{\psi^{\bot j_1} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!}{\begin{matrix}\beta\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}}\,\mathrm{W}_!}{\beta}\,\mathrm{W}_! \qquad \beta^{\bot j_2}}{\dfrac{\bot}{\dfrac{\begin{matrix}\psi\\ \Sigma_{1.(n+2)}\\ \bot\end{matrix}}{\begin{matrix}\beta\\ \Pi\end{matrix}}\,\bot_{c(j_2)}}\,\bot_{c(j_1)}}\,\mathrm{E}_{\bot}
$$

Como ψ é uma fórmula essencialmente ?-modal, então $\psi^{\bot}$ é uma fórmula essencialmente !-modal. Assim, essa redução preserva as restrições da regra $\mathrm{W}_!$.

6.4 Normalização fraca

Definição 6.4 (Adjacência) *Sejam α e β duas ocorrências de fórmulas numa dedução Π. Dizemos que α é adjacente a β e vice-versa, se uma dessas ocorrências de fórmulas situa-se acima de uma ocorrência de fórmula vizinha da outra.*

Definição 6.5 (Tamanho de um segmento) *O tamanho de um segmento S, denotado por $l(S)$, é o número de ocorrências de fórmulas em S.*

Definição 6.6 (Ocorrência de fórmula discordante) *Uma ocorrência de fórmula α é discordante se α é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(a)-(d), 2.(a)-(f), 3.(a)-(c) ou 4.(a)-(b).*

Definição 6.7 (Grau crítico de uma fórmula) *O grau crítico de uma fórmula α, denotado por $d_c(\alpha)$, é definido indutivamente como segue:*

1. *Se* α *é uma fórmula atômica diferente de* 1*, então* $d_c(\alpha) = 0$*;*

2. *Se* α *é* 1*, então* $d_c(\alpha) = 1$*;*

3. *Se* α *é da forma* $\beta^{\perp}$*,* $\forall x\beta$*,* $\exists x\beta$*,* $!\beta$ *ou* $?\beta$*, então* $d_c(\alpha) = d_c(\beta) + 1$*;*

4. *Se* α *é da forma* $\beta \multimap \gamma$*,* $\beta\otimes\gamma$*,* $\beta\&\gamma$ *ou* $\beta\oplus\gamma$*, então* $d_c(\alpha) = d_c(\beta)+d_c(\gamma)+1$*;*

5. *Se* α *é da forma* $\beta\parr\gamma$*, então* $d_c(\alpha) = d_c(\beta) + d_c(\gamma) + 2$*.*

Definição 6.8 (Propagação de uma ocorrência de fórmula) *Seja* α *uma ocorrência de fórmula numa dedução* Π *e* $S_1, \ldots, S_n$ *os segmentos que contêm* α*. A propagação de* α*, denotada por* $s(\alpha)$*, é definida como* $s(\alpha) = l(S_1)+\ldots+l(S_n)$*.*

Definição 6.9 (Índice de uma ocorrência de fórmula) *Seja* α *uma ocorrência de fórmula numa dedução* Π*. Se* α *é uma ocorrência de fórmula discordante, o índice de* α*, denotado por* $i(\alpha)$*, é definido como o par ordenado lexicograficamente* $i(\alpha) = (d_c(\alpha), s(\alpha))$*. Caso contrário, se* α *não é uma ocorrência de fórmula discordante, então* $i(\alpha) = (0, 0)$*.*

Definição 6.10 (Índice de uma dedução) *Sejam* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *as ocorrências de fórmulas discordantes de uma dedução* Π*. O Índice de* Π*, denotado por* $i(\Pi)$*, é definido como* $i(\Pi) = max(i(\alpha_1), \ldots, i(\alpha_n))$*. Se* Π *não contém ocorrências de fórmulas discordantes, então* $i(\Pi) = (0, 0)$

Definição 6.11 (Dimensão de uma dedução) *Seja* Π *uma dedução tal que* $i(\Pi) = (p, q)$*. Então, a dimensão de* Π*, denotada por* $z(\Pi)$*, é a tupla de* 3 *componentes ordenados lexicograficamente* (p, q, n) *tal que* n *é o número de ocorrências de fórmulas discordantes de índice (p,q) em* Π*. Se* Π *não contém ocorrências de fórmulas discordantes, então* $z(\Pi) = (0, 0, 0)$*.*

Teorema 6.1 (Teorema da normalização fraca) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$*, então* Π *é reduzida a uma dedução normal* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$*.*

Se $i(\Pi) = (0, 0)$, então, pelo Lema G.3, Π é reduzida a uma dedução normal Π'. Caso contrário, esse Teorema 6.1 é provado por indução no par ordenado lexicograficamente $(z(\Pi), l(\Pi))$. Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & & \Sigma_n \\ \beta_1 & \ldots & \beta_n\end{matrix}}{\alpha}\, r(\Pi)$$

Seja Π_i^*, para cada $1 \leq i \leq n$, a subdedução de Π determinada por β_i. Como $z(\Pi_i^*) \leq z(\Pi)$ e $l(\Pi_i^*) < l(\Pi)$, por hipótese de indução, cada Π_i^* é reduzida a uma dedução normal Π_i'.

Seja Π^* a dedução obtida a partir de Π pela substituição de cada Π_i^* por Π_i'. Π^* é da seguinte forma:

$\Pi^* \equiv$

$$\dfrac{\Pi_1' \quad \ldots \quad \Pi_n'}{\alpha}\ r(\Pi)$$

Se $i(\Pi^*) = (0, 0)$, então, pelo Lema G.3, Π^* é reduzida a uma dedução normal Π'. Caso contrário, podemos notar que Π^* é da forma descrita pelo Lema G.18 e é reduzida a uma dedução Π^{**} tal que $z(\Pi^{**}) < z(\Pi^*) \leq z(\Pi)$.

Se $i(\Pi^{**}) = (0, 0)$, então, pelo Lema G.3, Π^{**} é reduzida a uma dedução normal Π'. Caso contrário, podemos reduzir Π^{**} a uma dedução normal Π' por hipótese de indução.

■

6.5 A forma de deduções normais

Um dos corolários mais importantes obtidas a partir do teorema de normalização fraca é o princípio da subfórmula. Para provar o princípio da subfórmula, adaptamos o conceito de caminho apresentado em [Pra65] como segue:

Definição 6.12 (Caminho) *Uma seqüência $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de ocorrências de fórmulas numa dedução Π é um caminho se e somente se as seguintes condições ocorrem:*

1. *α_1 é fórmula topo em Π e não é descartada por aplicações de $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $I_!$, $E_?$ ou $C_!$;*

2. *uma das seguintes condições é válida para cada α_i com $1 \leq i < n$:*

   (a) *α_i não é premissa menor de $E_\multimap$ ou $E_\perp$, nem é premissa maior de $E_\otimes$, $E_⅋$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $E_?$, $C_!$, $W_!$ ou E_1, nem é premissa intermediária de $I_!$ ou $E_?$; e α_{i+1} é a ocorrência de fórmula imediatamente abaixo de α_i;*

   (b) *α_i é premissa maior de uma aplicação de $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$ ou $C_!$; e α_{i+1} é qualquer das ocorrências de hipótese descartadas por essa aplicação;*

(c) α_i *é premissa maior de uma aplicação de* $E_?$ *da forma* $?\beta$*; e* α_{i+1} *é a ocorrência de hipótese respectiva da forma* β *descartada por essa aplicação;*

(d) α_i *é premissa intermediária de uma aplicação de* $I_!$ *ou* $E_?$*; e* α_{i+1} *é a ocorrência de hipótese respectiva da mesma forma* α_i *descartada por essa aplicação;*

3. α_n *é premissa menor de uma aplicação de* $E_{\multimap}$ *ou* $E_{\perp}$*, ou é premissa maior de uma aplicação de* $E_{⅋}$*,* $W_!$*,* E_1*, ou é a fórmula final de* Π.

É conveniente considerar, daqui por diante, uma fórmula da forma $\perp$ como subfórmula de qualquer fórmula da forma $\alpha^{\perp}$. Isso ocorre porque uma fórmula da forma $\alpha^{\perp}$ é usualmente vista como uma abreviação de $\alpha \multimap \perp$, e, obviamente, $\perp$ é uma subfórmula de $\alpha \multimap \perp$.

Dessa forma, podemos observar que todas ocorrências de fórmulas numa dedução Π que é conclusão de uma regra de eliminação R é sempre subfórmula de pelo menos uma das premissas de R. Mesmo que essa regra de eliminação R seja uma aplicação de $E_{⅋}$ ou $E_{\perp}$.

Lema 6.2 (Lema da I-parte e da E-parte) *Seja* Π *uma dedução normal, seja* P *um caminho em* Π*, e seja* $S_1, \ldots, S_n$ *a seqüencia de segmentos em* P*. Então existe um segmento* S_i*, para* $1 \leq i \leq n$*, chamado segmento mínimo em* P *que separa duas partes (possivelmente vazias) de* P*, chamadas E-parte e I-parte de* P*, com as seguintes propriedades:*

1. *Para cada* S_j *na E-parte (ou seja* $j < i$*)* S_j *é premissa maior de uma regra de eliminação e a fórmula que ocorre em* S_{j+1} *é subfórmula da fórmula que ocorre em* S_j*.*

2. S_i*, dado que* $i \neq n$*, é premissa de uma regra de introdução ou da regra* $\perp_c$*.*

3. *Para cada* S_j *na I-parte, exceto pelo último segmento (ou seja* $i < j < n$*)* S_j *é uma premissa de regra de introdução e a fórmula que ocorre em* S_j *é uma subfórmula da fórmula que ocorre em* S_{j+1}*.*

Podemos observar que cada segmento em P que é premissa maior de uma regra de eliminação precede todos os segmentos em P que são premissas de regra de introdução ou de $\perp_c$. Caso contrário, existiria um segmento em P conclusão de regra de introdução ou da regra $\perp_c$ e, simultaneamente, premissa maior de uma regra de eliminação. Logo tal segmento seria um segmento máximo contrariando a suposição de que Π é normal.

Assim, se a I-parte de P não é vazia, então existe um primeiro segmento em P que é premissa de regra de introdução ou de $\perp_c$. Podemos observar que tal segmento é justamente o segmento mínimo S_i como descrito nesse Lema. Se a I-parte for vazia, então S_i é S_n.

■

Definição 6.13 (Caminho principal) *Seja* Π *uma dedução em NDLL e* P *um caminho em* Π*. Então* P *é um caminho principal de* Π *se e somente se ele termina com a fórmula final de* Π*.*

Para demonstrar o princípio da subfórmula, assinalamos uma ordem para os caminhos de uma dedução Π como segue:

Definição 6.14 (Ordem de um caminho) *Seja* Π *uma dedução em NDLL e* P *um caminho em* Π*. A ordem de* P *denotada por* $o(P)$ *é definida como segue:*

1. *Se* P *é um caminho principal em* Π*, então* $o(P) = 0$*.*
2. *Se* P *termina com uma ocorrência de fórmula* α *que é premissa menor de* $E_{\multimap}$ *ou* $E_{\perp}$*, ou que é premissa maior de* $E_{\otimes}$*,* $W_{!}$ *ou* E_{1}*, então* $o(P) = n + 1$ *se a premissa vizinha mais perto de* α *pertence a um caminho de ordem* n*.*

Corolário 6.3 (Princípio da subfórmula) *Cada ocorrência de fórmula numa dedução normal* Π *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ *é subfórmula de* α *ou de alguma fórmula em* Γ*, exceto por hipóteses descartadas por aplicações de* $\perp_c$ *ou* $I_{\otimes}$ *e por ocorrências de* $\perp$ *em segmentos que estão imediatamente abaixo de tal hipóteses.*

Esse corolário é provado por indução na ordem dos caminhos de Π.

Seja $P = S_1, \ldots, S_n$ um caminho em Π tal que $o(P) = k$, S_i é o segmento mínimo de P e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ as fórmulas que ocorrem em $S_1, \ldots, S_n$ respectivamente. Pretendemos demonstrar que para cada j, tal que $1 \leq j \leq n$, β_j é subfórmula de α ou de alguma fórmula em Γ, levando em conta as excessões descritas nesse Corolário 6.3. Então temos os seguintes casos dependendo de j:

1. $j = n$:

   Então, temos os seguintes casos dependendo de S_n:

(a) S_n é segmento final de Π:
Nesse caso, β_j é da forma da fórmula final α de Π. Assim, obviamente, β_j é subfórmula de α.

(b) S_n é premissa menor de uma aplicação R de $E_{\multimap}$:
Nesse caso, a premissa maior de R é da forma $\beta_n \multimap \gamma$ e pertence a um caminho de ordem $k - 1$. Então, por hipótese de indução, $\beta_n \multimap \gamma$ é subfórmula de α ou de alguma fórmula em Γ e, conseqüentemente, β_n também é.

(c) S_n é premissa menor de $E_{\perp}$:
Como a fórmula $\perp$ é considerada subfórmula de qualquer fórmula da forma $\gamma^{\perp}$, esse caso é similar ao último caso provado acima no qual S_n é premissa menor de $E_{\multimap}$.

(d) S_n é premissa maior de $E_{\parr}$, $W_!$ ou E_1:
Nesse caso, a I-parte de P é vazia pois Π é normal. Assim, β_n pertence à E-parte de P e pelo Lema 6.2 é subfórmula de β_1. Seja γ a primeira ocorrência de fórmula em S_1. Podemos notar que γ é da mesma forma que β_1 e β_n é também subfórmula de γ. Então temos os seguintes casos dependendo de γ:

   i. γ é descartada por uma aplicação R de $I_{\multimap}$:
   Então a conseqüência de R é da forma $\gamma \multimap \delta$ e pertence a um caminho de ordem menor que k, pois a I-parte de P é vazia. Assim, por hipótese de indução, $\gamma \multimap \delta$ é subfórmula de α ou de alguma das fórmulas em Γ, e, conseqüentemente, β_n também é.

   ii. γ é descartada por uma aplicação R de $I_{\perp}$:
   Esse caso é similar ao último caso no qual γ é descartada por uma aplicação de $I_{\multimap}$.

   iii. γ é descartada por uma aplicação R de $\perp_c$:
   Nesse caso, γ é da forma $\delta^{\perp}$ e a conseqüência de R é da forma δ e pertence a um caminho de ordem menor que k, pois a I-parte de P é vazia e Π é normal. Assim, por hipótese de indução, δ é subfórmula de α ou de alguma das fórmulas em Γ, e, conseqüentemente, β_n também é.

   iv. γ é descartada por uma aplicação R de $I_{\parr}$:
   Nesse caso, γ é da forma $\delta^{\perp}$ e a conseqüência φ de R é da forma $\delta \parr \psi$ ou $\psi \parr \delta$ e pertence a um caminho de ordem menor que k, pois a I-parte de P é vazia e Π é normal. Assim, por hipótese de indução, φ é subfórmula de α ou de alguma das fórmulas em Γ, e, conseqüentemente, β_n também é.

v. γ pertence a Γ:
Nesse caso, podemos claramente notar que β_n é subfórmula de uma fórmula em Γ.

2. $i < j < n$:

   Pelo Lema 6.2, podemos notar que β_j é subfórmula de β_n. Assim, esse caso é demonstrado como no último caso no qual $j = n$.

3. $j = 1$:

   Seja γ a primeira ocorrência de fórmula em S_1. Certamente, γ é da forma β_1. Então temos os seguintes casos:

   (a) γ é descartada por uma aplicação R de $\mathrm{I}_{\multimap}$:
   Nesse caso, a conclusão de R é da forma $\gamma \multimap \delta$ e pertence à I-parte de P ou a um caminho de ordem menor que k. Se $\gamma \multimap \delta$ pertence a um caminho de ordem menor que k, então esse caso é provado por hipótese de indução. Caso contrário, se $\gamma \multimap \delta$ pertence à I-parte de P, então pelo Lema 6.2, $\gamma \multimap \delta$ é subfórmula de β_n e esse caso é demonstrado por um procedimento similar ao usado no caso 1.

   (b) γ é descartada por uma aplicação R de $\mathrm{I}_{\perp}$:
   Esse caso é demonstrado por um procedimento similar ao usado no último caso (a).

   (c) γ é descartada por uma aplicação R de $\perp_c$ ou $\mathrm{I}_{\otimes}$:
   Esses casos são as excessões descritas por esse Corolário 6.3.

   (d) γ pertence a Γ:
   Nesse caso, obviamente, β_1 é subfórmula de uma fórmula em Γ.

4. $1 < j \leq i$:

   Pelo Lema 6.2, β_j é subfórmula de β_1. Assim, nesse caso, o princípio da subfórmula é demonstrado por um procedimento similar ao usado no último caso 3 no qual $j = 1$.

■

Note que, se $\beta^{\perp}$ é uma ocorrência de hipótese descartada por uma aplicação de $\mathrm{I}_{\otimes}$ ou $\perp_c$ em uma dedução normal de $\Gamma \vdash_{\text{ndll}} \alpha$, então de acordo com o Corolário 6.3, β é subfórmula de α ou de alguma fórmula em Γ.

6.6 Conclusão

Nesse Capítulo, provamos o teorema da normalização fraca e seu companheiro usual: o princípio da subfórmula para deduções normais em NDLL.

No Capítulo 3 observamos que como, em NDLL, o operador “Why not” (?) é tratado como primitivo, as regras exponenciais $\mathrm{I}_!$, $\mathrm{E}_?$ $\mathrm{C}_!$ e $\mathrm{W}_!$ precisam de fórmulas essencialmente !-modais como premissas intermediárias e maiores. Assim, as reduções exponenciais do tipo 29, 33, 37 e 41 apresentadas no presente Capítulo foram formuladas para lidar com uma circunstância peculiar que pode ocorrer numa dedução NDLL quando uma premissa intermediária ou quando uma premissa maior de $\mathrm{C}_!$ ou $\mathrm{W}_!$ é simultaneamente conclusão de $\mathrm{I}_\perp$.

Essas novas reduções apresentadas nesse Capítulo e as regras para $\invamp$ e ? apresentadas no Capítulo 3 são as principais contribuições de nosso trabalho.

Capítulo 7

Conclusão

Nesse trabalho, revisamos cinco trabalhos recentes [Tro92, BBHdP92, Tro95, Mar00, dPNdM01] que apresentam sistemas de dedução natural para a lógica linear ou para fragmentos dessa lógica, e introduzimos um novo sistema de dedução natural de conclusão única para a lógica linear completa de primeira ordem chamado NDLL.

Demonstramos a equivalência (no sentido de demonstrabilidade) entre o sistema NDLL e o cálculo de seqüentes linear de Girard. Além disso, provamos o teorema da normalização fraca e seu companheiro usual: o princípio da subfórmula para deduções normais em NDLL.

NDLL oferece regras para a lógica linear completa, incluindo novas regras para os conectivos "Par" ($⅋$) e "Why not" ($?$). Assim, em NDLL, $⅋$ e $?$ são tratados como primitivos, ao invés de abreviações de fórmulas definidas pelas dualidades de *de Morgan*.

Observamos que como, em NDLL, o operador ? é tratado como primitivo, tivemos que definir o conceito de fórmulas essencialmente !-modal e ?-modal e usá-lo nas nossas regras exponenciais, caso contrário, a completude do sistema NDLL não seria provada.

No entanto, o uso de fórmulas essencialmente !-modal como premissas de regras exponenciais trouxe uma complexidade adicional ao teorema da normalização fraca. Para resolver tal complexidade tivemos que criar as novas reduções 29, 33, 37 e 41 apresentadas no último Capítulo.

As novas regras (para $⅋$ e $?$) e as novas reduções são as principais contribuições de nosso trabalho.

Listamos a seguir alguns trabalhos futuros possíveis:

1. Teoremas de normalização e o princípio da subfórmula dão suporte a construção de provadores de teoremas eficientes. Assim, um provador de teorema para a lógica linear completa pode ser implementado baseado

na forma normal de deduções em NDLL definida no Capítulo 6.

2. Problemas de tomada de decisão envolvem gerenciamento de recursos limitados. Como a lógica linear é adequada para lidar com esse tipo de recurso, gostaríamos de fazer a tentativa de usar a lógica linear e nosso sistema NDLL numa investigação mais abrangente sobre o problema do raciocínio prático.

3. Provamos o teorema da normalização fraca. No entanto, sem dúvida a demonstração do teorema da normalização forte é um resultado ainda melhor.

4. *de Medeiros* em [dPNdM01], usou teoremas de normalização como ponto de partida para definir novas traduções entre lógicas. Pretendemos posteriormente definir traduções no espírito do trabalho de *de Medeiros* usando nosso teorema de normalização do sistema NDLL.

5. Como, em NDLL, o operador ? é tratado como primitivo, nosso teorema de normalização fraca requereu novas reduções. Essas reduções podem ser adaptadas a um sistema de dedução natural para a lógica modal S4 para lidar com o operador modal "Possível" ($\Diamond$) como primitivo e normalizar esse sistema.

Apêndice A

Cálculo de Seqüentes Clássico

O cálculo de seqüentes foi introduzido para a lógica clássica por Gentzen em seu famoso trabalho [Gen69]. Uma dedução nesse cálculo consiste de seqüentes da forma $\Gamma \vdash \Delta$. Γ e Δ são seqüências de fórmulas chamadas antecedente e sucedente respectivamente. Sejam $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ e $\Delta = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$. Logo, o significado tencionado de Γ é $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ e de Δ é $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_n$.

Regras para o cálculo de seqüentes clássico de Gentzen são mostradas a seguir:

Regra axioma

$$\frac{}{\alpha \vdash \alpha}\ \mathrm{Id}$$

Regras estruturais

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_w \text{ (Enfraquecimento)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_w \text{ (Enfraquecimento)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_c \text{ (Contração)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_c \text{ (Contração)}$$

$$\frac{\Gamma', \alpha, \beta, \Gamma'' \vdash \Delta}{\Gamma', \beta, \alpha, \Gamma'' \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_x \text{ (Permutação)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta', \alpha, \beta, \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta', \beta, \alpha, \Delta''}\ \mathrm{R}_x \text{ (Permutação)}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash \alpha, \Delta' \quad \Gamma'', \alpha \vdash \Delta''}{\Gamma', \Gamma'' \vdash \Delta', \Delta''}\ \mathrm{Cut}$$

Regras lógicas

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{1\wedge}$$

$$\frac{\Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{2\wedge}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta \quad \Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_{\wedge}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta \quad \Gamma, \beta \vdash \Delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{\vee}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_{1\vee}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_{2\vee}$$

$$\frac{\Gamma' \vdash \alpha, \Delta' \quad \Gamma'', \beta \vdash \Delta''}{\Gamma', \Gamma'', \alpha \rightarrow \beta \vdash \Delta', \Delta''}\ \mathrm{L}_{\rightarrow}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Delta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \Delta}\ \mathrm{R}_{\rightarrow}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \Delta}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{\neg}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg\alpha\Delta}\ \mathrm{R}_{\neg}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha^x_t \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{\forall}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha^x_a, \Delta}{\Gamma \vdash \forall x\alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_{\forall}$$

(a não ocorre em Γ ou Δ)

$$\frac{\Gamma, \alpha^x_a \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\alpha \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_{\exists}$$

(a não ocorre em Γ ou Δ)

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha^x_t, \Delta}{\Gamma \vdash \exists x\alpha, \Delta}\ \mathrm{R}_{\exists}$$

Apêndice B

Sistema de Dedução Natural Clássico

O sistema de dedução natural foi originalmente introduzido para a lógica clássica por Gentzen em seu famoso trabalho [Gen69].

As regras do sistema de dedução natural clássico são mostradas a seguir:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha]^j\\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ \mathrm{I}_{\to (j)} \qquad \dfrac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{\to}$$

$$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ \mathrm{E}_{1\wedge}$$

$$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\ \mathrm{I}_{\wedge}$$

$$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{2\wedge}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ \mathrm{I}_{1\vee}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{c}[\alpha]^j\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\beta]^k\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{\vee(j,k)}$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\ \mathrm{I}_{2\vee}$$

$$\frac{\alpha^x_a}{\forall x\alpha}\ \mathrm{I}_\forall$$

$$\frac{\forall x\alpha}{\alpha^x_t}\ \mathrm{E}_\forall$$

(a não ocorre em qualquer fórmula topo da qual α^x_a depende.)

$$\frac{\exists x\alpha \quad \begin{array}{c}[\alpha^x_a]^j\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\beta}\ \mathrm{E}_{\exists(j)}$$

$$\frac{\alpha^x_t}{\exists x\alpha}\ \mathrm{I}_\exists$$

(a não ocorre em $\exists x\alpha$, em β ou em qualquer fórmula topo da qual a ocorrência mais acima de β depende, excluindo α^x_a.)

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha]^j\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\alpha}\ \mathrm{I}_{\neg(j)}$$

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot}\ \mathrm{E}_\neg$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\alpha]^j\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\alpha}\ \bot_{c(j)}$$

Apêndice C

Dedução Natural para a Lógica Modal S4

Em [Pra65], Prawitz apresentou um sistema de dedução natural para a lógica modal S4. Esse sistema extende o sistema de dedução natural clássico* adicionando regras de introdução e eliminação para os operadores modais "Necessário" ($\Box$) e "Possível" ($\Diamond$).

Prawitz também introduziu o conceito de fórmula essencialmente modal para normalizar seu sistema de dedução natural para a lógica modal S4.

Definição C.1 (Fórmula essencialmente modal em S4) *O conjunto das fórmulas essencialmente modais na lógica modal S4 é definido indutivamente da seguinte forma:*

1. *$\Box\alpha$ é uma fórmula essencialmente modal.*
2. *Se α e β são fórmulas essencialmente modais, então $\alpha \wedge \beta$ e $\alpha \vee \beta$ também são.*
3. *Se α^x_t é uma fórmula essencialmente modal, então $\exists x\alpha$ também é.*
4. *$\bot$ é uma fórmula essencialmente modal.*

Primeiramente, Prawitz definiu as seguintes regras para o operador $\Box$:

*Veja Apêndice B no qual um sistema de dedução natural clássico é apresentado

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \alpha\end{array}}{\Box\alpha}\ \mathrm{I}_{\Box} \qquad\qquad \dfrac{\Box\alpha}{\alpha}\ \mathrm{E}_{\Box}$$

(Todas as fórmulas em Γ são precedidas por $\Box$.)

Nesse caso, o operador $\Diamond$ é tratado por definição usando a dualidade entre $\Box$ e $\Diamond$.

Em seguida, Prawitz introduziu um segundo sistema abranjendo o operador $\Diamond$. Mas nesse segundo sistema, a regra de introdução para o operador $\Box$ é sutilmente diferente da que foi apresentada acima no primeiro sistema. A seguir apresentamos as regras para os operadores $\Box$ e $\Diamond$ no segundo sistema de Prawitz:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \alpha\end{array}}{\Box\alpha}\ \mathrm{I}_{\Box} \qquad\qquad \dfrac{\Box\alpha}{\alpha}\ \mathrm{E}_{\Box}$$

(Todas as fórmulas em Γ são da forma $\Box\gamma$ ou $\neg\Diamond\gamma$ para qualquer γ.)

$$\dfrac{\alpha}{\Diamond\alpha}\ \mathrm{I}_{\Diamond} \qquad\qquad \dfrac{\Diamond\alpha \qquad \begin{array}{c}\Gamma \quad \alpha^{j}\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\beta}\ \mathrm{E}_{\Diamond(j)}$$

(Toda fórmula em Γ é da forma $\Box\gamma$ ou $\neg\Diamond\gamma$ para qualquer γ e β é da forma $\Diamond\delta$ ou $\neg\Box\delta$ para qualquer δ.)

Contudo, Prawitz percebeu que as regras acima não são adequadas ao processo de normalização. Dessa forma, ele formulou um terceiro sistema normalizável com as seguintes regras para o operador $\Box$[†]:

[†]Esse terceiro sistema não oferece regras para o operador modal $\Diamond$

$$\cfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ [\beta_1 \ldots \beta_n] \\ \vdots \\ \alpha\end{matrix}}{\Box\alpha}\ \mathrm{I}_\Box$$

($\beta_1 \ldots \beta_n$ são fórmulas essencialmente modais e não contêm qualquer ocorrência de um parâmetro próprio de uma aplicação de $\mathrm{I}_\forall$ ou $\mathrm{E}_\exists$ cujas premissas estão acima de α. β_i, para cada $1 \leq i \leq n$, não depende de qualquer hipótese da qual α também não dependa.)

$$\frac{\Box\alpha}{\alpha}\ \mathrm{E}_\Box$$

Apêndice D

Regras do Sistema NDLL

$$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{j}\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \multimap \beta}\ \mathrm{I}_{\multimap(j)} \qquad\qquad \dfrac{\alpha \quad \alpha \multimap \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{\multimap}$$

$$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \otimes \beta}\ \mathrm{I}_{\otimes} \qquad\qquad \dfrac{\alpha \otimes \beta \qquad \begin{array}{c}\alpha^{j} \quad \beta^{k}\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{\otimes(j,k)}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j} \quad \beta^{\perp k}\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{\alpha \parr \beta}\ \mathrm{I}_{\parr(j,k)} \qquad\qquad \dfrac{\alpha \parr \beta \quad \alpha^{\perp} \quad \beta^{\perp}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\parr}$$

$$\dfrac{\alpha \with \beta}{\alpha}\ \mathrm{E}_{1\with}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma^{j_1 \dots j_n}\\ \vdots\\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1 \dots j_n}\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \with \beta}\ \mathrm{I}_{\with}$$

$$\dfrac{\alpha \with \beta}{\beta}\ \mathrm{E}_{2\with}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \oplus \beta}\ \mathrm{I}_{1\oplus}$$

$$\frac{\alpha \oplus \beta \qquad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1 \ldots j_n}\ \alpha^{k_1}\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma^{j_1 \ldots j_n}\ \beta^{k_2}\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

$$\frac{\beta}{\alpha \oplus \beta}\ \mathrm{I}_{2\oplus}$$

$$\frac{\alpha^x_a}{\forall x \alpha}\ \mathrm{I}_{\forall}$$

(a não ocorre em qualquer fórmula topo da qual α^x_a depende.)

$$\frac{\forall x \alpha}{\alpha^x_t}\ \mathrm{E}_{\forall}$$

$$\frac{\exists x \alpha \qquad \begin{array}{c}\alpha^{x\,j}_a\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\beta}\ \mathrm{E}_{\exists(j)}$$

$$\frac{\alpha^x_t}{\exists x \alpha}\ \mathrm{I}_{\exists}$$

(a não ocorre em $\exists x\alpha$, em β ou em qualquer fórmula topo da qual a ocorrência mais acima de β depende, excluindo α^x_a.)

$$\frac{\alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n \qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{!\beta}\ \mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}$$

$$\frac{!\alpha}{\alpha}\ \mathrm{E}_{!}$$

($n \geq 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são fórmulas essencialmente !-modais e β não depende de nenhuma outra ocorrência de fórmula topo além de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Assim, se $n = 0$, β é um teorema.)

$$\dfrac{\alpha}{?\alpha}\ \mathrm{I}_?$$

$$\dfrac{?\alpha \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_n \quad \begin{array}{c}\beta_1^{j_1} \quad \dots \quad \beta_n^{j_n} \quad \alpha^k\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k)}$$

($n \geq 0$, $\beta_1,\dots,\beta_n$ são fórmulas essencialmente !-modais, γ é fórmula essencialmente ?-modal e não depende de qualquer fórmula topo além de $\beta_1,\dots,\beta_n$ e α.)

$$\dfrac{\alpha \quad \begin{array}{c}\alpha^j \quad \alpha^j\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\beta}\ \mathrm{C}_{!(j)}$$

(α é essencialmente !-modal.)

$$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\beta}\ \mathrm{W}_!$$

(α é essencialmente !-modal.)

$$\dfrac{}{1}\ \mathrm{I}_1$$

$$\dfrac{1 \quad \alpha}{\alpha}\ \mathrm{E}_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^j\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\alpha^\bot}\ \mathrm{I}_{\bot(j)}$$

$$\dfrac{\alpha \quad \alpha^\bot}{\bot}\ \mathrm{E}_\bot$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\bot j}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\alpha}\ \bot_{c(j)}$$

Apêndice E

Regras para Constantes Aditivas

Na lógica linear, existem duas outras constantes “True” ($\top$) e “Zero” (0) consideradas aditivas. $\top$ é equivalente a uma fórmula do tipo $\alpha \oplus \alpha^\perp$ enquanto 0 é equivalente a uma fórmula do tipo $\alpha \& \alpha^\perp$. Assim, $\top$ é o dual de 0 e vice-versa. Portanto, as seguintes fórmulas são ambas válidas:

- $\vdash \top^\perp \multimap\!\circ\ 0$
- $\vdash 0^\perp \multimap\!\circ\ \top$

No cálculo de seqüentes linear, as constantes aditivas $\top$ e 0 são obtidas pelas seguintes regras axiomas:

$$\frac{}{\Gamma, 0 \vdash \Delta}\ \mathrm{L}_0 \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \mathrm{R}_T$$

$$(\Gamma \cup \Delta \text{ não vazio}) \qquad\qquad (\Gamma \cup \Delta \text{ não vazio})$$

No sistema de dedução natural, 0 pode ser considerada como essencialmente !-modal, já que o seqüente $0 \vdash !0$ é provado através da regra L_0, bem como 1 pode ser considerada essencialmente ?-modal, já que o seqüente $?1 \vdash 1$ é provado através da regra R_T.

Regras no sistema de dedução natural para $\top$ e 0 são como segue:

$$\frac{\begin{array}{ccc} \Gamma_1 & & \Gamma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{array}}{\top}\ \mathrm{I}_\top \qquad\qquad \frac{0 \quad \alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n}{\beta}\ \mathrm{E}_0$$

$$(n \geq 0)$$

$(n \geq 1$ e $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n$ não vazio$)$

Para que o processo de normalização inclua essas regras para as constantes aditivas, são necessárias reduções assegurando que uma dedução normal Π observe as seguintes condições:

i) Seja α uma premissa de $\mathrm{I}_{\top}$, então α é uma fórmula topo em Π;

ii) Seja α uma premissa menor de E_0, então α é uma fórmula topo em Π;

iii) Seja α a conclusão de E_0, então α não é premissa intermediária de qualquer regra em Π.

Apêndice F

Provas de Incompletude para NDLL' e NDLL"

F.1 Incompletude do sistema NDLL'

Seja NDLL' o sistema de dedução natural obtido de NDLL pela substituição da regra $\mathrm{I}_!$ pela regra $\mathrm{I}^*_!$ mostrada abaixo:

$$\dfrac{!\alpha_1 \quad \ldots \quad !\alpha_n \qquad \begin{array}{c} !\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad !\alpha_n^{j_n} \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{!\beta}\ \mathrm{I}^*_{!\,(j_1,\ldots,j_n)}$$

($n \geq 0$ e β não depende de nenhuma outra ocorrência de fórmula topo além de $!\alpha_1, \ldots, !\alpha_n$. Assim, se $n = 0$, β é um teorema.)

Podemos notar que a regra $\mathrm{I}^*_!$ é um caso particular da nossa regra $\mathrm{I}_!$. Logo, podemos dizer que NDLL é uma generalização de NDLL', e portanto, NDLL' é correto e fracamente normalizável da mesma forma que NDLL. Nesse apêndice, no entanto, queremos demonstrar que NDLL' é incompleto. Provamos então o seguinte Teorema:

Teorema F.1 (Incompletude do sistema NDLL') *Não existe deduções em NDLL' para todos os teoremas da lógica linear.*

Por redução ao absurdo, assumimos o contrário, ou seja, para cada teorema da lógica linear existe pelo menos uma dedução em NDLL' que o prova. Logo, em NDLL' existe uma dedução normal Π para o teorema da lógica linear $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash !(\alpha^{\perp})$ sendo α uma fórmula atômica diferente de $\perp$ e 1*. Sem perda de generalidade, assumimos que Π é a menor† entre todas possíveis deduções normais em NDLL' para $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash !(\alpha^{\perp})$. Por ser normal, Π obedece o princípio da subfórmula e todas as fórmulas que ocorrem em Π pertencem ao seguinte conjunto:

$$F = \{(?\alpha)^{\perp}, !(\alpha^{\perp}), (?\alpha)^{\perp\perp}, (!(\alpha^{\perp}))^{\perp}, \alpha, \alpha^{\perp}, \alpha^{\perp\perp}, ?\alpha, \perp\}$$

Logo, o conjunto das regras de inferências que ocorrem em Π é um subconjunto próprio de $\{\mathrm{I}_!^*, \mathrm{E}_!, \mathrm{I}_?, \mathrm{E}_?, \mathrm{C}_!, \mathrm{W}_!, \mathrm{I}_\perp, \mathrm{E}_\perp, \perp_c\}$. Além disso, as fórmulas $(?\alpha)^{\perp\perp}$, $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$ e $\alpha^{\perp\perp}$ só ocorrem em Π se forem hipóteses descartadas por aplicação de $\perp_c$.

Como $!(\alpha^{\perp})$ é a fórmula final de Π, temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi)$:

1. $r(\Pi)$ é $\mathrm{I}_!^*$:

   Nesse caso, a premissa mais a direita de $r(\Pi)$ é $\alpha^{\perp}$ e, pelas restrições da regra $\mathrm{I}_!^*$, só depende de fórmulas topo da forma $!\beta$. Logo, as suposições da forma $(?\alpha)^{\perp}$ ocorrem acima de premissas intermediárias de $r(\Pi)$. Para $1 \leq i \leq n$, Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}]\\ \Sigma_1\\ !\beta_1\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp}\\ \Sigma_i\\ !\beta_i\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}]\\ \Sigma_n\\ !\beta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}!\beta_1^{j_1} \quad \dots \quad !\beta_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \alpha^{\perp}\end{array}}{!(\alpha^{\perp})}\ \mathrm{I}^*_{!\,(j_1,\dots,j_n)}$$

   As premissas intermediárias $!\beta_1, \dots, !\beta_n$ de $r(\Pi)$ não dependem de qualquer outra fórmula topo além das que têm a forma $(?\alpha)^{\perp}$, pois a conclusão $!(\alpha^{\perp})$ de $r(\Pi)$ também só depende de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$.

   Já que as premissas intermediárias $!\beta_1, \dots, !\beta_n$ pertencem a F, são todas da forma $!(\alpha^{\perp})$. Seja Π' a subdedução de Π determinada pela premissa intermediária $!\beta_i$. Podemos notar que Π' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash_{\mathrm{ndll'}} !(\alpha^{\perp})$ e é menor que Π, um absurdo.

*$[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash !(\alpha^{\perp})$ é facilmente demonstrado no cálculo de seqüentes linear para qualquer α. A restrição "sendo α uma fórmula atômica diferente de $\perp$ e 1" facilita nossa demonstração da incompletude do sistema NDLL'

†Em relação ao tamanho das deduções em NDLL'

2. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_!$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma \\ !!(\alpha^\perp)\end{array}}{!(\alpha^\perp)}\ \mathrm{E}_!$$

   No entanto a premissa $!!(\alpha^\perp)$ de $r(\Pi)$ não pertence a F, um absurdo.

3. $r(\Pi)$ é $\mathrm{C}_!$:

   Nesse caso, por pertencer a F, a premissa maior de $r(\Pi)$ é da forma $!(\alpha^\perp)$ ou da forma $(?\alpha)^\perp$. Logo temos os seguintes casos:

   (a) A premissa maior de $r(\Pi)$ é da forma $!(\alpha^\perp)$:
   Nesse caso Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^\perp)\end{array} \qquad \begin{array}{c}!(\alpha^\perp)^j \quad !(\alpha^\perp)^j \quad [(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^\perp)\end{array}}{!(\alpha^\perp)}\ \mathrm{C}_{!(j)}$$

   Além de suposições da forma $(?\alpha)^\perp$, a premissa maior $!(\alpha^\perp)$ não depende de qualquer outra fórmula topo, pois a fórmula final de Π também só depende de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$.

   Já que, para α atômica e diferente de $\perp$, $!(\alpha^\perp)$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior $!(\alpha^\perp)$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^\perp$. Logo Π pode ser reapresentada da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^\perp)\end{array} \qquad \begin{array}{c}!(\alpha^\perp)^j \quad !(\alpha^\perp)^j \quad [(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^\perp)\end{array}}{!(\alpha^\perp)}\ \mathrm{C}_{!(j)}$$

   Seja Π' a subdedução de Π determinada pela premissa maior $!(\alpha^\perp)$ de $r(\Pi)$. Podemos notar que Π' é uma dedução normal $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^\perp)$ e Π' é menor que Π, um absurdo.

   (b) A premissa maior de $r(\Pi)$ é da forma $(?\alpha)^\perp$:
   Nesse caso Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp j} \\ \Sigma_1 \\ (?\alpha)^{\perp}\end{array} \qquad \begin{array}{c}(?\alpha)^{\perp j} \quad [(?\alpha)^{\perp}] \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^{\perp})\end{array}}{!(\alpha^{\perp})}\,\mathrm{C}_{!(j)}$$

Além de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$, a premissa menor $!(\alpha^{\perp})$ não depende de qualquer outra fórmula topo, pois a fórmula final de Π também só depende de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$.

Seja Π' a subdedução de Π determinada pela premissa menor $!(\alpha^{\perp})$ de $r(\Pi)$. Podemos notar que Π' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^{\perp})$ e Π' é menor que Π, um absurdo.

4. $r(\Pi)$ é $\mathrm{W}_!$:

Nesse caso, por pertencer a F, a premissa maior de $r(\Pi)$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$ ou da forma $(?\alpha)^{\perp}$. Logo temos os seguintes casos:

(a) A premissa maior de $r(\Pi)$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$:
Nesse caso Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp})\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^{\perp})\end{array}}{!(\alpha^{\perp})}\,\mathrm{W}_!$$

Além de suposições da forma $(?\alpha)^{\perp}$, a premissa maior $!(\alpha^{\perp})$ não depende de qualquer outra fórmula topo, pois a fórmula final de Π também só depende de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$.

Já que, para α atômica e diferente de $\perp$, $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior $!(\alpha^{\perp})$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$. Logo Π pode ser reapresentada da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp})\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^{\perp})\end{array}}{!(\alpha^{\perp})}\,\mathrm{W}_!$$

Seja Π' a subdedução de Π determinada pela premissa maior $!(\alpha^{\perp})$ de $r(\Pi)$. Podemos notar que Π' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^{\perp})$ e Π' é menor que Π, um absurdo.

(b) A premissa maior de $r(\Pi)$ é da forma $(?\alpha)^\perp$:

Nesse caso Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_1 \\ (?\alpha)^\perp\end{matrix} \quad \begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^\perp)\end{matrix}}{!(\alpha^\perp)}\ \mathrm{W}_!$$

Além de suposições da forma $(?\alpha)^\perp$, a premissa menor $!(\alpha^\perp)$ não depende de qualquer outra fórmula topo, pois a fórmula final de Π também só depende de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$.

Já que, para α atômica e diferente de $\perp$, $!(\alpha^\perp)$ não é um teorema da lógica linear, a premissa menor $!(\alpha^\perp)$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^\perp$. Logo Π pode ser reapresentada da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_1 \\ (?\alpha)^\perp\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^\perp)\end{matrix}}{!(\alpha^\perp)}\ \mathrm{W}_!$$

Seja Π' a subdedução de Π determinada pela premissa maior $!(\alpha^\perp)$ de $r(\Pi)$. Podemos notar que Π' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^\perp)$ e Π' é menor que Π, um absurdo.

5. $r(\Pi)$ é $\perp_c$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^{\perp\, j} \\ \Sigma \\ \perp\end{matrix}}{!(\alpha^\perp)}\ \perp_{c(j)}$$

Seja Π' a subdedução de Π determinada pela ocorrência de $\perp$ ilustrada acima. Logo Π' é a menor dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} \perp$ e é da seguinte forma:

$$\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma \\ \perp\end{matrix}$$

Temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi')$:

(a) $r(\Pi')$ é $\mathrm{E}_!$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ !\perp\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_!$$

No entanto a premissa $!\perp$ de $r(\Pi')$ não pertence a F, um absurdo.

(b) $r(\Pi')$ é $\mathrm{E}_?$:
Seja $?\beta$ a premissa maior de $r(\Pi')$. Por pertencer a F, $?\beta$ é da forma $?\alpha$. Como, para α atômica e diferente de 1, $?\alpha$ não é um teorema da lógica linear, $?\beta$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Temos então os seguintes casos:

i. $?\beta$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^\perp$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ \gamma_1\end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_{n+1} \\ \gamma_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\gamma_1^{j_1} \quad \cdots \quad \gamma_n^{j_n} \quad \alpha^{k_1} \\ \Sigma_{n+2} \\ \perp\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_n,k_1)}$$

Seja Π'' a subdedução de Π' determinada pela premissa maior $?\alpha$ de $r(\Pi')$. Π'' é a menor dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$ e é da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{array}$$

Temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi'')$:

A. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{E}_!$:
Nesse caso Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ !?\alpha\end{array}}{?\alpha}\,\mathrm{E}_!$$

No entanto a fórmula $!?\alpha$ não pertence a F, um absurdo.

B. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{I}_?$:
Nesse caso Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ \alpha\end{array}}{?\alpha}\ \mathrm{I}_?$$

Sabemos que NDLL' é correto. Logo não existe dedução de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} \alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

C. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{E}_?$:
Seja $?\delta$ a premissa maior de $r(\Pi'')$. Por pertencer a F, $?\delta$ é da formai $?\alpha$. Como, para α atômica e diferente de 1, $?\alpha$ não é um teorema da lógica linear, $?\delta$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Temos então os seguintes casos:

- $?\delta$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^\perp$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
  Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \quad [(?\alpha)^\perp] \qquad\qquad [(?\alpha)^\perp] \quad \varphi_1^{j_{n+1}} \quad \dots \quad \varphi_m^{j_{n+m}} \quad \alpha^{k_2} \\ \dfrac{\begin{array}{ccccc}\Sigma_1 & \Sigma_2 & & \Sigma_{m+1} & \Sigma_{m+2} \\ ?\alpha & \varphi_1 & \dots & \varphi_m & ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\ \mathrm{E}_{?(j_{n+1},\dots,j_{n+m},k_2)}\end{array}$$

  Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada por $?\delta$. Π''' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$ e Π''' é menor que Π'', um absurdo.
- $?\delta$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ e de pelo menos uma ocorrência delas:
  Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada por $?\delta$. Π''' é uma dedução de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$. Como NDLL' é correto, tal dedução não pode existir nesse sistema, um absurdo.
- $?\delta$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
  Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada por $?\delta$. Π''' é da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ ?\alpha\end{array}$$

  Temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi''')$:

- $r(\Pi''')$ é $E_!$:
  Esse caso é similar ao caso 5.(b).i.A.
- $r(\Pi''')$ é $I_?$:
  Esse caso é similar ao caso 5.(b).i.B.
- $r(\Pi''')$ é $E_?$:
  Seja $?\psi$ a premissa maior de $r(\Pi''')$. Por pertencer a F, $?\psi$ é da forma $?\alpha$. Como, para α atômica e diferente de 1, $?\alpha$ não é um teorema da lógica linear, $?\psi$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$.
  Seja Π'''' a subdedução de Π''' determinada por $?\psi$. Π'''' é uma dedução normal de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$ e é menor que Π''', um absurdo.
- $r(\Pi''')$ é $C_!$:
  Por pertencer a F, a premissa maior de $r(\Pi''')$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$ ou da forma $(?\alpha)^{\perp}$. Assim, temos os seguintes casos:

  * A premissa maior de $r(\Pi''')$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$:
  Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi''')$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$.
  Seja Π'''' a subdedução de Π''' determinada pela premissa maior $!(\alpha^{\perp})$ de $r(\Pi''')$. Π'''' é uma dedução de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^{\perp})$. Como NDLL' é correto, tal dedução não pode existir, um absurdo.
  * A premissa maior de $r(\Pi''')$ é da forma $(?\alpha)^{\perp}$:
  Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $(?\alpha)^{\perp}$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi''')$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$.
  Seja Π'''' a subdedução de Π''' determinada pela premissa maior $(?\alpha)^{\perp}$ de $r(\Pi''')$. Π'''' é uma dedução de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} (?\alpha)^{\perp}$. Como NDLL' é correto, tal dedução não pode existir, um absurdo.
- $r(\Pi''')$ é $W_!$:
  Essa caso é similar ao caso anterior no qual $r(\Pi''')$ é $C_!$.
- $r(\Pi''')$ é $\perp_c$:
  Nesse caso, Π''' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \quad (?\alpha)^{\perp l} \\ \Sigma_{1.1.1} \\ \perp\end{array}}{?\alpha}\ \perp_{c(l)}$$

Seja Π'''' a subdedução de Π''' determinada pela premissa $\perp$ de $r(\Pi''')$. Π'''' é da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \quad (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_{1.1.1} \\ \perp\end{array}$$

Π'''' é uma dedução normal de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}, (?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} \perp$. Como $(?\alpha)^{\perp}$ é uma suposição de Π'''', podemos dizer que Π'''' também é uma dedução normal de $[(?\alpha)^{\perp}], (!(\alpha^{\perp}))^{\perp}, (?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} \perp$ e é menor que Π', um absurdo.

D. $r(\Pi'')$ é $C_!$:
Nesse caso, por pertencer a F a premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$ ou da forma $(?\alpha)^{\perp}$. Logo temos os seguintes casos:

- A premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$:
  Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi'')$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Temos então os seguintes casos:
  - A premissa maior de $r(\Pi'')$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^{\perp}$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
    Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$[(?\alpha)^{\perp}] \quad \dfrac{\begin{array}{c}(?\alpha)^{\perp} \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_{1.1} \\ !(\alpha^{\perp})\end{array} \qquad \begin{array}{c}!(\alpha^{\perp})^{l} \quad !(\alpha^{\perp})^{l} \quad [(?\alpha)^{\perp}] \\ \Sigma_{1.2} \\ ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\ C_{!(l)}$$

Sabemos que NDLL' é correto. Logo não existe dedução de $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp}, (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^{\perp})$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

– A premissa maior de $r(\Pi'')$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ e de pelo menos uma ocorrência delas:
Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ !(\alpha^\perp)\end{array} \qquad \begin{array}{c}!(\alpha^\perp)^l \quad !(\alpha^\perp)^l \quad [(?\alpha)^\perp] \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

No entanto, a subdedução determinada pela premissa maior $!(\alpha^\perp)$ é uma dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^\perp)$ e é menor que Π, um absurdo.

– A premissa maior de $r(\Pi'')$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ !(\alpha^\perp)\end{array} \qquad \begin{array}{c}!(\alpha^\perp)^l \quad !(\alpha^\perp)^l \quad [(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

Sabemos que NDLL' é correto. Logo não existe dedução de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^\perp)$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

- A premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $(?\alpha)^\perp$:
Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $(?\alpha)^\perp$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi'')$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Temos então os seguintes casos:

– A premissa maior de $r(\Pi'')$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^\perp$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ (?\alpha)^\perp\end{array} \qquad \begin{array}{c}(?\alpha)^{\perp\,l} \quad (?\alpha)^{\perp\,l} \quad [(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_{1.2} \\ ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

Sabemos que NDLL' é correto. Logo não existe dedução de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} (?\alpha)^\perp$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

– A premissa maior de $r(\Pi'')$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ e de pelo menos uma ocorrência delas:
Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ (?\alpha)^\perp\end{array} \qquad \begin{array}{c}(?\alpha)^{\perp l} \quad (?\alpha)^{\perp l} \quad [(?\alpha)^\perp] \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\,\mathrm{C}_{!(l)}$$

No entanto, a subdedução determinada pela premissa menor $?\alpha$ é uma dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$ e é menor que Π'', um absurdo.

– A premissa maior de $r(\Pi'')$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ (?\alpha)^\perp\end{array} \qquad \begin{array}{c}(?\alpha)^{\perp l} \quad (?\alpha)^{\perp l} \quad [(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\,\mathrm{C}_{!(l)}$$

Sabemos que NDLL' é correto. Logo não existe dedução de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} (?\alpha)^\perp$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

E. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{W}_!$:
Esse caso é similar ao último caso no qual $r(\Pi'')$ é $\mathrm{C}_!$.

F. $r(\Pi'')$ é $\perp_c$:
Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \quad (?\alpha)^{\perp l} \\ \Sigma_{1.1} \\ \perp\end{array}}{?\alpha}\,\perp_{c(l)}$$

No entanto, a subdedução determinada pela ocorrência de $\perp$ ilustrada acima em Π'' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} \perp$ e é menor que Π', um absurdo.

ii. $?\beta$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ e de pelo menos uma ocorrência delas:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ \gamma_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_{n+1} \\ \gamma_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\gamma_1^{j_1} \quad \dots \quad \gamma_n^{j_n} \quad \alpha^{k_1} \\ \Sigma_{n+2} \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k_1)}$$

Por ser correto, o sistema NDLL' não prova $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$ considerando α atômica e diferente de 1.

iii. $?\beta$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ \gamma_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_{i+1} \\ \gamma_i\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_{n+1} \\ \gamma_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\gamma_1^{j_1} \quad \dots \quad \gamma_n^{j_n} \quad \alpha^{k_1} \\ \Sigma_{n+2} \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\dots,j_n,k_1)}$$

Para $1 \leq i \leq n$.
Seja Π'' a subdedução de Π' determinada pela premissa maior $?\alpha$. Π'' é da seguinte forma:

$$\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{matrix}$$

Temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi'')$:

A. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{E}_!$:
Esse caso é similar ao caso 5.(b).i.A.

B. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{I}_?$:
Esse caso é similar ao caso 5.(b).i.B.

C. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{E}_?$:
Seja $?\psi$ a premissa maior de $r(\Pi'')$. Por pertencer a F, $?\psi$ é da forma $?\alpha$. Como, para α atômica e diferente de 1, $?\alpha$ não é um teorema da lógica linear, $?\psi$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada por $?\psi$. Π''' é uma dedução normal de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$ e é menor que Π'', um absurdo.

D. $r(\Pi'')$ é $\mathrm{C}_!$:
Nesse caso, por pertencer a F, a premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $!(\alpha^\perp)$ ou da forma $(?\alpha)^\perp$. Logo temos um dos seguintes casos:

- A premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$:
Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi'')$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada pela premissa maior $!(\alpha^{\perp})$. Π''' é uma dedução normal de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^{\perp})$. No entanto, como NDLL' é correto, tal prova não pode existir considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.
- A premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $(?\alpha)^{\perp}$:
Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $(?\alpha)^{\perp}$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi'')$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada pela premissa maior $(?\alpha)^{\perp}$. Π''' é uma dedução normal de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} (?\alpha)^{\perp}$. No entanto, como NDLL' é correto, tal prova não pode existir considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

E. $r(\Pi'')$ é $W_!$:
Esse caso é similar ao anterior no qual $r(\Pi'')$ é $C_!$.

F. $r(\Pi'')$ é $\perp_c$:
Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \quad (?\alpha)^{\perp\, l} \\ \Sigma_{1.1} \\ \perp\end{array}}{?\alpha}\ \perp_{c(l)}$$

Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada pela premissa $\perp$ de $r(\Pi'')$. Π''' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp}, (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} \perp$ e Π''' é menor que Π', um absurdo.

(c) $r(\Pi')$ é $C_!$:
Nesse caso, por pertencer a F, a premissa maior de $r(\Pi')$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$ ou da forma $(?\alpha)^{\perp}$. Logo temos um dos seguintes casos:

i. A premissa maior de $r(\Pi')$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$:
Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Temos então os seguintes casos:

A. A premissa maior de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^{\perp}$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] & (?\alpha)^\perp & (!(\alpha^\perp))^\perp \\ & \Sigma_1 & \\ & !(\alpha^\perp) & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} !(\alpha^\perp)^l & !(\alpha^\perp)^l & [(?\alpha)^\perp] \\ & \Sigma_2 & \\ & \perp & \end{matrix}}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^\perp)$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

B. A premissa maior de $r(\Pi')$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ e de pelo menos uma ocorrência delas: Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] & (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_1 & \\ !(\alpha^\perp) & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} !(\alpha^\perp)^l & !(\alpha^\perp)^l & [(?\alpha)^\perp] & (!(\alpha^\perp))^\perp \\ & & \Sigma_2 & \\ & & \perp & \end{matrix}}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

No entanto, a subdedução determinada pela premissa maior $!(\alpha^\perp)$ de $r(\Pi')$ é uma dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^\perp)$ e é menor que Π, um absurdo.

C. A premissa maior de $r(\Pi')$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$: Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^\perp) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} !(\alpha^\perp)^l & !(\alpha^\perp)^l & [(?\alpha)^\perp] & (?\alpha)^\perp \\ & \Sigma_2 & & \\ & \perp & & \end{matrix}}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^\perp)$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

ii. A premissa maior de $r(\Pi')$ é da forma $(?\alpha)^\perp$: Como, para α atômica e diferente de $\perp$, $(?\alpha)^\perp$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Temos então os seguintes casos:

A. A premissa maior de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^\perp$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^\perp))^\perp$: Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{[(?\alpha)^\perp] \quad \begin{matrix}(?\alpha)^\perp \\ \Sigma_1 \\ (?\alpha)^\perp\end{matrix} \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \quad (?\alpha)^{\perp l} \quad \begin{matrix}(?\alpha)^{\perp l} \\ \Sigma_2 \\ \perp\end{matrix} \quad [(?\alpha)^\perp]}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} (?\alpha)^\perp$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

B. A premissa maior de $r(\Pi')$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ e de pelo menos uma ocorrência delas: Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}[(?\alpha)^\perp] \quad (?\alpha)^\perp \\ \Sigma_1 \\ (?\alpha)^\perp\end{matrix} \quad (?\alpha)^{\perp l} \quad \begin{matrix}(?\alpha)^{\perp l} \quad [(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ \perp\end{matrix} \quad (!(\alpha^\perp))^\perp}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

No entanto, a subdedução determinada pela premissa menor $\perp$ de $r(\Pi')$ é uma dedução normal de $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} \perp$ e é menor que Π', um absurdo.

C. A premissa maior de $r(\Pi')$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$: Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ (?\alpha)^\perp\end{matrix} \quad (?\alpha)^{\perp l} \quad \begin{matrix}(?\alpha)^{\perp l} \quad [(?\alpha)^\perp] \\ \Sigma_2 \\ \perp\end{matrix} \quad (?\alpha)^\perp}{\perp}\ \mathrm{C}_{!(l)}$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} (?\alpha)^\perp$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

(d) $r(\Pi')$ é $\mathrm{W}_!$:
Essa caso é similar ao caso anterior no qual $r(\Pi')$ é $\mathrm{C}_!$.

(e) $r(\Pi')$ é $\mathrm{E}_\perp$:
As premissas de $r(\Pi')$ pertencem a F. Logo temos um dos seguintes casos:

i. As premissas de $r(\Pi')$ são α e $\alpha^\perp$:
Como nem α nem $\alpha^\perp$ são teoremas da lógica linear, cada uma das premissas de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma das fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Logo temos os seguintes casos:

A. A premissa menor de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^\perp$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp]\quad (?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp\\ \Sigma_1\\ \alpha\end{array}\qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp]\quad (?\alpha)^\perp\\ \Sigma_2\\ \alpha^\perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp, (!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} \alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

B. A premissa menor de $r(\Pi')$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ e de pelo menos uma ocorrência delas:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp]\quad (?\alpha)^\perp\\ \Sigma_1\\ \alpha\end{array}\qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp]\quad (!(\alpha^\perp))^\perp\\ \Sigma_2\\ \alpha^\perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $[(?\alpha)^\perp], (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll'}} \alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

C. A premissa menor de $r(\Pi')$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp\\ \Sigma_1\\ \alpha\end{array}\qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^\perp]\quad (?\alpha)^\perp\\ \Sigma_2\\ \alpha^\perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll'}} \alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

ii. As premissas de $r(\Pi')$ são $?\alpha$ e $(?\alpha)^\perp$:
Como nem $?\alpha$ nem $(?\alpha)^\perp$ são teoremas da lógica linear, cada uma das premissas de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma das fórmulas topo da forma $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Logo temos os seguintes casos:

A. A premissa menor de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma ocorrência de $(?\alpha)^\perp$ e da fórmula topo da forma $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp} \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ (?\alpha)^{\perp}\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

Seja Π'' a subdedução de Π' determinada pela premissa menor $?\alpha$ de $r(\Pi')$. Podemos notar que Π'' é uma dedução normal de $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp}, (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$. No caso 5.(b).i. mostramos a solução para uma dedução Π'' igual. Assim, o presente caso é resolvido de forma similar.

B. A premissa menor de $r(\Pi')$ depende apenas de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$ e de pelo menos uma ocorrência delas: Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ (?\alpha)^{\perp}\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

Como NDLL' é correto, não existe prova para $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

C. A premissa menor de $r(\Pi')$ depende apenas de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$: Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ (?\alpha)^{\perp}\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_{\perp}$$

Seja Π'' a subdedução de Π' determinada pela premissa menor $?\alpha$ de $r(\Pi')$. Podemos notar que Π'' é uma dedução normal de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} ?\alpha$. No caso 5.(b).iii. mostramos a solução para uma dedução Π'' igual. Assim, o presente caso é resolvido de forma similar.

iii. As premissas de $r(\Pi')$ são $!(\alpha^{\perp})$ e $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
Como $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma fórmula topo. Já que, pelo princípio da subfórmula, $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$ só pode ocorrer em Π como fórmula topo, a premissa maior de $r(\Pi')$ é uma fórmula topo e depende de si mesma. Como $!(\alpha^{\perp})$ também não é um teorema da lógica linear, a premissa menor de $r(\Pi')$

depende de pelo menos uma fórmula topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$ e Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp})\end{array} \qquad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}$$

No entanto, a subdedução de Π' determinada pela premissa menor de $r(\Pi')$ é uma dedução normal de $[(?\alpha)^{\perp}], (?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll'}} !(\alpha^{\perp})$ e é menor do que Π, um absurdo.

iv. As premissas de $r(\Pi')$ são $(?\alpha)^{\perp}$ e $(?\alpha)^{\perp\perp}$:
Como $(?\alpha)^{\perp\perp}$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi')$ depende de pelo menos uma fórmula topo. Já que, pelo princípio da subfórmula, $(?\alpha)^{\perp\perp}$ só pode ocorrer em Π como fórmula topo, a premissa maior de $r(\Pi')$ é uma fórmula topo e depende de si mesma. No entanto, a fórmula final de Π' só depende de fórmulas topo da forma $(?\alpha)^{\perp}$ ou $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Assim, a premissa maior de $r(\Pi')$ não poderia ser da forma $(?\alpha)^{\perp\perp}$, um absurdo.

(f) $r(\Pi')$ é $\perp_c$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\begin{array}{c}[(?\alpha)^{\perp}] \quad (?\alpha)^{\perp} \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \quad \perp^{\perp k} \\ \Sigma_1 \\ \dfrac{\perp}{\perp}\,\perp_{c(k)}\end{array}$$

No entanto, $\perp^{\perp}$ não pertence a $\boldsymbol{F}$, um absurdo.

■

F.2 Incompletude do sistema NDLL"

Seja NDLL" o sistema de dedução natural obtido de NDLL pela substituição respectiva das regras $\mathrm{I}_!$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$ e $\mathrm{W}_!$ pelas regras $\mathrm{I}_!$', $\mathrm{E}_?$', $\mathrm{C}_!$' e $\mathrm{W}_!$' mostradas abaixo:

$$\dfrac{!\alpha_1 \quad \ldots \quad !\alpha_n \qquad \begin{array}{c} !\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad !\alpha_n^{j_n} \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{!\beta}\ \mathrm{I}_{!}\text{'}_{(j_1,\ldots,j_n)}$$

($n \geq 0$ e β não depende de nenhuma outra ocorrência de fórmula topo além de $!\alpha_1, \ldots, !\alpha_n$. Assim, se $n = 0$, β é um teorema.)

$$\dfrac{?\alpha \quad !\beta_1 \quad \ldots \quad !\beta_n \qquad \begin{array}{c} !\beta_1^{j_1} \quad \ldots \quad !\beta_n^{j_n} \quad \alpha^k \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma}\ \mathrm{E}_{?}\text{'}_{(j_1,\ldots,j_n,k)}$$

($n \geq 0$, γ é da forma $?\delta$ ou $\perp$ e não depende de qualquer ocorrência de fórmula topo além de $!\beta_1, \ldots, !\beta_n$ e α.)

$$\dfrac{!\alpha \qquad \begin{array}{c} !\alpha^j \quad !\alpha^j \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\beta}\ \mathrm{C}_{!}\text{'}_{(j)}$$

$$\dfrac{!\alpha \quad \beta}{\beta}\ \mathrm{W}_{!}\text{'}$$

Podemos notar que NDLL é uma generalização de NDLL", e portanto, NDLL" é correto e fracamente normalizável da mesma forma que NDLL. Nesse apêndice, no entanto, queremos demonstrar que NDLL" é incompleto. Provamos então o seguinte Teorema:

Teorema F.2 (Incompletude do sistema NDLL") *Não existe deduções em NDLL" para todos os teoremas da lógica linear.*

Por redução ao absurdo, assumimos o contrário, ou seja, para cada teorema da lógica linear existe pelo menos uma dedução em NDLL" que o prova. Logo, em NDLL" existe uma dedução normal Π para o teorema da lógica linear $(?\alpha)^\perp \vdash !(\alpha^\perp)$ sendo α uma fórmula atômica diferente de $\perp$ e 1[‡]. Sem perda de generalidade, assumimos que Π é a menor[§] entre todas possíveis deduções normais em NDLL" para $(?\alpha)^\perp \vdash !(\alpha^\perp)$. Por ser normal, Π obedece o princípio da subfórmula e todas as fórmulas que ocorrem em Π pertencem ao seguinte conjunto:

$$F = \{(?\alpha)^\perp, !(\alpha^\perp), (?\alpha)^{\perp\perp}, (!(\alpha^\perp))^\perp, \alpha, \alpha^\perp, \alpha^{\perp\perp}, ?\alpha, \perp\}$$

Logo, o conjunto das regras de inferências que ocorrem em Π é um subconjunto próprio de $\{\mathrm{I}_!', \mathrm{E}_!, \mathrm{I}_?, \mathrm{E}_?', \mathrm{C}_!', \mathrm{W}_!', \mathrm{I}_\perp, \mathrm{E}_\perp, \perp_c\}$. Além disso, as fórmulas $(?\alpha)^{\perp\perp}$, $(!(\alpha^\perp))^\perp$ e $\alpha^{\perp\perp}$ só ocorrem em Π se forem hipóteses descartadas por aplicação de $\perp_c$.

Como $!(\alpha^\perp)$ é a fórmula final de Π, temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi)$:

1. $r(\Pi)$ é $\mathrm{I}_!'$:

   Nesse caso, $\alpha^\perp$ é a última premissa de $r(\Pi)$ e, pelas restrições da regra $\mathrm{I}_!'$, só depende de fórmulas topo da forma $!\delta$. Assim, a fórmula topo $(?\alpha)^\perp$ ocorre necessariamente acima de uma premissa intermediária de $r(\Pi)$. Dessa forma, para $1 \leq i \leq n$, Π seria da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\\ \Sigma_1 \\ !\beta_1\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}(?\alpha)^\perp \\ \Sigma_i \\ !\beta_i\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\\ \Sigma_n \\ !\beta_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}!\beta_1^{j_1} \quad \dots \quad !\beta_i^{j_i} \quad \dots \quad !\beta_n^{j_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \alpha^\perp\end{array}}{!(\alpha^\perp)}\ \mathrm{I}_!'{}_{(j_1,\dots,j_n)}$$

   Como a premissa intermediária $!\beta_i$ pertence a F, $!\beta_i$ é da forma $!(\alpha^\perp)$. Seja Π' a subdedução de Π determinada pela premissa intermediária $!\beta_i$. Podemos notar que Π' é uma dedução normal de $(?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^\perp)$ e Π' é menor que Π, um absurdo.

[‡] $(?\alpha)^\perp \vdash !(\alpha^\perp)$ é facilmente demonstrado no cálculo de seqüentes linear para qualquer α. A restrição "sendo α uma fórmula atômica diferente de $\perp$ e 1" facilita nossa demonstração da incompletude do sistema NDLL"

[§] Em relação ao tamanho das deduções em NDLL"

2. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_!$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(?\alpha)^{\perp}\\ \Sigma\\ !!(\alpha^{\perp})\end{matrix}}{!(\alpha^{\perp})}\,\mathrm{E}_!$$

   No entanto a premissa $!!(\alpha^{\perp})$ de $r(\Pi)$ não pertence a F, um absurdo.

3. $r(\Pi)$ é $\mathrm{C}_!$':

   Seja δ a premissa maior de $r(\Pi)$. Pela restrição da regra $\mathrm{C}_!$', o símbolo principal de δ é !. Como pertence a F, δ é da forma $!(\alpha^{\perp})$. Já que $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, δ depende da fórmula topo $(?\alpha)^{\perp}$ e Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(?\alpha)^{\perp}\\ \Sigma_1\\ !(\alpha^{\perp})\end{matrix}\qquad\begin{matrix}!(\alpha^{\perp})^{j}\quad !(\alpha^{\perp})^{j}\\ \Sigma_2\\ !(\alpha^{\perp})\end{matrix}}{!(\alpha^{\perp})}\,\mathrm{C}_!\text{'}_{(j)}$$

   Além da fórmula topo $(?\alpha)^{\perp}$, δ não depende de qualquer outra fórmula topo, pois a fórmula final de Π também só depende de $(?\alpha)^{\perp}$.

   Seja Π' a subdedução de Π determinada pela premissa maior δ de $r(\Pi)$. Podemos notar que Π' é uma dedução normal de $(?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^{\perp})$ e Π' é menor que Π, um absurdo.

4. $r(\Pi)$ é $\mathrm{W}_!$':

   Nesse caso, Π seria da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ !\beta\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Sigma_2\\ !(\alpha^{\perp})\end{matrix}}{!(\alpha^{\perp})}\,\mathrm{W}_!\text{'}$$

   Por pertencer a F, $!\beta$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$. Como $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, ambas as premissas de $r(\Pi)$ dependem de pelo menos uma fórmula topo. No entanto, a fórmula final de Π depende apenas de uma ocorrência de $(?\alpha)^{\perp}$, um absurdo.

5. $r(\Pi)$ é $\perp_c$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{cc}(?\alpha)^{\perp} & (!(\alpha^{\perp}))^{\perp\, j}\\ & \Sigma \\ & \perp\end{array}}{!(\alpha^{\perp})}\ \perp_{c(j)}$$

Seja Π' a subdedução de Π determinada pela ocorrência de $\perp$ ilustrada acima. Assim Π' é a menor dedução normal de $(?\alpha)^{\perp}, (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll"}} \perp$ e é da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc}(?\alpha)^{\perp} & (!(\alpha^{\perp}))^{\perp}\\ & \Sigma \\ & \perp\end{array}$$

Temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi')$:

(a) $r(\Pi')$ é $\mathrm{E}_!$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc}(?\alpha)^{\perp} & (!(\alpha^{\perp}))^{\perp}\\ & \Sigma_1 \\ & \dfrac{!\perp}{\perp}\ \mathrm{E}_!\end{array}$$

No entanto a premissa $!\perp$ de $r(\Pi')$ não pertence a F, um absurdo.

(b) $r(\Pi')$ é $\mathrm{E}_?$':
Seja $?\beta$ a premissa maior de $r(\Pi')$. Por pertencer a F, $?\beta$ é da forma $?\alpha$. Como $?\alpha$ não é um teorema da lógica linear, $?\beta$ depende de pelo menos uma das fórmulas topo $(?\alpha)^{\perp}$ e $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Assim, temos os seguintes casos:

i. $?\beta$ depende de ambas fórmulas topo $(?\alpha)^{\perp}$ e $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
Nesse caso, Π' seria da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(?\alpha)^{\perp}\quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp}\\ \Sigma_1\\ ?\alpha\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ !\gamma_1\end{array}\ \ldots\ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ !\gamma_n\end{array}\quad \begin{array}{c}!\gamma^{j_1}\ \ldots\ !\gamma^{j_n}\quad \alpha^{k}\\ \Sigma_{n+2}\\ \perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_?\text{'}_{(j_1,\ldots,j_n,k)}$$

Podemos notar que as premissas intermediárias $!\gamma_1, \ldots, !\gamma_n$ não dependem de qualquer fórmula topo, pois a fórmula final $\perp$ de Π' também não depede de fórmulas topo além de uma ocorrência de $(?\alpha)^{\perp}$ e de uma ocorrência $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Logo, $!\gamma_1, \ldots, !\gamma_n$ são teoremas da lógica linear. Como F não contém qualquer teorema da lógica linear para α atômica e diferente de $\perp$ e 1, então $n = 0$, $r(\Pi')$ não possui premissas intermediárias, e Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix} (?\alpha)^{\perp} \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha^k \\ \Sigma_2 \\ \perp \end{matrix}}{\perp} \text{E}_?\text{'}_{(k)}$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $\alpha \vdash_{\text{ndll"}} \perp$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

ii. $?\beta$ depende apenas de $(?\alpha)^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix} (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^{\perp}) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} !(\alpha^{\perp})^j \quad \alpha^k \\ \Sigma_3 \\ \perp \end{matrix}}{\perp} \text{E}_?\text{'}_{(j,k)}$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^{\perp})$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

iii. $?\beta$ depende apenas de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix} (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ ?\alpha \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ !(\alpha^{\perp}) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} !(\alpha^{\perp})^j \quad \alpha^k \\ \Sigma_2 \\ \perp \end{matrix}}{\perp} \text{E}_?\text{'}_{(j,k)}$$

Seja Π'' uma subdedução de Π' determinada pela premissa intemediária $!(\alpha^{\perp})$. Podemos notar que Π'' é uma dedução normal de $(?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^{\perp})$ e Π'' é menor que Π, um absurdo.

(c) $r(\Pi')$ é $\text{C}_!$':
Seja $!\beta$ a premissa maior de $r(\Pi')$. Por pertencer a F, $!\beta$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$. Como $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, $!\beta$ depende de pelo menos uma das fórmulas topo $(?\alpha)^{\perp}$ e $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Assim, temos os seguintes casos:

i. $!\beta$ depende de ambas fórmulas topo $(?\alpha)^{\perp}$ e $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix} (?\alpha)^{\perp} \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp}) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} !(\alpha^{\perp})^j \quad !(\alpha^{\perp})^j \\ \Sigma_2 \\ \perp \end{matrix}}{\perp} \text{C}_!\text{'}_{(j)}$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $!(\alpha^{\perp}), !(\alpha^{\perp}) \vdash_{\text{ndll"}} \perp$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

ii. $!\beta$ depende apenas de $(?\alpha)^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp})\end{matrix} \quad !(\alpha^{\perp})^{j} \quad \begin{matrix}!(\alpha^{\perp})^{j} \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\ \text{C}_!\text{'}_{(j)}$$

Seja Π'' uma subdedução de Π' determinada pela premissa maior $!(\alpha^{\perp})$. Podemos notar que Π'' é uma dedução normal de $(?\alpha)^{\perp} \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^{\perp})$ e Π'' é menor que Π, um absurdo.

iii. $!\beta$ depende apenas de $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp})\end{matrix} \quad !(\alpha^{\perp})^{j} \quad \begin{matrix}!(\alpha^{\perp})^{j} \quad (?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\ \text{C}_!\text{'}_{(j)}$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^{\perp})$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

(d) $r(\Pi')$ é W$_!$':
Seja $!\beta$ a premissa maior de $r(\Pi')$. Por pertencer a F, $!\beta$ é da forma $!(\alpha^{\perp})$. Como $!(\alpha^{\perp})$ não é um teorema da lógica linear, $!\beta$ depende de pelo menos uma das fórmulas topo $(?\alpha)^{\perp}$ e $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$. Assim, temos os seguintes casos:

i. $!\beta$ depende de ambas fórmulas topo $(?\alpha)^{\perp}$ e $(!(\alpha^{\perp}))^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(?\alpha)^{\perp} \quad (!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp})\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\ \text{W}_!\text{'}$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $\vdash_{\text{ndll"}} \perp$, um absurdo.

ii. $!\beta$ depende apenas de $(?\alpha)^{\perp}$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(?\alpha)^{\perp} \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^{\perp})\end{matrix} \quad \begin{matrix}(!(\alpha^{\perp}))^{\perp} \\ \Sigma_2 \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\ \text{W}_!\text{'}$$

Seja Π'' uma subdedução de Π' determinada pela premissa maior $!(\alpha^\perp)$. Podemos notar que Π'' é uma dedução normal de $(?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^\perp)$ e Π'' é menor que Π, um absurdo.

iii. $!\beta$ depende apenas de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^\perp)\end{matrix} \quad \begin{matrix}(?\alpha)^\perp \\ \Sigma_2 \\ \perp\end{matrix}}{\perp}\ \text{W}_{!}\text{'}_{(j)}$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^\perp)$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

(e) $r(\Pi')$ é $\text{E}_\perp$:
As premissas de $r(\Pi')$ pertencem a F. Logo temos um dos seguintes casos:

i. As premissas de $r(\Pi')$ são α e $\alpha^\perp$:
Como α e $\alpha^\perp$ não são teoremas da lógica linear, cada uma das premissas de $r(\Pi')$ depende ou da fórmula topo $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Assim temos os seguintes casos:

A. α depende de $(?\alpha)^\perp$ e $\alpha^\perp$ depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(?\alpha)^\perp \\ \Sigma_1 \\ \alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_2 \\ \alpha^\perp\end{matrix}}{\perp}\ \text{E}_\perp$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $(?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll"}} \alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

B. α depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$ e $\alpha^\perp$ depende de $(?\alpha)^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ \alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix}(?\alpha)^\perp \\ \Sigma_2 \\ \alpha^\perp\end{matrix}}{\perp}\ \text{E}_\perp$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll"}} \alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

ii. As premissas de $r(\Pi')$ são $?\alpha$ e $(?\alpha)^\perp$:
Como $?\alpha$ e $(?\alpha)^\perp$ não são teoremas da lógica linear, cada uma das premissas de $r(\Pi')$ depende ou da fórmula topo $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Assim temos os seguintes casos:

A. $?\alpha$ depende de $(?\alpha)^\perp$ e $(?\alpha)^\perp$ depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(?\alpha)^\perp\\ \Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp\\ \Sigma_2\\ (?\alpha)^\perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

Como NDLL" é correto, não existe prova para $(?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll"}} ?\alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

B. $?\alpha$ depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$ e $(?\alpha)^\perp$ depende de $(?\alpha)^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp\\ \Sigma_1\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}(?\alpha)^\perp\\ \Sigma_2\\ (?\alpha)^\perp\end{array}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

Seja Π'' a subdedução de Π' determinada pela premissa menor $?\alpha$ de $r(\Pi')$. Π'' é uma menor dedução normal de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll"}} ?\alpha$. Temos os seguintes casos dependendo de $r(\Pi'')$:

- $r(\Pi'')$ é $\mathrm{I}_?$:
  Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

  $$\begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp\\ \Sigma_{1.1}\\ \dfrac{\alpha}{?\alpha}\ \mathrm{I}_?\end{array}$$

  Como NDLL" é correto, não existe prova de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll"}} \alpha$ considerando α atômica e diferente de 1, um absurdo.

- $r(\Pi'')$ é $\mathrm{E}_?$':
  Por pertencer a F, a premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $?\alpha$. Como $?\alpha$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi'')$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Podemos observar que Π'' é da seguinte forma:

  $$\dfrac{\begin{array}{c}(!(\alpha^\perp))^\perp\\ \Sigma_{1.1}\\ ?\alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha^j\\ \Sigma_{1.2}\\ ?\alpha\end{array}}{?\alpha}\ \mathrm{E}_?\text{'}_{(j)}$$

  Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada pela premissa maior $?\alpha$ de $r(\Pi'')$. Π''' é uma dedução normal de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll"}} ?\alpha$ e é menor que Π'', um absurdo.

- $r(\Pi'')$ é C$_!$':
  Por pertencer a F, a premissa maior de $r(\Pi'')$ é da forma $!(\alpha^\perp)$. Como $!(\alpha^\perp)$ não é um teorema da lógica linear, a premissa maior de $r(\Pi'')$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Podemos observar que Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_{1.1} \\ !(\alpha^\perp)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}!(\alpha^\perp)^j \quad !(\alpha^\perp)^j \\ \Sigma_{1.2} \\ ?\alpha\end{matrix}}{?\alpha}\ \mathrm{C_!'}_{(j)}$$

  Como NDLL" é correto, não existe prova de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^\perp)$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.
- $r(\Pi'')$ é W$_!$':
  Esse caso é similar ao caso anterior no qual $r(\Pi'')$ é C$_!$'.
- $r(\Pi'')$ é $\perp_c$:
  Nesse caso, Π'' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \quad (?\alpha)^{\perp k} \\ \Sigma_{1.1} \\ \perp\end{matrix}}{?\alpha}\ \perp_{c(k)}$$

  Seja Π''' a subdedução de Π'' determinada pela ocorrência de $\perp$ ilustrada acima. Π''' é uma dedução normal de $(!(\alpha^\perp))^\perp, (?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll"}} \perp$ e é menor que Π', um absurdo.

iii. As premissas de $r(\Pi')$ são $!(\alpha^\perp)$ e $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Como $!(\alpha^\perp)$ e $(!(\alpha^\perp))^\perp$ não são teoremas da lógica linear, cada uma das premissas de $r(\Pi')$ depende ou da fórmula topo $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Assim temos os seguintes casos:

A. $!(\alpha^\perp)$ depende de $(?\alpha)^\perp$ e $(!(\alpha^\perp))^\perp$ depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(?\alpha)^\perp \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^\perp)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_2 \\ (!(\alpha^\perp))^\perp\end{matrix}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

Seja Π'' a subdedução de Π' determinada pela premissa menor $!(\alpha^\perp)$ de $r(\Pi')$. Π'' é uma dedução normal de $(?\alpha)^\perp \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^\perp)$ e é menor que Π, um absurdo.

B. $!(\alpha^\perp)$ depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$ e $(!(\alpha^\perp))^\perp$ depende de $(?\alpha)^\perp$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\dfrac{\begin{matrix}(!(\alpha^\perp))^\perp \\ \Sigma_1 \\ !(\alpha^\perp)\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(?\alpha)^\perp \\ \Sigma_2 \\ (!(\alpha^\perp))^\perp\end{matrix}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp$$

Como NDLL" é correto, não existe prova de $(!(\alpha^\perp))^\perp \vdash_{\text{ndll"}} !(\alpha^\perp)$ considerando α atômica e diferente de $\perp$, um absurdo.

iv. As premissas de $r(\Pi')$ são $(?\alpha)^\perp$ e $(?\alpha)^{\perp\perp}$:
Como $(?\alpha)^\perp$ e $(?\alpha)^{\perp\perp}$ não são teoremas da lógica linear, cada uma das premissas de $r(\Pi')$ depende ou da fórmula topo $(?\alpha)^\perp$ ou da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$. Assim temos os seguintes casos:

A. $(?\alpha)^\perp$ depende de $(?\alpha)^\perp$ e $(?\alpha)^{\perp\perp}$ depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$:
Pelo princípio da subfórmula, $(?\alpha)^{\perp\perp}$ só poderia aparecer em Π como fórmula topo. Logo a premissa maior de $r(\Pi')$ só depende de si mesma. No entanto, no presente caso, $(?\alpha)^{\perp\perp}$ depende da fórmula topo $(!(\alpha^\perp))^\perp$, um absurdo.

B. $(?\alpha)^\perp$ depende de $(!(\alpha^\perp))^\perp$ e $(?\alpha)^{\perp\perp}$ depende de $(?\alpha)^\perp$:
Esse caso é similar ao caso anterior.

(f) $r(\Pi')$ é $\perp_c$:
Nesse caso, Π' é da seguinte forma:

$$\begin{matrix}(?\alpha)^\perp \quad (!(\alpha^\perp))^\perp \quad \perp^{\perp k} \\ \Sigma_1 \\ \dfrac{\perp}{\perp}\ \perp_{c(k)}\end{matrix}$$

No entanto, $\perp^\perp$ não pertence a F, um absurdo.

■

Apêndice G

Lemas Auxiliares a Normalização

Lema G.1 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 1.(e) e 4.(c)) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \mid_{\overline{ndll}} \perp$ *tal que:*

1. α *é a única ocorrência de fórmula máxima em* Π*;*

2. α *é premissa menor de* $r(\Pi)$ *e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e) ou 4.(c).*

Então Π *é reduzida a uma dedução normal* Π' *de* $\Gamma \mid_{\overline{ndll}} \perp$*.*

Provamos esse Lema G.1 por indução em $s(\alpha)$.

Como α é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e) ou 4.(c), $r(\Pi)$ é $E_\perp$ e $i(\Pi) = (0, 0)$. Então temos os seguintes casos dependendo de α:

1. α é ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e):

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\alpha^{\perp j}\\ \Sigma \\ \perp\end{matrix}}{\alpha}\,\perp_{c(j)} \qquad \alpha^{\perp}}{\perp}\, E_\perp$$

   Π é reduzida a uma dedução Π' através da redução 22 como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \alpha^{\perp} \\ \Sigma \\ \perp \end{array}$$

Podemos notar que Π' é normal.

2. α é ocorrência de fórmula máxima do tipo 4.(c):

   Nesse caso, α é conclusão de uma regra R tal que R é $E_{\otimes}$, $E_{\oplus}$, $E_{\exists}$, $E_{?}$, $C_{!}$, $W_{!}$ ou E_{1}. Então temos os seguintes casos dependendo de R:

   (a) R é $E_{\otimes}$, $E_{\exists}$, $C_{!}$, $W_{!}$ ou E_{1}:

   Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \beta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,R \qquad \alpha^{\perp}}{\perp}\,E_{\perp}$$

   Tal que β é a premissa maior de R. Então Π é reduzida a uma dedução Π_1^* através da redução 23 como segue:

   $\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \beta\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \alpha^{\perp}}{\perp}\,E_{\perp}}{\perp}\,R$$

   Se Π_1^* é normal, então $\Pi' \equiv \Pi_1^*$. Se não, α é também uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e) ou iv).(c) em Π_1^*. Nesse caso, seja Π_2^* a subdedução determinada pela ocorrência de $\perp$ mais acima ilustrada acima em Π_1^*. Π_2^* é da forma descrita por esse Lema G.1. Como $s(\alpha)$ em Π_2^* é menor que $s(\alpha)$ em Π, por hipótese de indução, Π_2^* é reduzida a uma dedução normal Π_3^*. Π' é então a seguinte dedução normal:

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \beta\end{array} \quad \Pi_3^*}{\perp}\,R$$

   (b) R é $E_{\oplus}$:

   Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \beta\oplus\gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\beta^{j_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\gamma^{j_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,\mathrm{E}_{\oplus(j_1,j_2)} \qquad \alpha^{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}$$

Então Π é reduzida a uma dedução Π_1^* através da redução 24 como segue:

$\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \beta\oplus\gamma\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\beta^{j_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \alpha^{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\gamma^{j_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array} \quad \alpha^{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\oplus(j_1,j_2)}$$

Se Π_1^* é normal, então $\Pi' \equiv \Pi_1^*$. Se não, pelo menos uma das subdeduções determinadas pelas premissas menores $\perp$ ilustradas acima em Π_1^* é da forma descrita por esse Lema G.1.

Seja Π_2^* a subdedução de Π_1^* determinada pela primeira premissa menor $\perp$ (na ordem da esquerda para a direita) e Π_3^* a subdedução determinada pela segunda. Podemos notar que $s(\alpha)$ em Π_2^* e em Π_3^* é menor que $s(\alpha)$ em Π.

Assim, se Π_2^* é da forma descrita por esse Lema G.1, então, por hipótese de indução, Π_2^* é reduzida a uma dedução normal Π_2^{**}. O mesmo ocorre com Π_3^*: se Π_3^* é da forma descrita por esse Lema G.1, então, por hipótese de indução, Π_3^* é reduzida a uma dedução normal Π_3^{**}.

Sejam Π_2' e Π_3' as seguintes deduções:

- Se Π_2^* é normal $\Pi_2' \equiv \Pi_2^*$, se não $\Pi_2' \equiv \Pi_2^{**}$.
- Se Π_3^* é normal $\Pi_3' \equiv \Pi_3^*$, se não $\Pi_3' \equiv \Pi_3^{**}$.

Então, Π' é a seguinte dedução normal:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \beta\oplus\gamma\end{array} \quad \Pi_2' \quad \Pi_3'}{\perp}\,\mathrm{E}_{\oplus(j_1,j_2)}$$

(c) R é $\mathrm{E}_?$:

Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ ?\beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1} \\ \gamma_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\gamma_1^{j_1} \quad \ldots \quad \gamma_n^{j_n} \quad \beta^k \\ \Sigma_{n+2} \\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_n,k)} \qquad \alpha^{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}
$$

Então Π é reduzida a uma dedução Π_1^* através da redução 25 como segue:

$\Pi_1^* \equiv$

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ ?\beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1} \\ \gamma_n\end{matrix} \quad \alpha^{\perp} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\gamma_1^{j_1} \quad \ldots \quad \gamma_n^{j_n} \quad \beta^k \\ \Sigma_{n+2} \\ \alpha\end{matrix} \qquad \alpha^{\perp\, j_{n+1}}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\perp}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_{n+1},k)}
$$

Se Π_1^* é normal, então $\Pi' \equiv \Pi_1^*$. Se não, α é também uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e) ou 4.(c) em Π_1^*. Nesse caso, seja Π_2^* a subdedução determinada pela ocorrência mais acima de $\perp$ ilustrada acima em Π_1^*. Π_2^* é da forma descrita por esse Lema G.1. Como $s(\alpha)$ em Π_2^* é menor que $s(\alpha)$ em Π, por hipótese de indução, Π_2^* é reduzida a uma dedução normal Π_3^*. Π' é então a seguinte dedução normal:

$\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ ?\beta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \gamma_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1} \\ \gamma_n\end{matrix} \quad \alpha^{\perp} \quad \Pi_3^*}{\perp}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_{n+1},k)}
$$

■

Lema G.2 (Lema da permanência) *Seja* Π *uma dedução tal que* $i(\Pi) = (0,0)$. *Então, se* Π *é reduzida a uma dedução* Π', $m(\Pi') = (0,0)$.

Como $i(\Pi) = (0,0)$, qualquer ocorrência de fórmula máxima em Π é do tipo 1.(e) ou 4.(c). Então Π' é obtida a partir de Π atravé das reduções 22, 23, 24 e 25. Podemos notar que nenhuma dessas reduções é capaz de produzir ocorrências de fórmulas discordantes em Π'. Assim, $i(\Pi') = (0,0)$.

■

Lema G.3 (Lema sobre deduções de índice (0,0)) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *tal que* $i(\Pi) = (0,0)$. *Então* Π *é reduzida a uma dedução normal* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$.

Se Π é normal, então $\Pi' \equiv \Pi$.

Se não, provamos esse Lema G.3 por indução em $l(\Pi)$.

Então seja $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ as subdeduções imediatas de $r(\Pi)$ tal que Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\frac{\Pi_1 \quad \ldots \quad \Pi_n}{\beta}\, r(\Pi)$$

Como $l(\Pi_i) < l(\Pi)$, para $1 \leq i \leq n$, por hipótese de indução, Π_i é reduzida a uma dedução normal Π'_i. Então seja Π^* a seguinte dedução:

$\Pi^* \equiv$

$$\frac{\Pi'_1 \quad \ldots \quad \Pi'_n}{\beta}\, r(\Pi)$$

Se Π^* é normal, então $\Pi' \equiv \Pi^*$. Se não, pelo Lema G.2, $i(\Pi^*) = (0,0)$, β é $\perp$ e Π^* é da seguinte forma:

$\Pi^* \equiv$

$$\frac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \alpha\end{array} \quad \alpha^{\perp}}{\perp}\, \mathrm{E}_{\perp}$$

Tal que α é ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e) ou 4.(c). Como podemos notar, Π^* é da forma descrita pelo Lema G.1. Então Π^* é reduzida a uma dedução normal Π'.

■

Lema G.4 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 1.(a)) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *e* α *a única ocorrência de fórmula máxima de* Π *tal que* α *é uma premissa de* $r(\Pi)$ *e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(a). Então* Π *é reduzida a uma dedução* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *tal que* $i(\Pi') < i(\Pi)$.

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$. Temos um dos seguintes casos dependendo de $r(\Pi)$:

1. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_{\multimap}$:

   α é $\gamma \multimap \beta$ e Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\gamma^j\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\gamma \multimap \beta}\,\mathrm{I}_{\multimap(j)}}{\beta}\,\mathrm{E}_{\multimap}$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma \multimap \beta)$.

   Π é reduzida pela redução 1 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}$$

   Então, temos um dos seguintes casos:

   (a) γ não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\gamma \multimap \beta)$.

   (b) γ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(\gamma \multimap \beta)$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\gamma) < i(\Pi) = i(\gamma \multimap \beta)$.

2. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_{\otimes}$:

   α é $\gamma \otimes \delta$ e Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta\end{array}}{\gamma \otimes \delta}\,\mathrm{I}_{\otimes} \qquad \begin{array}{c}\gamma^j \quad \delta^k\\ \Sigma_3\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{E}_{\otimes(j,k)}$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

   Π é reduzido pela redução 2 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{cc} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \gamma & \delta \\ \multicolumn{2}{c}{\Sigma_3} \\ \multicolumn{2}{c}{\beta} \end{array}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

(a) γ e δ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

(b) γ e/ou δ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(\gamma \otimes \delta)$ e $d_c(\delta) < d_c(\gamma \otimes \delta)$ podemos notar que $i(\Pi') \leq max(i(\gamma), i(\delta)) < i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

3. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_{⅋}$:

α é $\gamma ⅋ \delta$, β é $\perp$ e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \gamma^{\perp j} \quad \delta^{\perp k} \\ \Sigma_1 \\ \perp \end{array}}{\gamma ⅋ \delta}\,\mathrm{I}_{⅋(j,k)} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \gamma^{\perp}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3 \\ \delta^{\perp}\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_{⅋}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma ⅋ \delta)$.

Π é reduzida pela redução 3 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{cc} \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \gamma^{\perp} & \delta^{\perp} \\ \multicolumn{2}{c}{\Sigma_1} \\ \multicolumn{2}{c}{\perp} \end{array}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

(a) $\gamma^{\perp}$ e $\delta^{\perp}$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\gamma ⅋ \delta)$.

(b) $\gamma^{\perp}$ e/ou $\delta^{\perp}$ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Por definição, $d_c(\gamma ⅋ \delta) = d_c(\gamma) + d_c(\delta) + 2$. Assim $d_c(\gamma^{\perp}) < d_c(\gamma ⅋ \delta)$ e $d_c(\delta^{\perp}) < d_c(\gamma ⅋ \delta)$. Dessa forma, podemos notar que $i(\Pi') \leq max(i(\gamma^{\perp}), i(\delta^{\perp})) < i(\Pi) = i(\gamma ⅋ \delta)$.

4. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_{1\&}$ ou $\mathrm{E}_{2\&}$:

   α é $\gamma_1 \& \gamma_2$, β é γ_i para $i = 1$ ou 2 e Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma^{j_1 \dots j_n} \\ \Sigma_1 \\ \gamma_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma^{j_1 \dots j_n} \\ \Sigma_2 \\ \gamma_2\end{matrix}}{\gamma_1 \& \gamma_2}\ \mathrm{I}_{\&}}{\gamma_i}\ \mathrm{E}_{i\&}$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma_1 \& \gamma_2)$.

   Π é reduzida pela redução 4 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{matrix}\Gamma^{j_1 \dots j_n} \\ \Sigma_i \\ \gamma_i\end{matrix}$$

   Podemos notar que em Π' não existem ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\gamma_1 \& \gamma_2)$.

5. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_{\oplus}$:

   α é $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ e Π é da seguinte forma para $i = 1$ ou 2:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_i \\ \gamma_i\end{matrix}}{\gamma_1 \oplus \gamma_2}\ \mathrm{I}_{i\oplus} \qquad \begin{matrix}\Gamma^{j_1 \dots j_n}\ \gamma_1^{k_1} \\ \Sigma_3 \\ \beta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma^{j_1 \dots j_n}\ \gamma_2^{k_2} \\ \Sigma_4 \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\ \mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$.

   Π é reduzida pela redução 5 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{matrix}\Gamma^{j_1 \dots j_n}\ \begin{matrix}\Sigma_i \\ \gamma_i\end{matrix} \\ \Sigma_{i+2} \\ \beta\end{matrix}$$

   Então, temos um dos seguintes casos:

(a) γ_i não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$.

(b) γ_i é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, como $d_c(\gamma_i) < d_c(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\gamma_i) < i(\Pi) = i(\gamma_1 \oplus \gamma_2)$.

6. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_\forall$:

α é $\forall x\gamma$, β é γ_a^x e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \gamma_a^x\end{matrix}}{\forall x\gamma}\,\mathrm{I}_\forall}{\gamma_t^x}\,\mathrm{E}_\forall$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\forall x\gamma)$.

Π é reduzida pela redução 6 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{matrix}\Sigma_t^a\\ \gamma_t^x\end{matrix}$$

Podemos notar que em Π' não existem ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\forall x\gamma)$.

7. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_\exists$:

α é $\exists x\gamma$ e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \gamma_t^x\end{matrix}}{\exists x\gamma}\,\mathrm{I}_\exists \quad \begin{matrix}\gamma_a^{x\,j}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{E}_{\exists(j)}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\exists x\gamma)$.

Π é reduzida pela redução 7 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \gamma^x_t \\ {\Sigma_2}^a_t \\ \beta \end{array}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

(a) γ^x_t não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\exists x\gamma)$.

(b) γ^x_t é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, como $d_c(\gamma^x_t) < d_c(\exists x\gamma)$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\gamma^x_t) < i(\Pi) = i(\exists x\gamma)$.

8. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_!$:

α é $!\beta$ e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \gamma_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\gamma_1^{j_1} \quad \ldots \quad \gamma_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\ \mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}}{\beta}\ \mathrm{E}_!$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(!\beta)$.

Como, em Π, $!\beta$ é a única ocorrência de fórmula máxima, então nenhuma da premissas intermediárias $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ilustradas acima pode ser conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ e E_1.

Π é reduzida pela redução 8 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \gamma_n\end{array} \\ \Sigma_{n+1} \\ \beta \end{array}$$

Como as ocorrências de fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ilustradas acima não são conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ e E_1, então em Π' não existem ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(!\beta)$.

9. $r(\Pi)$ é $E_?$:

   α é $?\gamma$ e Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \gamma\end{matrix}}{?\gamma}\,I_? \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \delta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\delta_1^{j_1} \quad \dots \quad \delta_n^{j_n} \quad \gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,E_{?(j_1,\dots,j_n,k)}$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(?\gamma)$.

   Como, em Π, $?\gamma$ é a única ocorrência de fórmula máxima, então nenhuma da premissas intermediárias $\delta_1, \dots, \delta_n$ ilustradas acima pode ser conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ e E_1.

   Π é reduzida pela redução 9 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{matrix}\begin{matrix}\Sigma_2\\ \delta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \gamma\end{matrix}\\ \Sigma_{n+2}\\ \beta\end{matrix}$$

   Como as ocorrências de fórmulas $\delta_1, \dots, \delta_n$ ilustradas acima não são conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ e E_1, então a única ocorrência de fórmula de Π' que pode ser discordante é γ. Logo temos um dos seguintes casos:

   (a) γ não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(?\gamma)$.

   (b) γ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(?\gamma)$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\gamma) < i(\Pi) = i(?\gamma)$.

10. $r(\Pi)$ é E_1:

    α é 1 e Π é da seguinte forma:

    $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{}{1}\,I_1 \quad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,E_1$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(1) = (1, 1)$.

Π é reduzida pela redução 10 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \beta \end{array}$$

Podemos notar que em Π' não existem ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(1) = (1, 1)$.

11. $r(\Pi)$ é $E_\perp$:

α é $\gamma^\perp$, β é $\perp$ e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \gamma \end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c} \gamma^j \\ \Sigma_2 \\ \perp \end{array}}{\gamma^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

Π é reduzida pela redução 11 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \gamma \\ \Sigma_2 \\ \perp \end{array}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

(a) γ não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

(b) γ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(\gamma^\perp)$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\gamma) < i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

■

Lema G.5 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 1.(b)) *Seja Π uma dedução de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ e α a única ocorrência de fórmula máxima de Π tal que α é uma premissa de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(b). Então Π é reduzida a uma dedução Π' de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.*

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$, $r(\Pi)$ é $\mathrm{W}_!$ e α, a premissa maior de $r(\Pi)$, é uma fórmula essencialmente !-modal. Temos um dos seguintes casos dependendo de α:

1. α é 1:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \qquad \begin{matrix}\Sigma\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(1) = (1, 1)$.

   Π é reduzida pela redução 38 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\begin{matrix}\Sigma\\ \beta\end{matrix}$$

   Podemos notar que em Π' não existem ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(1) = (1, 1)$.

2. α é da forma $\gamma \otimes \delta$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \delta\end{matrix}}{\gamma \otimes \delta}\,\mathrm{I}_\otimes \qquad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

   Π é reduzida pela redução 39 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Então, temos um dos seguintes casos:

(a) γ e δ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

(b) γ e/ou δ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(\gamma \otimes \delta)$ e $d_c(\delta) < d_c(\gamma \otimes \delta)$ podemos notar que $i(\Pi') \leq max(i(\gamma), i(\delta)) < i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

3. α é da forma $!\gamma$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \delta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \delta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\delta_1^{j_1} \quad \ldots \quad \delta_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(!\gamma)$.

Como, em Π, $!\gamma$ é a única ocorrência de fórmula máxima, então nenhuma da premissas intermediárias $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ilustradas acima pode ser conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ e E_1.

Π é reduzida pela redução 40 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \delta_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_n\\ \delta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Como as ocorrências de fórmulas $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ilustradas acima não são conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras

$\perp_c$, $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ e E_1, então em Π' não existem ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(!\gamma)$.

4. α é da forma $\gamma^\perp$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\gamma^j \\ \Sigma_1 \\ \perp\end{matrix}}{\gamma^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

   A ocorrência de hipótese γ^j é premissa de uma regra R. Como $\gamma^\perp$ é uma fórmula essencialmente !-modal, γ é uma fórmula essencialmente ?-modal. Dessa forma, se γ^j for a premissa maior de R, então R é $E_?$, $E_⅋$ ou $E_\perp$. Assim, temos uma das seguintes reduções dependendo de R e γ^j:

   (a) R é uma aplicação de regra de introdução ou γ^j é premissa menor de R:

   Nesse caso, Π é reduzida pela redução 41.(a) a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma^{\perp j_1} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_! \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma}\,\perp_{c(j_1)} \\ \Sigma_1 \\ \perp\end{matrix}}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}$$

   Então, temos um dos seguintes casos:

   i. γ não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

   ii. γ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(\gamma^\perp)$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\gamma) < i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

(b) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_\perp$ e γ^j é a premissa maior de R, assim γ^j é da forma $\delta^{\perp j}$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta\end{array} \quad \delta^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ \perp\end{array}}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\delta^{\perp\perp})$.

Π é reduzida pela redução 41.(b) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_! \qquad \beta^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ \perp\end{array}}{\beta}\,\perp_{c(j)}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

i. δ não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\gamma^\perp) = i(\delta^{\perp\perp})$.

ii. δ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, como $d_c(\delta) < d_c(\delta^{\perp\perp}) = d_c(\gamma^\perp)$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\delta) < i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

(c) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_\parr$ e γ^j é a premissa maior de R, assim γ^j é da forma $\delta \parr \varphi^j$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\delta \parr \varphi^j \quad \begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta^\perp\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \varphi^\perp\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_\parr \\ \Sigma_{1.3} \\ \perp\end{array}}{(\delta \parr \varphi)^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i((\delta \parr \varphi)^{\perp})$.

Π é reduzida pela redução 41.(c) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \delta^{\perp}\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.2}\\ \varphi^{\perp}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{2}\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!}{\beta}\,\mathrm{W}_! \qquad \beta^{\perp j}}{\begin{matrix}\perp\\ \Sigma_{1.3}\\ \perp\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\beta}\,\perp_{c(j)}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

i. $\delta^{\perp}$ e $\varphi^{\perp}$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π': Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\gamma^{\perp})$.

ii. $\delta^{\perp}$ e/ou $\varphi^{\perp}$ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π': Nesse caso, como $d_c(\delta^{\perp}) < d_c((\delta \parr \varphi)^{\perp})$ e $d_c(\varphi^{\perp}) < d_c((\delta \parr \varphi)^{\perp})$ podemos notar que $i(\Pi') \leq max(i(\delta^{\perp}), i(\varphi^{\perp})) < i(\Pi) = i((\delta \parr \varphi)^{\perp}) = i(\gamma^{\perp})$.

(d) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_?$ e γ^j é a premissa maior de R, assim γ^j é da forma $?\delta^j$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{?\delta^j \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \varphi_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.n}\\ \varphi_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\varphi_1^{l_1} \quad \dots \quad \varphi_n^{l_n} \quad \delta^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{matrix}}{\begin{matrix}\psi\\ \Sigma_{1.(n+2)}\\ \perp\end{matrix}}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{n+1})}}{(?\delta)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i((?\delta)^{\perp})$.

Como, em Π, $(?\delta)^{\perp}$ é a única ocorrência de fórmula máxima, então nenhuma da premissas intermediárias $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ilustradas acima pode ser conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $\mathrm{E}_{\otimes}$, $\mathrm{E}_{\oplus}$, $\mathrm{E}_{\exists}$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ e E_1.

Como, em Π, $(?\delta)^{\perp}$ é a única ocorrência de fórmula máxima e ψ é uma fórmula essencialmente ?-modal, a conclusão ψ de $\mathrm{E}_?$

ilustrada acima não pode ser premissa maior ou intermediária de uma regra.

Π é reduzida pela redução 41.(d) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.n}\\ \varphi_n\end{array} \quad \dfrac{\psi^{\perp j_1} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,W_!}{\beta}\,W_!\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\beta}\,W_! \quad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,E_{\perp}}{\psi}\,\perp_{c(j_1)}\\ \Sigma_{1.(n+2)}\\ \perp\end{array}}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}
$$

Como a ocorrência de fórmula ψ ilustrada acima não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra e as ocorrências de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ilustradas acima não são conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $E_{\otimes}$, $E_{\oplus}$, $E_{\exists}$, $C_!$, $W_!$ e E_1, então em Π' não existem ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i((?\delta)^{\perp})$.

∎

Lema G.6 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 4.(b)) *Seja Π uma dedução de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ e α a única ocorrência de fórmula máxima de Π tal que α é uma premissa de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 4.(b). Então Π é reduzida a uma dedução Π' de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.*

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$, $r(\Pi)$ é $W_!$ e α, a premissa maior de $r(\Pi)$, é uma fórmula essencialmente !-modal e é conseqüencia de uma aplicação da regra $E_{\otimes}$, $E_{\oplus}$, $E_{\exists}$, $C_!$, $W_!$ ou E_1.

Como α é uma fórmula essencialmente !-modal, $d_c(\alpha) > 0$ e $i(\alpha) > (0,0)$. Sem perda de generalidade, consideramos $i(\alpha) = (p,q)$.

Seja R a regra da qual α é conclusão. Logo, temos um dos seguintes casos dependendo de R:

1. R é $E_{\otimes}$, $E_{\exists}$, $C_!$, $W_!$ ou E_1:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\,R \qquad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Tal que γ é a premissa maior de R.

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha) = (p, q)$.

Π é reduzida pela redução 12 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \gamma\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \alpha\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!}{\beta}\,R$$

Temos um dos seguintes casos:

(a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(p, q)$.

(b) α é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Podemos notar que a propagação de α em Π' é igual a $q - 1$ e portanto menor que a propagação de α em Π. Logo, $i(\alpha)$ em Π' é $(p, q - 1)$ e $i(\Pi') = (p, q - 1) < i(\Pi) = (p, q)$.

2. R é $\mathrm{E}_\oplus$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \gamma \oplus \delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \gamma^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \delta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2^{l_1\ldots l_n}\\ \Sigma_4\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha) = (p, q)$.

Π é reduzida pela redução 13 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\oplus\delta\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\dots j_n}\ \gamma^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\dots l_n}\\ \Sigma_4\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_! \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\dots j_n}\ \delta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\dots l_n}\\ \Sigma_4\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!}{\beta}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

Temos um dos seguintes casos:

(a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(p,q)$.

(b) pelo menos uma das ocorrências de α ilustradas acima é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Podemos notar que a propagação de qualquer uma das ocorrências de α ilustradas acima em Π' é menor do que q e portanto menor que a propagação de α em Π. Logo, $i(\Pi')$ é menor que $i(\Pi)$.

■

Lema G.7 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 1.(d)) *Seja Π uma dedução de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ e α a única ocorrência de fórmula máxima de Π tal que α é uma premissa de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(d). Então Π é reduzida a uma dedução Π' de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.*

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$, $r(\Pi)$ é $\mathrm{W}_!$, α é conclusão de uma aplicação da regra $\perp_c$ e $d_c(\alpha) > 0$, pois α é uma fórmula essencialmente !-modal. Provamos esse Lema G.7 por indução em $l(\Pi)$. Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\alpha^{\perp j}\\ \Sigma_1\\ \perp\end{array}}{\alpha}\,\perp_{c(j)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_!$$

Π é reduzida pela redução 19 a uma dedução Π_1^* como segue:
$\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^k \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_! \qquad \beta^{\perp l}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\begin{array}{c}\alpha^\perp\\ \Sigma_1\\ \perp\end{array}}\,\mathrm{I}_{\perp(k)}}{\beta}\,\perp_{c(l)}$$

Como α é uma fórmula essencialmente !-modal, $\alpha^\perp$ é uma fórmula essencialmente ?-modal e portanto jamais poderia ser premissa intermediária de uma regra ou premissa maior de $\mathrm{C}_!$ ou $\mathrm{W}_!$. Dessa forma, se a ocorrência de fórmula $\alpha^\perp$ ilustrada acima for uma ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*, ela é premissa maior de uma aplicação de $\mathrm{E}_\perp$. Assim, temos um dos seguintes casos:

1. $\alpha^\perp$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*:

   Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_1^*$ e $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\alpha)$.

2. $\alpha^\perp$ é ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*:

   Nesse caso Π_1^* é da seguinte forma:

   $\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^k \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_! \qquad \beta^{\perp l}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(k)}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Sigma_{1.2}\\ \perp\end{array}}\,\mathrm{E}_\perp}{\beta}\,\perp_{c(l)}$$

   Π_1^* é reduzida pela redução 11 a uma dedução Π_2^* como segue:

   $\Pi_2^* \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{W}_! \qquad \beta^{\perp l}}{\begin{array}{c}\perp\\ \Sigma_{1.2}\\ \perp\end{array}}\,\mathrm{E}_\perp}{\beta}\,\perp_{c(l)}$$

   Temos um dos seguintes casos:

(a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_2^*$ e $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\alpha)$.

(b) α é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
Seja Π_3^* a subdedução de Π_2^* determinada pela ocorrência de β ilustrada acima que é conclusão de $W_!$. Podemos notar que $i(\Pi_3^*) = i(\Pi_2^*) = i(\alpha) = i(\Pi)$. Π_3^* é da seguinte forma:
$\Pi_3^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\ W_!$$

Como α é uma ocorrência de fórmula discordante, temos um dos seguintes casos:

i. α é conclusão de regra de introdução:
Nesse caso, Π_3^* é reduzida a uma dedução Π_4^* tal que $i(\Pi_4^*) < i(\Pi_3^*)$ pelo Lema G.5. Π' é da seguinte forma:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \dfrac{\Pi_4^* \quad \beta^{\perp\,l}}{\perp}\ E_\perp \\ \perp\end{array}}{\beta}\ \perp_{c(l)}$$

Logo, $i(\Pi') = i(\Pi_4^*) < i(\Pi) = i(\Pi_3^*)$.

ii. α é conclusão de $\perp_c$:
Nesse caso, como $l(\Pi_3^*) < l(\Pi)$, Π_3^* é reduzida a uma dedução Π_4^* tal que $i(\Pi_4^*) < i(\Pi_3^*)$ por hipótese de indução. Π' é da seguinte forma:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \dfrac{\Pi_4^* \quad \beta^{\perp\,l}}{\perp}\ E_\perp \\ \perp\end{array}}{\beta}\ \perp_{c(l)}$$

Logo, $i(\Pi') = i(\Pi_4^*) < i(\Pi) = i(\Pi_3^*)$.

iii. α é conclusão de $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ ou E_1:
Nesse caso, Π_3^* é reduzida a uma dedução Π_4^* tal que $i(\Pi_4^*) < i(\Pi_3^*)$ pelo Lema G.6. Π' é da seguinte forma:
$\Pi' \equiv$

$$\cfrac{\cfrac{\Pi_4^* \quad \beta^{\perp\, l}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.2}\\ \perp\end{matrix}}{\beta}\,\perp_{c(l)}}$$

Logo, $i(\Pi') = i(\Pi_4^*) < i(\Pi) = i(\Pi_3^*)$.

■

Lema G.8 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas dos tipos 2.(a), 2.(d) e 3.(a)) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \mid_{\overline{ndll}} !\beta$ *tal que* $z(\Pi) > 0$*,* $r(\Pi)$ *é uma aplicação de* $I_!$*,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são as premissas intermediárias de* $r(\Pi)$ *e todas as ocorrências de fórmulas máximas de* Π *são premissas de* $r(\Pi)$*. Então* Π *é reduzida a uma dedução* Π' *de* $\Gamma \mid_{\overline{ndll}} !\beta$ *tal que* $z(\Pi') < z(\Pi)$.

Provamos o Lema G.8 por indução em $l(\Pi)$.

Como $z(\Pi) > 0$, pelo menos uma das premissas intermediárias $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $r(\Pi)$ é uma ocorrência de fórmula discordante. Sejam $z(\Pi) = (p, q, m)$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ as ocorrências de fórmulas discordantes de Π tal que $i(\gamma_1) = \ldots = i(\gamma_m) = (p, q)$. Sem perda de generalidade, consideramos α_i para $1 \leq i \leq n$ a fórmula γ_1 e $\{\gamma_2, \ldots, \gamma_m\} \subseteq \{\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\}$.

Temos um dos seguintes casos dependendo de α_i:

1. α_i é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 2.(a):

   Nesse caso, α_i é conclusão de uma regra de introdução. Como α_i é uma fórmula essencialmente !-modal, temos os seguintes casos:

   (a) α_i é conclusão de I_1:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \cfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad 1^{j_i} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}$$

   Tal que $\gamma_1 = \alpha_i = 1$.

   Nesse caso, $p = 1$, $q = s(\alpha_i)$ e $z(\Pi) = (1, q, m)$.

   Π é reduzida pela redução 26 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \alpha_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{i-1} \\ \alpha_{i-1}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i+1} \\ \alpha_{i+1}\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n \\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_{i-1},j_{i+1},\dots,j_n)}$$

Temos os seguintes subcasos:

i. a ocorrência de fórmula 1 ilustrada acima não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (1, q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (1, q, m - 1) < z(\Pi) = (1, q, m)$.

ii. a ocorrência de fórmula 1 ilustrada acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha_i)$ em Π' é $q - 1$ e é menor que $s(\alpha_i)$ em Π, logo $i(\alpha_i)$ em Π' também é menor que (p, q), e conseqüentemente, o número de ocorrências de fórmulas discordantes em Π' de índice (p, q) é $m - 1$. Logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

(b) α_i é conclusão de $\mathrm{I}_\otimes$:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \alpha_1\end{matrix} \quad \dots \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{i.1} \\ \delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i.2} \\ \varphi\end{matrix}}{\delta \otimes \varphi}\,\mathrm{I}_\otimes \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n \\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \delta \otimes \varphi^{j_i} \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}$$

Tal que $\gamma_1 = \alpha_i = \delta \otimes \varphi$.
Nesse caso, $p = d_c(\delta \otimes \varphi)$ e $q = s(\alpha_i)$.
Π é reduzida pela redução 27 a uma dedução Π' como segue:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \alpha_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{i-1} \\ \alpha_{i-1}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i.1} \\ \delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i.2} \\ \varphi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i+1} \\ \alpha_{i+1}\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n \\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \dfrac{\delta^{k_1} \quad \varphi^{k_2}}{\delta \otimes \varphi}\,\mathrm{I}_\otimes \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_{i-1},k_1,k_2,j_{i+1},\dots,j_n)}$$

As ocorrências de δ e φ ilustradas acima que são premissas intermediárias podem ser ocorrência de fórmula discordante em Π', porém, como $d_c(\delta) < d_c(\delta \otimes \varphi)$ e $d_c(\varphi) < d_c(\delta \otimes \varphi)$, essas ocorrências de fórmulas discordantes não influenciam $z(\Pi')$.

Temos os seguintes subcasos:

i. a ocorrência de fórmula $\delta \otimes \varphi$ ilustrada acima não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\delta \otimes \varphi), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\delta \otimes \varphi), q, m - 1) < z(\Pi) = (d_c(\delta \otimes \varphi), q, m)$.

ii. a ocorrência de fórmula $\delta \otimes \varphi$ ilustrada acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha_i)$ em Π' é $q - 1$ e é menor que $s(\alpha_i)$ em Π, logo $i(\alpha_i)$ em Π' também é menor que (p, q), e conseqüentemente, o número de ocorrências de fórmulas discordantes em Π' de índice (p, q) é $m - 1$. Logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

(c) α_i é conclusão de $\mathrm{I}_!$:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \dots \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \varphi_1\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.d}\\ \varphi_d\end{array} \quad \begin{array}{c}\varphi_1^{k_1} \quad \dots \quad \varphi_d^{k_d}\\ \Sigma_{i.d+1}\\ \delta\end{array}}{!\delta}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\dots,k_d)} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad !\delta^{j_i} \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}$$

Tal que $\gamma_1 = \alpha_i = !\delta$.
Nesse caso, $p = d_c(!\delta)$ e $q = s(\alpha_i)$.
Π é reduzida pela redução 28 a uma dedução Π' como segue:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \dots \begin{array}{c}\Sigma_{i-1}\\ \alpha_{i-1}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \varphi_1\end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.d}\\ \varphi_d\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i+1}\\ \alpha_{i+1}\end{array} \dots \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \dots \dfrac{\varphi^{k_1} \quad \dots \quad \varphi^{k_d} \quad \begin{array}{c}\varphi_1^{l_1} \quad \dots \quad \varphi_d^{l_d}\\ \Sigma_{i.d+1}\\ \delta\end{array}}{!\delta}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\dots,l_d)} \dots \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_{i-1},k_1,\dots,k_d,j_{i+1},\dots,j_n)}$$

As ocorrências de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ ilustradas acima que são premissas intermediárias de $r(\Pi')$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π', pois, caso contrário, elas também seriam ocorrências de fórmulas discordantes em Π, mas essas ocorrências de fórmulas não são premissas de $r(\Pi)$ e não poderiam ser ocorrências de fórmulas discordantes em Π.

Temos os seguintes subcasos:

i. a ocorrência de fórmula $!\delta$ ilustrada acima não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0,0,0) < z(\Pi) = (d_c(!\delta), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(!\delta), q, m-1) < z(\Pi) = (d_c(!\delta), q, m)$.

ii. a ocorrência de fórmula $!\delta$ ilustrada acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha_i)$ em Π' é $q-1$ e é menor que $s(\alpha_i)$ em Π, logo $i(\alpha_i)$ em Π' também é menor que (p,q), e conseqüentemente, o número de ocorrências de fórmulas discordantes em Π' de índice (p,q) é $m-1$. Logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

(d) α_i é conclusão de $\mathrm{I}_\perp$:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{matrix} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{matrix}\delta^k\\ \Sigma_i\\ \perp\end{matrix}}{\delta^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(k)} \quad \ldots \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \;\ldots\; \delta^{\perp j_i} \;\ldots\; \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}$$

Tal que $\gamma_1 = \alpha_i = \delta^\perp$.

Nesse caso, $p = d_c(\delta^\perp)$ e $q = s(\alpha_i)$.

A ocorrência de hipótese δ^k é premissa de uma regra R. Como $\delta^\perp$ é uma fórmula essencialmente !-modal, δ é uma fórmula essencialmente ?-modal. Dessa forma, se δ^k for premissa maior de R, então R é $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{E}_\parr$ ou $\mathrm{E}_\perp$. Assim, temos uma das seguintes reduções dependendo de R e δ^k:

i. R é uma aplicação de regra de introdução ou δ^k é premissa menor de R:

Nesse caso, Π é reduzida pela redução 29.(a) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i-1}\\ \alpha_{i-1}\end{array} \quad \delta^{\perp l_1} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i+1}\\ \alpha_{i+1}\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \delta^{\perp j_i} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \qquad (!\beta)^{\perp l_2}}{\begin{array}{c}\dfrac{\perp}{\delta}\,\perp_{c(l_1)}\\ \Sigma_i\\ \dfrac{\perp}{!\beta}\,\perp_{c(l_2)}\end{array}}\,\mathrm{E}_\perp
$$

Temos os seguintes subcasos:

A. a ocorrência de fórmula δ ilustrada acima não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\delta^\perp), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\delta^\perp), q, m - 1) < z(\Pi) = (d_c(\delta^\perp), q, m)$.

B. a ocorrência de fórmula δ ilustrada acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, R é uma regra de introdução e δ é a premissa maior de R. Como $d_c(\delta) < d_c(\delta^\perp) =$ p, o número de ocorrências de fórmulas discordantes em Π' de índice (p, q) é $m - 1$. Logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

ii. R é uma aplicação de $\mathrm{E}_\perp$ e δ^k é a premissa maior de R, assim δ^k é da forma $\varphi^{\perp k}$:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \varphi\end{array} \quad \varphi^{\perp k}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_{i.2}\\ \perp\end{array}}{\varphi^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(k)} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \varphi^{\perp\perp j_i} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}
$$

Tal que $\gamma_1 = \alpha_i = \varphi^{\perp\perp}$.

Nesse caso, $p = d_c(\varphi^{\perp\perp})$ e $q = s(\alpha_i)$.

Nesse caso, Π é reduzida pela redução 29.(b) a uma dedução Π' como segue:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{ccccc}\Sigma_1 & \Sigma_{i-1} & \Sigma_{i.1} & \Sigma_{i+1} & \Sigma_n \\ \alpha_1 \ldots & \alpha_{i-1} & \varphi & \alpha_{i+1} & \ldots \alpha_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \dfrac{\dfrac{\varphi^{k_1} \quad \varphi^{\perp k_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\varphi^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(k_2)} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_{i-1},k_1,j_{i+1},j_n)} \qquad (!\beta)^{\perp k_3}}{\begin{array}{c}\perp \\ \Sigma_{i.2} \\ \dfrac{\perp}{!\beta}\,\perp_{c(k_3)}\end{array}}\,\mathrm{E}_\perp$$

A ocorrência de φ ilustrada acima que é premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$ pode ser ocorrência de fórmula discordante em Π'. O mesmo pode se dizer sobre a ocorrência de fórmula $\varphi^{\perp\perp}$ ilustrada acima. Dessa forma, temos os seguintes subcasos:

A. φ e $\varphi^{\perp\perp}$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\varphi^{\perp\perp}), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\varphi^{\perp\perp}), q, m - 1) < z(\Pi) = (d_c(\varphi^{\perp\perp}), q, m)$.

B. φ e/ou $\varphi^{\perp\perp}$ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, se φ for ocorrência de fórmula discordante em Π', $d_c(\varphi) < d_c(\varphi^{\perp\perp})$ e se $\varphi^{\perp\perp}$, por sua vez, for ocorrência de fórmula discordante em Π', $s(\varphi^{\perp\perp})$ em Π' é menor que $s(\varphi^{\perp\perp})$ em Π. Logo, mesmo no pior caso no qual tanto φ quanto $\varphi^{\perp\perp}$ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π', $z(\Pi') < z(\Pi)$.

iii. R é uma aplicação de $\mathrm{E}_{⅋}$ e δ^k é a premissa maior de R, assim δ^k é da forma $\varphi ⅋ \psi^k$:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array}
\quad \ldots \quad
\dfrac{
\begin{array}{c}
\dfrac{\varphi\parr\psi^{k} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \varphi^{\perp}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.2}\\ \psi^{\perp}\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}\\
\Sigma_{i.3}\\
\perp
\end{array}
}{\varphi\parr\psi^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(k)}
\quad \ldots \quad
\begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \varphi\parr\psi^{\perp j_i} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}
}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}
$$

Tal que $\gamma_1 = \alpha_i = \varphi\parr\psi^{\perp}$.
Nesse caso, $p = d_c(\varphi\parr\psi^{\perp})$ e $q = s(\alpha_i)$.
Nesse caso, Π é reduzida pela redução 29.(c) a uma dedução Π' como segue:
$\Pi' \equiv$

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array}\ldots
\begin{array}{c}\Sigma_{i-1}\\ \alpha_{i-1}\end{array}
\quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \varphi^{\perp}\end{array}
\quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.2}\\ \psi^{\perp}\end{array}
\quad \begin{array}{c}\Sigma_{i+1}\\ \alpha_{i+1}\end{array}\ldots
\begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\alpha_1^{j_1}\ldots \quad \dfrac{\dfrac{\varphi\parr\psi^{k_1} \quad \varphi^{\perp k_2} \quad \psi^{\perp k_3}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\varphi\parr\psi^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(k_1)} \quad \ldots\alpha_n^{j_n}\\
\Sigma_{n+1}\\
\beta
\end{array}
}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_{i-1},k_2,k_3,j_{i+1},j_n)}
\qquad (!\beta)^{\perp k_4}
}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}\\
\Sigma_{i.3}\\
\dfrac{\perp}{!\beta}\,\perp_{c(k_4)}
\end{array}
$$

As ocorrências de $\varphi^{\perp}$ e $\psi^{\perp}$ ilustradas acima que são premissas intermediárias de $\mathrm{I}_!$ podem ser ocorrências de fórmulas discordantes em Π'. O mesmo pode se dizer sobre a ocorrência de fórmula $\varphi\parr\psi^{\perp}$ ilustrada acima. Dessa forma, temos os seguintes subcasos:

A. $\varphi^{\perp}$, $\psi^{\perp}$ e $\varphi\parr\psi^{\perp}$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\varphi\parr\psi^{\perp}), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\varphi\parr\psi^{\perp}), q, m-1) < z(\Pi) = (d_c(\varphi\parr\psi^{\perp}), q, m)$.

B. $\varphi^{\perp}$, $\psi^{\perp}$ e/ou $\varphi\parr\psi^{\perp}$ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, se $\varphi^{\perp}$ for ocorrência de fórmula discordante em Π', $d_c(\varphi^{\perp}) < d_c(\varphi\parr\psi^{\perp})$, se $\psi^{\perp}$ for ocorrência de fórmula discordante em Π', $d_c(\psi^{\perp}) < d_c(\varphi\parr\psi^{\perp})$ e se $\varphi\parr\psi^{\perp}$,

por sua vez, for ocorrência de fórmula discordante em Π', $s(\varphi \parr \psi^\perp)$ em Π' é menor que $s(\varphi \parr \psi^\perp)$ em Π. Logo, mesmo no pior caso no qual tanto $\varphi \parr \psi^\perp$ quanto $\varphi^\perp$ e $\psi^\perp$ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π', $z(\Pi') < z(\Pi)$.

iv. $\boldsymbol{R}$ é uma aplicação de $\mathrm{E}_?$ e δ^k é a premissa maior de $\boldsymbol{R}$, assim δ^k é da forma $?\varphi^k$:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\ldots\end{array}\quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{?\varphi^k \quad \begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \psi_1\end{array}\ldots\begin{array}{c}\Sigma_{i.d}\\ \psi_d\end{array}\quad \begin{array}{c}\psi_1^{l_1}\ldots\ \psi_d^{l_d}\varphi^{l_{d+1}}\\ \Sigma_{i.d+1}\\ \pi\end{array}}{\pi}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\ldots,l_{d+1})}\\ \Sigma_{i.d+2}\\ \bot\end{array}}{(?\varphi)^\bot}\,\mathrm{I}_{\bot(k)} \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \ldots\alpha_n\end{array}\quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ldots(?\varphi)^{\bot j_i}\ldots\alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}
$$

Tal que $\gamma_1 = \alpha_i = (?\varphi)^\perp$.
Nesse caso, $p = d_c((?\varphi)^\perp)$ e $q = s(\alpha_i)$.
Nesse caso, Π é reduzida pela redução 29.(d) a uma dedução Π' como segue:

$$\Pi' \equiv$$

$$
\cfrac{
\cfrac{\Sigma_1}{\alpha_1} \quad \ldots \quad \cfrac{\Sigma_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \quad \cfrac{\Sigma_{i.1}}{\psi_1} \quad \ldots \quad \cfrac{\Sigma_{i.d}}{\psi_d} \quad \cfrac{\Sigma_{i+1}}{\alpha_{i+1}} \quad \ldots \quad \cfrac{\Sigma_n}{\alpha_n} \quad \pi^{\perp^{k_1}} \quad
\begin{matrix}
 & \cfrac{\cfrac{\cfrac{?\varphi^{k_2} \quad \psi_1^{k_3} \ldots \psi_d^{k_{d+2}} \quad \begin{matrix}\psi_1^{l_1} \ldots \psi_d^{l_d} \quad \varphi^{l_{d+1}} \\ \Sigma_{i.d+1} \\ \pi\end{matrix}}{\pi}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\ldots,l_{d+1})} \quad \pi^{\perp^{k_{d+3}}}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{(?\varphi)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(k_2)} & \\
\alpha_1^{j_1} \ldots & & \ldots \alpha_n^{j_n} \\
 & \Sigma_{n+1} & \\
 & \beta &
\end{matrix}
}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_{i-1},k_3,\ldots,k_{d+3},j_{i+1},\ldots,j_n)} \quad (!\beta)^{\perp^{k_{d+4}}}
}{
\begin{matrix}
\cfrac{\perp}{\pi}\,\perp_{ck_1} \\
\Sigma_{i.d+2} \\
\cfrac{\perp}{!\beta}\,\perp_{ck_{d+4}}
\end{matrix}
}\,\mathrm{E}\perp
$$

A ocorrência de π ilustrada acima que é conclusão de $\perp_c$ não pode ser premissa intermediária em Π' porque π é uma fórmula essencialmente ?-modal. Essa mesma ocorrência de π também não pode ser premissa maior em Π' pois, em Π, π é conclusão de $E_?$ e se fosse premissa maior de alguma regra também seria ocorrência de fórmula discordante em Π, mas π não é premissa de $r(\Pi)$ e, logo, não poderia ser uma ocorrência de fórmula discordante em Π.

As ocorrências de fórmulas $\psi_1, \ldots, \psi_d$ ilustradas acima que são premissas intermediárias de $I_!$ não podem ser ocorrências de fórmulas discordantes em Π', pois, caso contrários, essas fórmulas também seriam ocorrências de fórmulas discordantes em Π. Como em Π essas fórmulas não são premissas de $r(\Pi)$, elas não poderia ser ocorrências de fórmulas discordantes.

A ocorrência de fórmula $(?\varphi)^\perp$ ilustrada acima pode ser discordante em Π'. Dessa forma, temos os seguintes subcasos:

A. a ocorrência de fórmula $(?\varphi)^\perp$ ilustrada acima não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c((?\varphi)^\perp), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c((?\varphi)^\perp), q, m-1) < z(\Pi) = (d_c((?\varphi)^\perp), q, m)$.

B. a ocorrência de fórmula $(?\varphi)^\perp$ ilustrada acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha_i)$ em Π' é $q-1$ e é menor que $s(\alpha_i)$ em Π, logo $i(\alpha_i)$ em Π' também é menor que (p, q), e conseqüentemente, o número de ocorrências de fórmulas discordantes em Π' de índice (p, q) é $m-1$. Logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

2. α_i é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 2.(d):

   Nesse caso, α_i é conclusão de $\perp_c$ e Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{array}{c}{\alpha_i^{\perp}}^{k}\\ \Sigma_i\\ \perp\end{array}}{\alpha_i}\perp_{c(k)} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta} I_{!(j_1,\ldots,j_n)}
$$

   Nesse caso, $p = d_c(\alpha_i)$ e $q = s(\alpha_i)$.

Nesse caso, Π é reduzida pela redução 20 a uma dedução Π_1^* como segue:

$\Pi_1^* \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_{i-1}\\ \alpha_{i-1}\end{array}\quad \alpha_i{}^{l_1}\quad \begin{array}{c}\Sigma_{i+1}\\ \alpha_{i+1}\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ \dots\ \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}\qquad (!\beta)^{\perp\, l_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha_i^\perp}\,\perp_{c(l_1)}\\ \Sigma_i\\ \perp\end{array}}{!\beta}\,\perp_{c(l_2)}
$$

Temos os seguintes casos:

(a) $\alpha_i^\perp$ não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*:
Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_1^*$. Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\alpha_i), q, m - 1) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, m)$.

(b) $\alpha_i^\perp$ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*:
Como α_i é uma fórmula essencialmente !-modal, $\alpha_i^\perp$ é uma fórmula essencialmente ?-modal. Logo, $\alpha_i^\perp$ não pode ser premissa intermediária de qualquer regra. Por ser ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*, $\alpha_i^\perp$ é premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$ e Π_1^* é da seguinte forma:

$\Pi_1^* \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \alpha_i\end{array}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_{i-1}\\ \alpha_{i-1}\end{array}\quad \alpha_i{}^{l_1}\quad \begin{array}{c}\Sigma_{i+1}\\ \alpha_{i+1}\end{array}\ \dots\ \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array}\qquad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ \dots\ \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}\qquad (!\beta)^{\perp\, l_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha_i^\perp}\,\perp_{c(l_1)}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_{i.2}\\ \perp\end{array}}{!\beta}\,\perp_{c(l_2)}
$$

Nesse caso, Π_1^* é reduzida pela redução 11 a uma dedução Π_2^* como segue:
$\Pi_2^* \equiv$

$$\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{i-1}\\ \alpha_{i-1}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i.1}\\ \alpha_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i+1}\\ \alpha_{i+1}\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)} \qquad (!\beta)^{\perp l_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp \\ \Sigma_{i.2} \\ \dfrac{\perp}{!\beta}\,\perp_{c(l_2)}\end{matrix}$$

Seja Π_3^* a subdedução de Π_2^* determinda pela ocorrência de $!\beta$ ilustrada acima que é conclusão de $\mathrm{I}_!$. Π_3^* é da seguinte forma:
$\Pi_3^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{i-1}\\ \alpha_{i-1}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i.1}\\ \alpha_i\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i+1}\\ \alpha_{i+1}\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}$$

A ocorrência de fórmula α_i ilustrada acima não pode ser conclusão de uma aplicação da regra $\perp_c$, pois, caso contrário, em Π essa ocorrência de α_i seria uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e), mas essa ocorrência de α_i em Π não é premissa de $r(\Pi)$ e não poderia ser ocorrência de fórmula máxima em Π.

A ocorrência de fórmula α_i ilustrada acima não pode ser conclusão de uma aplicação da regra $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, pois, caso contrário, em Π essa ocorrência de α_i seria uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 4.(c), mas essa ocorrência de α_i em Π não é premissa de $r(\Pi)$ e não poderia ser ocorrência de fórmula máxima em Π.

Logo, se a ocorrência de α_i ilustrada acima for ocorrência de fórmula discordante em Π_3^*, ela é conclusão de uma regra de introdução. Portanto, $s(\alpha_i)$ em Π_3^* é menor ou igual a $s(\alpha_i)$ em Π e $z(\Pi_3^*) \leq z(\Pi)$. Temos um dos seguinte casos:

i. α_i não é ocorrência de fórmula discordante em Π_3^*:
Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_2^*$. Se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\alpha_i), q, m - 1) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, m)$.

ii. α_i é ocorrência de fórmula discordante em Π_3^*:
Nesse caso, como $l(\Pi_3^*) < l(\Pi)$, por hipótese de indução Π_3^* é reduzida a uma dedução Π_4^* tal que $z(\Pi_4^*) < z(\Pi_3^*) \leq z(\Pi)$. Π' é a dedução obtida pela substituição em Π_2^* da subdedução Π_3^* por Π_4^*:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Pi_4^* \quad (!\beta)^{\perp l_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp \\ \Sigma_{i.2} \\ \perp\end{matrix}}{!\beta}\,\perp_{c(l_2)}}{}$$

Podemos notar que $z(\Pi') = z(\Pi_4^*) < z(\Pi_3^*) \leq z(\Pi)$.

3. α_i é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 3.(a):

Nesse caso, α_i é conclusão de uma regra $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1. Logo, temos os seguintes casos:

(a) α_i é conclusão de $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \alpha_1\end{matrix} \quad \dots \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{i.1} \\ \delta\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_{i.2} \\ \alpha_i\end{matrix}}{\alpha_i}\,R \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n \\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}$$

Tal que R é $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1 e δ é a premissa maior de R.
Nesse caso, $p = d_c(\alpha_i)$ e $q = s(\alpha_i)$.
Nesse caso, Π é reduzida pela redução 15 a uma dedução Π' como segue:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{i.1} \\ \delta\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \alpha_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{i.2} \\ \alpha_i\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n \\ \alpha_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\alpha_1^{j_1} \quad \dots \quad \alpha_n^{j_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \beta\end{matrix}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\dots,j_n)}}{!\beta}\,R$$

Temos os seguintes casos:

i. α_i não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\alpha_i), q, m-1) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, m)$.

ii. α_i é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha_i)$ em Π' é $q - 1$ e é menor que $s(\alpha_i)$ em Π, logo $i(\alpha_i)$ em Π' também é menor que (p, q), e conseqüentemente, o número de ocorrências de fórmulas discordantes em Π' de índice (p, q) é $m - 1$. Logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

(b) α_i é conclusão de $\mathrm{E}_\oplus$:
Nesse caso, Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\end{array} \quad \ldots \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \delta\oplus\psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{l_1\ldots l_d} \quad \delta^{k_1}\\ \Sigma_{i.2}\\ \alpha_i\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{l_1\ldots l_d} \quad \psi^{k_2}\\ \Sigma_{i.3}\\ \alpha_i\end{array}}{\alpha_i}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1} \quad \ldots \quad \alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}$$

Nesse caso, $p = d_c(\alpha_i)$ e $q = s(\alpha_i)$.
Nesse caso, Π é reduzida pela redução 16 a uma dedução Π' como segue:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{i.1}\\ \delta\oplus\psi\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\ldots\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{l_1\ldots l_d}\delta^{k_1}\\ \Sigma_{i.2}\\ \alpha_i\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \ldots\alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \alpha_1\ldots\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{l_1\ldots l_d}\delta^{k_2}\\ \Sigma_{i.3}\\ \alpha_i\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \ldots\alpha_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha_1^{j_1}\ldots\alpha_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \beta\end{array}}{!\beta}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)}}{!\beta}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

Temos os seguintes casos:

i. as ocorrências de fórmulas da forma α_i não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, se $\gamma_1 = \alpha_i$ é a única ocorrência de fórmula discordante de Π, ou seja $m = 1$, então $z(\Pi') = (0, 0, 0) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, 1)$. Caso contrário, se $m > 1$, então $z(\Pi') = (d_c(\alpha_i), q, m-1) < z(\Pi) = (d_c(\alpha_i), q, m)$.

ii. pelo menos uma das ocorrências de fórmulas da forma α_i é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha_i)$ de ambas ocorrências de α_i em Π' é menor que $s(\alpha_i)$ em Π, logo $i(\alpha_i)$ em Π' também é menor que (p, q), e conseqüentemente, o número de ocorrências de fórmulas discordantes em Π' de índice (p, q) é $m - 1$. Logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

■

Lema G.9 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas dos tipos 2.(b), 2.(e) e 3.(b)) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *tal que* $z(\Pi) > 0$*,* $r(\Pi)$ *é uma aplicação de* $E_?$*,* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são as premissas intermediárias de* $r(\Pi)$ *e todas as ocorrências de fórmulas máximas de* Π *são premissas intermediárias de* $r(\Pi)$*. Então* Π *é reduzida a uma dedução* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *tal que* $z(\Pi') < z(\Pi)$*.*

A demonstração desse Lema G.9 é similar a demonstração do Lema G.8.

■

Lema G.10 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 2.(c)) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *e* α *a única ocorrência de fórmula máxima de* Π *tal que* α *é uma premissa de* $r(\Pi)$ *e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 2.(c). Então* Π *é reduzida a uma dedução* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *tal que* $i(\Pi') < i(\Pi)$*.*

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$, $r(\Pi)$ é $\mathrm{C}_!$ e α, a premissa maior de $r(\Pi)$, é uma fórmula essencialmente !-modal. Temos um dos seguintes casos dependendo de α:

1. α é 1:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \qquad \begin{array}{c} 1^k \quad 1^k \\ \Sigma \\ \beta \end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(1) = (1, s(1))$.

   Π é reduzida pela redução 34 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \quad \dfrac{}{1}\,\mathrm{I}_1 \\ \Sigma \\ \beta \end{array}$$

Temos os seguintes subcasos:

(a) as ocorrências de fórmulas 1 ilustrada acima não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':

Então $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = (1, s(1))$.

(b) pelo menos uma das ocorrências de fórmulas 1 ilustradas acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':

Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha)$ em Π' é menor que $s(\alpha)$ em Π, logo $i(\alpha)$ em Π' também é menor que $i(\alpha)$ em Π, e conseqüentemente, $i(\Pi') < i(\Pi)$.

2. α é da forma $\gamma \otimes \delta$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \gamma & \delta\end{array}}{\gamma \otimes \delta}\,\mathrm{I}_\otimes \qquad \begin{array}{c} \gamma \otimes \delta^k \quad \gamma \otimes \delta^k \\ \Sigma_3 \\ \beta \end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

Π é reduzida pela redução 35 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \gamma\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \delta\end{array} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{\gamma^{k_1} \quad \delta^{k_2}}{\gamma \otimes \delta}\,\mathrm{I}_\otimes \quad \dfrac{\gamma^{k_1} \quad \delta^{k_2}}{\gamma \otimes \delta}\,\mathrm{I}_\otimes \\ \Sigma_3 \\ \beta \end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_2)}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_1)}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

(a) γ, δ e as ocorrências de fórmulas $\gamma \otimes \delta$ ilustradas acima não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':

Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\gamma \otimes \delta)$.

(b) γ, δ e/ou as ocorrências de fórmulas $\gamma \otimes \delta$ ilustradas acima são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':

Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(\gamma \otimes \delta)$, $d_c(\delta) < d_c(\gamma \otimes \delta)$ e $s(\gamma \otimes \delta)$ em Π' é menor que $s(\gamma \otimes \delta)$ em Π, $i(\Pi') < i(\Pi)$.

3. α é da forma $!\gamma$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \delta_1\end{matrix}\quad \cdots \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \delta_n\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\delta_1^{j_1}\ \ \cdots\ \ \delta_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \gamma\end{matrix}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \qquad \begin{matrix}!\gamma^k\ \ \ !\gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(!\gamma)$.

Como, em Π, $!\gamma$ é a única ocorrência de fórmula máxima, então nenhuma da premissas intermediárias $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ilustradas acima pode ser conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\bot_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ e E_1.

Π é reduzida pela redução 36 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \delta_1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_n\\ \delta_n\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\dfrac{\delta_1^{k_1}\ \cdots\ \delta_n^{k_n}\qquad \begin{matrix}\delta_1^{j_1}\ \ \cdots\ \ \delta_n^{j_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \gamma\end{matrix}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(j_1,\ldots,j_n)} \quad \dfrac{\delta_1^{k_1}\ \cdots\ \delta_n^{k_n}\qquad \begin{matrix}\delta_1^{l_1}\ \ \cdots\ \ \delta_n^{l_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \gamma\end{matrix}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(l_1,\ldots,l_n)}\\ \Sigma_{n+2}\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_n)}\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_1)}$$

Como as ocorrências de fórmulas $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ilustradas acima não são conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras

$\perp_c$, $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ e E_1, então $\delta_1, \ldots, \delta_n$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π'.

Temos os seguintes subcasos:

(a) as ocorrências de fórmulas $!\gamma$ ilustradas acima não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':

Então $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = (d_c(!\gamma), s(\gamma))$.

(b) pelo menos uma das ocorrências de fórmulas $!\gamma$ ilustradas acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':

Nesse caso, podemos notar que $s(\alpha)$ em Π' é menor que $s(\alpha)$ em Π, logo $i(\alpha)$ em Π' também é menor que $i(\alpha)$ em Π, e conseqüentemente, $i(\Pi') < i(\Pi)$.

4. α é da forma $\gamma^\perp$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\gamma^j\\ \Sigma_1\\ \perp\end{matrix}}{\gamma^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{matrix}\gamma^{\perp k} \quad \gamma^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\gamma^\perp)$.

A ocorrência de hipótese γ^j é premissa de uma regra R. Como $\gamma^\perp$ é uma fórmula essencialmente !-modal, γ é uma fórmula essencialmente ?-modal. Dessa forma, se γ^j for a premissa maior de R, então R é $E_?$, $E_⅋$ ou $E_\perp$. Assim, temos uma das seguintes reduções dependendo de R e γ^j:

(a) R é uma aplicação de regra de introdução ou γ^j é premissa menor de R:

Nesse caso, Π é reduzida pela redução 37.(a) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma^{\perp j_1} \qquad \begin{array}{c}\gamma^{\perp k} \quad \gamma^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)} \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\gamma}\,\perp_{c(j_1)}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\end{array}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

i. γ não é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\gamma^{\perp})$.

ii. γ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, como $d_c(\gamma) < d_c(\gamma^{\perp})$ podemos notar que $i(\Pi') = i(\gamma) < i(\Pi) = i(\gamma^{\perp})$.

(b) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_{\perp}$ e γ^j é a premissa maior de R, assim γ^j é da forma $\delta^{\perp j}$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta\end{array} \quad \delta^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}\\ \Sigma_{1.2}\\ \perp\end{array}}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}\delta^{\perp\perp k} \quad \delta^{\perp\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i(\delta^{\perp\perp})$.

Π é reduzida pela redução 37.(b) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\delta^{k} \quad \delta^{\perp l_1}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_1)} \quad \dfrac{\dfrac{\delta^{k} \quad \delta^{\perp l_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_2)}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)} \qquad \beta^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}\\ \Sigma_{1.2}\\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j)}\end{array}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

i. δ e as ocorrências de $\delta^{\perp\perp}$ ilustradas acima não são ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\gamma^{\perp}) = i(\delta^{\perp\perp})$.

ii. δ e/ou pelo menos uma das ocorrências de $\delta^{\perp\perp}$ ilustradas acima são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, como $d_c(\delta) < d_c(\delta^{\perp\perp}) = d_c(\gamma^{\perp})$ e $s(\delta^{\perp\perp})$ em Π' é menor que $s(\delta^{\perp\perp})$ em Π, logo $i(\Pi') < i(\Pi)$.

(c) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_{\parr}$ e γ^{j} é a premissa maior de R, assim γ^{j} é da forma $\delta\parr\varphi^{j}$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\delta\parr\varphi^{j} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta^{\perp}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \varphi^{\perp}\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}\\ \Sigma_{1.3}\\ \perp\end{array}}{(\delta\parr\varphi)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}(\delta\parr\varphi)^{\perp k} \quad (\delta\parr\varphi)^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i((\delta\parr\varphi)^{\perp})$.

Π é reduzida pela redução 37.(c) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \delta^{\perp}\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.2}\\ \varphi^{\perp}\end{array} \quad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\delta\parr\varphi^{l_1} \quad \delta^{\perp k_1} \quad \varphi^{\perp k_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}}{(\delta\parr\varphi)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_1)} \quad \dfrac{\dfrac{\delta\parr\varphi^{l_2} \quad \delta^{\perp k_1} \quad \varphi^{\perp k_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\parr}}{(\delta\parr\varphi)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l_2)}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_2)}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_1)}\end{array} \quad \beta^{\perp j}}{\dfrac{\begin{array}{c}\perp\\ \Sigma_{1.3}\\ \perp\end{array}}{\beta}\,\perp_{c(j)}}\,\mathrm{E}_{\perp}$$

Então, temos um dos seguintes casos:

i. $\delta^{\perp}$, $\varphi^{\perp}$ e as ocorrências de $(\delta\parr\varphi)^{\perp}$ ilustradas acima não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\gamma^{\perp})$.

ii. $\delta^\perp$, $\varphi^\perp$ e/ou pelo menos uma das ocorrências de $(\delta \parr \varphi)^\perp$ ilustradas acima são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
Nesse caso, como $d_c(\delta^\perp) < d_c((\delta \parr \varphi)^\perp)$, $d_c(\varphi^\perp) < d_c((\delta \parr \varphi)^\perp)$ e $s(\varphi \parr \psi^\perp)$ em Π' é menor que $s(\varphi \parr \psi^\perp)$ em Π, então $i(\Pi') < i(\Pi)$.

(d) R é uma aplicação de $\mathrm{E}_?$ e γ^j é a premissa maior de R, assim γ^j é da forma $?\delta^j$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{?\delta^j \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.1}\\ \varphi_1\end{matrix} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_{1.n}\\ \varphi_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\varphi_1^{l_1} \ \dots \ \varphi_n^{l_n} \ \ \delta^{l_{n+1}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(l_1,\dots,l_{n+1})}\\ \Sigma_{1.(n+2)}\\ \bot\end{matrix}}{(?\delta)^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{matrix}(?\delta)^{\perp k} \quad (?\delta)^{\perp k}\\ \Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

Nesse caso, $i(\Pi) = i((?\delta)^\perp)$.

Como, em Π, $(?\delta)^\perp$ é a única ocorrência de fórmula máxima, então nenhuma da premissas intermediárias $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ilustradas acima pode ser conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ e E_1.

Como, em Π, $(?\delta)^\perp$ é a única ocorrência de fórmula máxima e ψ é uma fórmula essencialmente ?-modal, a conclusão ψ de $\mathrm{E}_?$ ilustrada acima não pode ser premissa maior ou intermediária de uma regra.

Π é reduzida pela redução 37.(d) a uma dedução Π' como segue:

$$
\Pi' \equiv
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \varphi_1\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\dfrac{
\begin{array}{c}\Sigma_{1.n}\\ \varphi_n\end{array}
\qquad
\dfrac{
\psi^{\perp j_3}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
?\delta^{j_1} \quad \varphi_1^{k_1} \quad \dots \quad \varphi_n^{k_n} \quad
\begin{array}{c}\varphi_1^{l_{1.1}} \quad \dots \quad \varphi_n^{l_{1.n}} \quad \delta^{l_{1.n+1}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{array}
}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(l_{1.1},\dots,l_{1.n+1})}
\quad \psi^{\perp k_{n+1}}
}{
\dfrac{\perp}{(?\delta)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}
}\,\mathrm{E}_{\perp}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
?\delta^{j_2} \quad \varphi_1^{k_1} \quad \dots \quad \varphi_n^{k_n} \quad
\begin{array}{c}\varphi_1^{l_{2.1}} \quad \dots \quad \varphi_n^{l_{2.n}} \quad \delta^{l_{2.n+1}}\\ \Sigma_{1.(n+1)}\\ \psi\end{array}
}{\psi}\,\mathrm{E}_{?(l_{2.1},\dots,l_{2.n+1})}
\quad \psi^{\perp k_{n+1}}
}{
\dfrac{\perp}{(?\delta)^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_2)}
}\,\mathrm{E}_{\perp}
\quad
\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \beta\end{array}
}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_{n+1})}
}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_n)}
\\ \vdots \\ \beta
\end{array}
}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k_1)}
\qquad \beta^{\perp j_4}
}{
\begin{array}{c}
\dfrac{\perp}{\psi}\,\perp_{c(j_3)}\\
\Sigma_{1.(n+2)}\\
\dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_4)}
\end{array}
}\,\mathrm{E}_{\perp}
$$

Como a ocorrência de fórmula ψ ilustrada acima não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra e as ocorrências de fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ilustradas acima não são conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\bot_c$, $E_{\otimes}$, $E_{\oplus}$, $E_{\exists}$, $C_!$, $W_!$ e E_1, então temos os seguintes casos:

i. as ocorrências de fórmulas $(?\delta)^{\perp}$ ilustradas acima não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':
   Então $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = (d_c(!\gamma), s(\gamma))$.

ii. pelo menos uma das ocorrências de fórmulas $(?\delta)^{\perp}$ ilustradas acima é uma ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, podemos notar que $s((?\delta)^{\perp})$ em Π' é menor que $s((?\delta)^{\perp})$ em Π, logo $i((?\delta)^{\perp})$ em Π' também é menor que $i((?\delta)^{\perp})$ em Π, e conseqüentemente, $i(\Pi') < i(\Pi)$.

■

Lema G.11 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 3.(c)) *Seja Π uma dedução de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ e α a única ocorrência de fórmula máxima de Π tal que α é uma premissa de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 3.(c). Então Π é reduzida a uma dedução Π' de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.*

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$, $r(\Pi)$ é $C_!$ e α, a premissa maior de $r(\Pi)$, é uma fórmula essencialmente !-modal e é conseqüencia de uma aplicação da regra $E_{\otimes}$, $E_{\oplus}$, $E_{\exists}$, $C_!$, $W_!$ ou E_1.

Como α é uma fórmula essencialmente !-modal, $d_c(\alpha) > 0$ e $i(\alpha) > (0, 0)$. Sem perda de generalidade, consideramos $i(\alpha) = (p, q)$.

Seja R a regra da qual α é conclusão. Logo, temos um dos seguintes casos dependendo de R:

1. R é $E_{\otimes}$, $E_{\exists}$, $C_!$, $W_!$ ou E_1:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \alpha\end{matrix}}{\alpha}\, R \qquad \begin{matrix}\alpha^k \quad \alpha^k \\ \Sigma_3 \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\, C_{!(k)}$$

   Tal que γ é a premissa maior de R.

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha) = (p, q)$.

Π é reduzida pela redução 12 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \alpha^k\\ \Sigma_3\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}}{\beta}\,R$$

Temos um dos seguintes casos:

(a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(p, q)$.

(b) α é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Podemos notar que $s(\alpha)$ em Π' é menor que $s(\alpha)$ em Π. Logo, $i(\alpha)$ em Π' é menor que $i(\alpha)$ em Π e $i(\Pi') < i(\Pi)$.

2. R é $\mathrm{E}_\oplus$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\oplus\delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \gamma^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \delta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \qquad \begin{array}{c}\alpha^l \quad \alpha^l\\ \Sigma_4\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(l)}$$

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha) = (p, q)$.

Π é reduzida pela redução 13 a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\oplus\delta\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \gamma^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha^{l_1} \quad \alpha^{l_1}\\ \Sigma_4\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(l_1)} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \delta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\alpha^{l_2} \quad \alpha^{l_2}\\ \Sigma_4\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(l_2)}}{\beta}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

Temos um dos seguintes casos:

(a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(p,q)$.

(b) pelo menos uma das ocorrências de α é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Podemos notar que $s(\alpha)$ em Π' é menor do que $s(\alpha)$ em Π. Logo, $i(\Pi') < i(\Pi)$.

■

Lema G.12 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 2.(f)) *Seja Π uma dedução de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ e α a única ocorrência de fórmula máxima de Π tal que α é uma premissa de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 2.(f). Então Π é reduzida a uma dedução Π' de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$.*

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$, $r(\Pi)$ é $C_!$, α é conclusão de uma aplicação da regra $\perp_c$ e $d_c(\alpha) > 0$, pois α é uma fórmula essencialmente !-modal. Provamos esse Lema G.12 por indução em $l(\Pi)$. Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\alpha^{\perp j}\\ \Sigma_1\\ \perp\end{matrix}}{\alpha}\perp_{c(j)} \qquad \begin{matrix}\alpha^k \quad \alpha^k\\ \Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,C_{!(k)}$$

Π é reduzida pela redução 19 a uma dedução Π_1^* como segue:
$\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\alpha^{j_1} \qquad \begin{matrix}\alpha^k \quad \alpha^k\\ \Sigma_2\\ \beta\end{matrix}}{\beta}\,C_{!(k)} \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,E_\perp\\ \dfrac{}{\alpha^\perp}\,I_{\perp(j_1)}\\ \Sigma_1\\ \perp\end{matrix}}{\beta}\perp_{c(j_2)}$$

Como α é uma fórmula essencialmente !-modal, $\alpha^\perp$ é uma fórmula essencialmente ?-modal e portanto jamais poderia ser premissa intermediária de uma regra ou premissa maior de $C_!$ ou $W_!$. Dessa forma, se a ocorrência de fórmula $\alpha^\perp$ ilustrada acima for uma ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*, ela é premissa maior de uma aplicação de $E_\perp$. Assim, temos um dos seguintes casos:

1. $\alpha^\perp$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*:
   Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_1^*$ e $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\alpha)$.

2. $\alpha^\perp$ é ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*:
   Nesse caso Π_1^* é da seguinte forma:
   $\Pi_1^* \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha^{j_1} \qquad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \alpha^k\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)} \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_{1.2}\\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\end{array}$$

   Π_1^* é reduzida pela redução 11 a uma dedução Π_2^* como segue:
   $\Pi_2^* \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \alpha^k\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)} \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_{1.2}\\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\end{array}$$

   Temos um dos seguintes casos:

   (a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
   Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_2^*$ e $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\alpha)$.

   (b) α é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
   Seja Π_3^* a subdedução de Π_2^* determinada pela ocorrência de β ilustrada acima que é conclusão de $\mathrm{C}_!$. Podemos notar que $i(\Pi_3^*) = i(\Pi_2^*) = i(\alpha) = i(\Pi)$. Π_3^* é da seguinte forma:
   $\Pi_3^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\alpha^k \quad \alpha^k\\ \Sigma_2\\ \beta\end{array}}{\beta}\,\mathrm{C}_{!(k)}$$

Como α é uma ocorrência de fórmula discordante, temos um dos seguintes casos:

i. α é conclusão de regra de introdução:
Nesse caso, Π_3^* é reduzida a uma dedução Π_4^* tal que $i(\Pi_4^*) < i(\Pi_3^*)$ pelo Lema G.10. Π' é da seguinte forma:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_4^* \quad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,E_\perp}{\dfrac{\Sigma_{1.2}}{\dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}}}}{}$$

Logo, $i(\Pi') = i(\Pi_4^*) < i(\Pi) = i(\Pi_3^*)$.

ii. α é conclusão de $\perp_c$:
Nesse caso, como $l(\Pi_3^*) < l(\Pi)$, Π_3^* é reduzida a uma dedução Π_4^* tal que $i(\Pi_4^*) < i(\Pi_3^*)$ por hipótese de indução. Π' é da seguinte forma:
$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Pi_4^* \quad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,E_\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)} \end{array}$$

Logo, $i(\Pi') = i(\Pi_4^*) < i(\Pi) = i(\Pi_3^*)$.

iii. α é conclusão de $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ ou E_1:
Nesse caso, Π_3^* é reduzida a uma dedução Π_4^* tal que $i(\Pi_4^*) < i(\Pi_3^*)$ pelo Lema G.11. Π' é da seguinte forma:
$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Pi_4^* \quad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,E_\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)} \end{array}$$

Logo, $i(\Pi') = i(\Pi_4^*) < i(\Pi) = i(\Pi_3^*)$.

■

Lema G.13 (Lema sobre ocorrências de fórmulas máximas do tipo 4.(a)) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *e* α *a única ocorrência de fórmula máxima* *de* Π *tal que* α *é uma premissa de* $r(\Pi)$ *e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 4.(a). Então* Π *é reduzida a uma dedução* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ *tal que* $i(\Pi') < i(\Pi)$.

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha)$, $r(\Pi)$ é uma regra de eliminação R_1 e α, a premissa maior de $r(\Pi)$, é conseqüencia de uma aplicação da regra $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $E_?$, $C_!$, $W_!$ ou E_1.

Como α é uma premissa maior de regra de eliminação, $d_c(\alpha) > 0$ e $i(\alpha) > (0, 0)$. Sem perda de generalidade, consideramos $i(\alpha) = (p, q)$.

Seja R_2 a regra da qual α é conclusão. Logo, temos um dos seguintes casos dependendo de R_2:

1. R_2 é $E_\otimes$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ ou E_1:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \alpha\end{matrix}}{\alpha} R_2 \quad \Sigma_3}{\beta} R_1$$

   Tal que γ é a premissa maior de R_2.

   Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha) = (p, q)$.

   Π é reduzida pela redução 12 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \gamma\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2 \\ \alpha\end{matrix} \quad \Sigma_3}{\beta} R_1}{\beta} R_2$$

   Temos um dos seguintes casos:

   (a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(p, q)$.

   (b) α é ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Podemos notar que a propagação de α em Π' é igual a $q - 1$ e portanto menor que a propagação de α em Π. Logo, $i(\alpha)$ em Π' é $(p, q - 1)$ e $i(\Pi') = (p, q - 1) < i(\Pi) = (p, q)$.

2. R_2 é $\mathrm{E}_{\oplus}$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\oplus\delta\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \gamma^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \delta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\ldots l_n}\\ \Sigma_4\end{array}}{\beta}\,R_1$$

   Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha) = (p, q)$.

   Π é reduzida pela redução 13 a uma dedução Π' como segue:

   $\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma\oplus\delta\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \gamma^{k_1}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\ldots l_n}\\ \Sigma_4\end{array}}{\beta}\,R_1 \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1^{j_1\ldots j_n}\ \delta^{k_2}\\ \Sigma_3\\ \alpha\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2^{l_1\ldots l_n}\\ \Sigma_4\end{array}}{\beta}\,R_1}{\beta}\,\mathrm{E}_{\oplus(k_1,k_2)}$$

   Temos um dos seguintes casos:

   (a) α não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(p, q)$.

   (b) pelo menos uma das ocorrências de α é ocorrência de fórmula discordante em Π':
   Podemos notar que a propagação de qualquer uma das ocorrências de α ilustradas acima em Π' é menor do que q e portanto menor que a propagação de α em Π. Logo, $i(\Pi')$ é menor que $i(\Pi)$.

3. R_2 é $\mathrm{E}_{?}$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta_1\end{array} \quad \ldots \quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\delta_1^{j_1}\ \ldots\ \delta_n^{j_n}\ \gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \alpha\end{array}}{\alpha}\,\mathrm{E}_{?(j_1,\ldots,j_n,k)} \quad \Sigma'}{\beta}\,R_1$$

Podemos notar que $i(\Pi) = i(\alpha) = (p, q)$.

α é a premissa maior de R_1 e Σ', se R_1 for $E_\perp$, está a esquerda de α. Como α é uma fórmula essencialmente ?-modal, R_1 é $E_{\parr}$, $E_?$ ou $E_\perp$. Assim temos um dos seguintes casos:

(a) R_1 é $E_{\parr}$:

Nesse caso, β é $\perp$, α é $\psi\parr\varphi$ e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\gamma\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta_1\end{array}\quad \dots\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{array}\quad \begin{array}{c}\delta_1^{j_1}\ \dots\ \delta_n^{j_n}\quad \gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \psi\parr\varphi\end{array}}{\psi\parr\varphi}E_{?(j_1,\dots,j_n,k)}\quad \begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \psi^\perp\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma'_2\\ \varphi^\perp\end{array}}{\perp}E_{\parr}$$

Π é reduzida pela redução 14.(a) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\gamma\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta_1\end{array}\quad \dots\quad \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \psi^\perp\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma'_2\\ \varphi^\perp\end{array}\quad \begin{array}{c}\delta_1^{j_1}\ \dots\ \delta_n^{j_n}\quad \gamma^k\\ \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{n+2}\\ \psi\parr\varphi\end{array}\quad \psi^{\perp l_1}\quad \varphi^{\perp l_2}}{\perp}E_{\parr}\end{array}}{\perp}E_{?(j_1,\dots,j_n,l_1,l_2,k)}$$

Temos os seguintes casos:

i. $\psi^\perp$, $\varphi^\perp$ e $\psi\parr\varphi$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':

Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\psi\parr\varphi)$.

ii. $\psi^\perp$, $\varphi^\perp$ e/ou $\psi\parr\varphi$ são ocorrências de fórmulas discordantes em Π':

Nesse caso, como $d_c(\psi^\perp) < d_c(\psi\parr\varphi)$, $d_c(\varphi^\perp) < d_c(\psi\parr\varphi)$ e $s(\varphi\parr\psi)$ em Π' é menor que $s(\varphi\parr\psi)$ em Π, então $i(\Pi') < i(\Pi)$.

(b) R_1 é $E_?$:

Nesse caso, α é $?\psi$ e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\gamma\end{array}\quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta_1\end{array}\dots \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{array}\quad \begin{array}{c}\delta_1^{j_1}\dots\delta_n^{j_n}\quad \gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ ?\psi\end{array}}{?\psi}E_{?(j_1,\dots,j_n,k)}\quad \begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \varphi_1\end{array}\dots\begin{array}{c}\Sigma'_m\\ \varphi_m\end{array}\quad \begin{array}{c}\varphi_1^{l_1}\dots\varphi_m^{l_m}\quad \psi^{l_{m+1}}\\ \Sigma'_{m+1}\\ \beta\end{array}}{\beta}E_{?(l_1,\dots,l_{m+1})}$$

Como, em Π, α é a única ocorrência de fórmula máxima, então nenhuma da premissas intermediárias $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ilustradas acima pode ser conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\bot_c$, $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ e E_1.

Π é reduzida pela redução 14.(b) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \varphi_1\end{array} \ldots \begin{array}{c}\Sigma'_m\\ \varphi_m\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\delta_1^{j_1} \ldots \delta_n^{j_n} \quad \gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ ?\psi\end{array} \qquad \varphi_1^{j_{n+1}} \ldots \varphi_m^{j_{n+m}} \qquad \begin{array}{c}\varphi_1^{l_1} \ldots \varphi_m^{l_m} \quad \psi^{l_{m+1}}\\ \Sigma'_{m+1}\\ \beta\end{array}}{\beta}\,E_{?(l_1,\ldots,l_{m+1})}}{\beta}\,E_{?(j_1,\ldots,j_{n+m},k)}
$$

Como as ocorrências de fórmulas $\delta_1, \ldots, \delta_n$ ilustradas acima não são conclusão de uma regra de introdução ou de qualquer uma das regras $\bot_c$, $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $C_!$, $W_!$ e E_1, então temos um dos seguintes casos:

i. $?\psi$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0, 0) < i(\Pi) = i(\alpha)$.

ii. $?\psi$ é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, como $s(?\psi)$ em Π' é menor que $s(?\psi)$ em Π, então $i(\Pi') < i(\Pi)$.

(c) R_1 é $E_\bot$:
Nesse caso, β é $\bot$, α é $\psi^\bot$ e Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \psi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta_1\end{array} \ \ldots \ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1^{j_1} \ \ldots \ \delta_n^{j_n} \quad \gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \psi^\bot\end{array}}{\psi^\bot}\,E_{?(j_1,\ldots,j_n,k)}}{\bot}\,E_\bot
$$

Π é reduzida pela redução 14.(c) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$:

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ ?\gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta_1\end{array} \ \ldots \ \begin{array}{c}\Sigma_{n+1}\\ \delta_n\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \psi\end{array} \qquad \dfrac{\psi^l \qquad \begin{array}{c}\delta_1^{j_1} \ \ldots \ \delta_n^{j_n} \quad \gamma^k\\ \Sigma_{n+2}\\ \psi^\bot\end{array}}{\bot}\,E_\bot}{\bot}\,E_{?(j_1,\ldots,j_n,l,k)}
$$

Temos os seguintes casos:

i. ψ não é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, $i(\Pi') = (0,0) < i(\Pi) = i(\psi^{\perp})$.

ii. ψ é ocorrência de fórmula discordante em Π':
Nesse caso, como $d_c(\psi) < d_c(\psi^{\perp})$, então $i(\Pi') < i(\Pi)$.

■

Lema G.14 (Lema sobre $r(\Pi)$) *Seja* Π *a dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ *tal que* α *não é* $\perp$ *e* $i(\Pi) = (0,0)$. *Seja* Π' *a dedução normal obtida a partir de* Π *pelo Lema G.3. Então,* $r(\Pi')$ *e* $r(\Pi)$ *são a mesma regra.*

Π' é obtida de Π apenas através das reduções 22, 23, 24 e 25. Essas reduções são aplicadas apenas sobre ocorrências de fórmulas máximas que são premissas da regra $E_{\perp}$. Como a conclusão de $E_{\perp}$ é invarialvelmente $\perp$ e α não é $\perp$, então $r(\Pi')$ e $r(\Pi)$ são a mesma regra.

■

Lema G.15 (Lema das fórmulas máximas iguais para $E_{\perp}$) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ *tal que* Π *possui no máximo duas ocorrências de fórmulas máximas e se* β *é uma ocorrência de fórmula máxima em* Π *então:*

1. β *é da forma* $\gamma^{\perp\perp}$.

2. β *é ocorrência de fórmula discordante .*

3. *a subdedução de* Π *determinada por* β *é da forma:*

$$\dfrac{\dfrac{\gamma \quad \gamma^{\perp j}}{\perp} E_{\perp}}{\gamma^{\perp\perp}} I_{\perp(j)}$$

4. *se* β *for premissa maior de uma aplicação de* $E_{\perp}$ *então a fórmula vizinha de* β *da forma* $\gamma^{\perp}$ *não é conclusão de* $\perp_c$, $E_{\otimes}$, $E_{\oplus}$, $E_{\exists}$, $E_{?}$, $C_{!}$, $W_{!}$ *ou* E_{1} *em* Π.

Então Π *é reduzida a uma dedução* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ *tal que* Π' *não contém ocorrências de fórmulas discordantes .*

Provamos esse Lema G.15 por indução em $i(\Pi)$.
Temos os seguintes casos:

1. Em Π não existem ocorrências de fórmulas máximas:

   Nesse caso $\Pi' \equiv \Pi$.

2. Em Π existe apenas uma ocorrência de fórmula máxima:

   Nesse caso, seja β a ocorrência de fórmula máxima de Π. Temos os seguintes casos:

   (a) β é premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$:

   Nesse caso, Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma^{\perp}\end{array}\quad \dfrac{\dfrac{\gamma \quad \gamma^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}$$

   A ocorrência de $\gamma^\perp$ que é vizinha a $\gamma^{\perp\perp}$, por definição desse Lema, não é conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1

   Π é reduzida pela redução 11 a uma dedução Π_1' como segue:

   $\Pi_1' \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\gamma \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \gamma^{\perp}\end{array}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}$$

   Temos os seguintes casos:

   i. $\gamma^\perp$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_1':
   Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_1'$. Como podemos observar Π' não contém ocorrências de fórmulas discordantes.

   ii. $\gamma^\perp$ é ocorrência de fórmula discordante em Π_1':
   Como $\gamma^\perp$ não é conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, então $\gamma^\perp$ é conclusão de $\mathrm{I}_\perp$ e Π_1' é:
   $\Pi_1' \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\gamma \quad \dfrac{\begin{array}{c}\gamma^k\\ \Sigma_{1.1}\\ \perp\end{array}}{\gamma^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(k)}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}$$

Π'_1 é reduzida pela redução 11 a uma dedução Π' como segue:
$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c}\gamma\\ \Sigma_{1.1}\\ \perp\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}$$

Podemos observar que Π' não contém ocorrências de fórmulas discordantes.

(b) β é premissa maior de $\mathrm{W}_!$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \quad \gamma^{\perp j}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{W}_!\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}$$

A ocorrência de δ ilustrada acima que é conclusão de $\mathrm{W}_!$ não é premissa maior ou intermediária, caso contrário, δ seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β.

Π é reduzida pela redução 41.(b) a uma dedução Π' como segue:

$\Pi' \equiv$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \delta\end{array}}{\delta}\,\mathrm{W}_! \qquad \delta^{\perp k}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\delta}\,\perp_{c(k)}\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{array}$$

Como δ não pode ser premissa maior ou intermediária, Π' não contém ocorrências de fórmulas discordantes.

(c) β é premissa maior de $\mathrm{C}_!$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \quad \gamma^{\perp j_1}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)} \qquad \begin{matrix}\gamma^{\perp\perp j_2} \quad \gamma^{\perp\perp j_2}\\ \Sigma_1 \\ \delta\end{matrix}}{\begin{matrix}\delta\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{matrix}}\,\mathrm{C}_{!(j_2)}$$

Suponha que uma ocorrência da fórmula topo da forma $\gamma^{\perp\perp j_2}$ ilustrada acima é premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$. Nesse caso, a fórmula vizinha dessa ocorrência de fórmula não poderia ser conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, pois, caso contrário, essa fórmula vizinha seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β em Π.

A ocorrência de δ ilustrada acima que é conclusão de $\mathrm{C}_!$ não é premissa maior ou intermediária, caso contrário, δ seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β.

Π é reduzida pela redução 37.(b) a uma dedução Π_1' como segue:

$\Pi_1' \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \qquad \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\gamma^{j_2} \quad \gamma^{\perp j_3}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_3)} \quad \dfrac{\dfrac{\gamma^{j_2} \quad \gamma^{\perp j_4}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_4)} \\ \Sigma_1 \\ \delta\end{matrix}}{\delta}\,\mathrm{C}_{!(j_2)} \qquad \delta^{\perp k}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\begin{matrix}\delta\\ \Sigma_2\\ \alpha\end{matrix}}\,\perp_{c(k)}$$

Temos os seguintes casos:

i. as ocorrências de $\gamma^{\perp\perp}$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π_1':
Nesse caso, $\Pi_1' \equiv \Pi'$. Como δ não pode ser premissa maior ou intermediária, Π' não contém ocorrências de fórmulas discordantes.

ii. pelo menos uma das ocorrências de $\gamma^{\perp\perp}$ é ocorrência de fórmula discordante em Π_1':
Podemos notar que $s(\gamma^{\perp\perp})$ em Π_1' é menor que $s(\gamma^{\perp\perp})$ em Π, logo $i(\Pi_1') < i(\Pi)$. Como Π_1' é da forma desse Lema, por hipótese de indução, Π_1' é reduzida a uma dedução Π' livre de ocorrências de fórmulas discordantes.

(d) β é premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \delta_1\end{array} \quad \dots \quad \dfrac{\dfrac{\gamma \quad \gamma^{\perp^{j}}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j)} \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \delta_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1^{k_1} \quad \dots \quad \gamma^{\perp\perp^{k_i}} \quad \dots \quad \delta_n^{k_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \varphi\end{array}}{!\varphi}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\dots,k_n)}\\
\Sigma_{n+2}\\
\alpha
\end{array}$$

Para $1 \leq i \leq n$.

Suponha que a ocorrência da fórmula topo da forma $\gamma^{\perp\perp^{k_i}}$ ilustrada acima é premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$. Nesse caso, a fórmula vizinha dessa ocorrência de fórmula não poderia ser conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, pois, caso contrário, essa fórmula vizinha seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β em Π.

A ocorrência de $!\varphi$ ilustrada acima não é premissa maior ou intermediária, caso contrário, $!\varphi$ seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β.

Π é reduzida pela redução 29.(b) a uma dedução Π_1' como segue:

$\Pi_1' \equiv$

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \delta_1\end{array} \quad \dots \quad \gamma \quad \dots \quad \begin{array}{c}\Sigma_n\\ \delta_n\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1^{k_1} \quad \dots \quad \dfrac{\dfrac{\gamma^{k_i} \quad \gamma^{\perp^{j_1}}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)} \quad \dots \quad \delta_n^{k_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \varphi\end{array}}{!\varphi}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\dots,k_n)} \qquad (!\varphi)^{\perp^{j_2}}}{\dfrac{\perp}{!\varphi}\,\perp_{c(j_2)}}\,\mathrm{E}_\perp\\
\Sigma_{n+2}\\
\alpha
\end{array}$$

Como $!\varphi$ não é premissa maior ou intermediária, $!\varphi$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_1'. Temos os seguintes casos:

i. $\gamma^{\perp\perp}$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_1':
Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_1'$. Podemos observar que Π' é livre de ocorrências de fórmulas discordantes.

ii. $\gamma^{\perp\perp}$ é ocorrência de fórmula discordante em Π_1':

Nesse caso, seja Π_2' a subdedução Π_1' determinada pela ocorrência de φ ilustrada acima. Podemos notar que $s(\gamma^{\perp\perp})$ em Π_2' é menor que $s(\gamma^{\perp\perp})$ em Π, logo, $i(\Pi_2') < i(\Pi)$. Como Π_2' está no formato desse Lema, por hipótese de indução, Π_2' é reduzida a uma dedução Π_3' livre de ocorrências de fórmulas discordantes. Π' é a seguinte dedução:
$\Pi' \equiv$

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \delta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \gamma \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \delta_n\end{matrix} \quad \Pi_3'}{!\varphi}\ \mathrm{I}_{!(k_1,\dots,k_n)} \qquad (!\varphi)^{\perp j_2}}{\cfrac{\perp}{\begin{matrix}!\varphi\\ \Sigma_{n+2}\\ \alpha\end{matrix}}\ \perp_{c(j_2)}}\ \mathrm{E}_\perp$$

Podemos notar que Π' é livre de ocorrências de fórmulas discordantes.

(e) β é premissa intermediária de $\mathrm{E}_?$:

Esse caso é similar ao anterior no qual β é premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$.

3. Em Π existem duas ocorrências de fórmulas máximas e as duas são vizinhas:

Temos os seguintes casos:

(a) As duas ocorrências de fórmulas máximas são premissas intermediárias de $\mathrm{I}_!$:

Nesse caso, Π é da seguinte forma:
$\Pi \equiv$

$$\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \delta_1\end{matrix} \quad \dots \quad \cfrac{\cfrac{\gamma \quad \gamma^{\perp j_1}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\ \mathrm{I}_{\perp(j_1)} \quad \dots \quad \cfrac{\cfrac{\gamma \quad \gamma^{\perp j_2}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp}{\gamma^{\perp\perp}}\ \mathrm{I}_{\perp(j_2)} \quad \dots \quad \begin{matrix}\Sigma_n\\ \delta_n\end{matrix} \quad \begin{matrix}\delta_1^{k_1} \dots \gamma^{\perp\perp k_h} \dots \gamma^{\perp\perp k_i} \dots \delta_n^{k_n}\\ \Sigma_{n+1}\\ \varphi\end{matrix}}{\begin{matrix}!\varphi\\ \Sigma_{n+2}\\ \alpha\end{matrix}}\ \mathrm{I}_{!(k_1,\dots,k_n)}$$

Para $1 \leq h < i \leq n$.

Suponha que uma ocorrência da fórmula topo da forma $\gamma^{\perp\perp}$ ilustrada acima é premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$. Nesse caso, a fórmula vizinha dessa ocorrência de fórmula não poderia ser conclusão de $\bot_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, pois, caso contrário, essa fórmula vizinha seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β em Π.

A ocorrência de $!\varphi$ ilustrada acima não é premissa maior ou intermediária, caso contrário, $!\varphi$ seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β.

Π é reduzida por duas aplicações seguidas da redução 29.(b) a uma dedução Π'_1 como segue:

$\Pi'_1 \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & & \Sigma_n\\ \delta_1 \ldots \gamma \ldots & \gamma & \ldots \delta_n\end{matrix} \qquad \begin{matrix} \delta_1^{k_1} \ldots \dfrac{\dfrac{\gamma^{k_h} \quad \gamma^{\bot j_1}}{\bot}\,\mathrm{E}_\bot}{\gamma^{\bot\bot}}\,\mathrm{I}_{\bot(j_1)} \ldots \dfrac{\dfrac{\gamma^{k_i} \quad \gamma^{\bot j_2}}{\bot}\,\mathrm{E}_\bot}{\gamma^{\bot\bot}}\,\mathrm{I}_{\bot(j_2)} \ldots \delta_n^{k_n} \\ \Sigma_{n+1} \\ \varphi \end{matrix}}{!\varphi}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\ldots,k_n)} \qquad (!\varphi)^{\bot j_3}}{\dfrac{\bot}{!\varphi}\,\bot_{c(j_3)}}\,\mathrm{E}_\bot \qquad (!\varphi)^{\bot j_4}}{\begin{matrix}\dfrac{\bot}{!\varphi}\,\bot_{c(j_4)} \\ \Sigma_{n+2} \\ \alpha\end{matrix}}\,\mathrm{E}_\bot
$$

Como $!\varphi$ não é premissa maior ou intermediária, $!\varphi$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π'_1. Temos os seguintes casos:

i. as ocorrências de $\gamma^{\bot\bot}$ não são ocorrências de fórmulas discordantes em Π'_1:
   Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi'_1$. Podemos observar que Π' é livre de ocorrências de fórmulas discordantes.

ii. pelo menos uma das ocorrências de $\gamma^{\bot\bot}$ é ocorrência de fórmula discordante em Π'_1:
   Nesse caso, seja Π'_2 a subdedução Π'_1 determinada pela ocorrência de φ ilustrada acima. Podemos notar que $s(\gamma^{\bot\bot})$ em Π'_2 é menor que $s(\gamma^{\bot\bot})$ em Π, logo, $i(\Pi'_2) < i(\Pi)$. Como Π'_2 está no formato desse Lema, por hipótese de indução, Π'_2 é reduzida a uma dedução Π'_3 livre de ocorrências de fórmulas discordantes.
   Π' é a seguinte dedução:
   $\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \qquad\qquad \Sigma_n\\ \delta_1\ldots\gamma\ldots\gamma\ldots\delta_n \quad \Pi'_3\end{array}}{!\varphi}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\ldots,k_n)} \qquad (!\varphi)^{\perp j_3}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{!\varphi}\,\perp_{c(j_3)} \qquad (!\varphi)^{\perp j_4}}{\perp}\,\mathrm{E}_{\perp}}{\begin{array}{c}!\varphi\\ \Sigma_{n+2}\\ \alpha\end{array}}\,\perp_{c(j_4)}
$$

Podemos notar que Π' é livre de ocorrências de fórmulas discordantes.

(b) As duas ocorrências de fórmulas máximas são premissas intermediárias de $\mathrm{E}_?$:

Esse caso é similar ao anterior no qual as duas ocorrências de fórmulas máximas são premissas intermediárias de $\mathrm{I}_!$.

4. Em Π existem duas ocorrências de fórmulas máximas e as duas são adjacentes:

   Nesse caso, sejam φ_1 e φ_2 as duas ocorrências de fórmulas máximas de Π e ψ_1 e ψ_2 as ocorrências de fórmulas imediatamente abaixo de φ_1 e φ_2 respectivamente. Sem perda de generalidade, consideramos que φ_1 ocorre acima de uma fórmula vizinha ρ de φ_2. Logo Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} & \gamma \\ & \Sigma_1 \\ \gamma & \psi_1 \end{array}\\
\Sigma_2\\
\psi_2\\
\Sigma_3\\
\alpha
\end{array}
$$

   Por ser ocorrência de fórmula discordante φ_1 é premissa de $\mathrm{E}_\perp$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$, $\mathrm{I}_!$ ou $\mathrm{E}_?$. Logo ψ_1 é conclusão de $\mathrm{E}_\perp$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$, $\mathrm{I}_!$ ou $\mathrm{E}_?$. Se for conclusão de $\mathrm{E}_\perp$, ψ_1 é $\perp$ e não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra em Π. Se for conclusão de $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$, $\mathrm{I}_!$ ou $\mathrm{E}_?$, ψ_1 também não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra, pois, caso contrário, ψ_1 seria ocorrência de fórmula discordante diferente de φ_1 e φ_2 em Π. Logo, de qualquer jeito, ψ_1 não é premissa maior ou intermediária de qualquer regra em Π.

Temos os seguintes casos

(a) ρ não é premissa menor de $E_\perp$:

Sejam Π'_1 a subdedução de Π determinada por ρ e Π'_2 a subdedução de Π'_1 determinada por ψ_1. Π'_2 é do formato desse Lema e só contém uma ocorrência de fórmula máxima φ_1. Logo, podemos reduzir Π'_2 a uma redução Π'_3 livre de ocorrências de fórmulas discordantes tal como no caso 2 da prova desse Lema.

Seja Π'_4 a dedução obtida de Π'_1 pela substituição de Π'_2 por Π'_3. Como ψ_1, a fórmula final de Π'_2 e Π'_3, não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra em Π'_1, Π'_4 é livre de ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi'_4) = (0,0)$. Assim, pelo Lema G.3, Π'_4 é reduzida a uma dedução normal Π'_5 cuja fórmula final é ρ.

Seja Π'_6 a dedução obtida de Π pela substituição da subdedução Π'_1 pela dedução normal Π'_5. Como ρ, a fórmula final de Π'_5, é fórmula vizinha da ocorrência de fórmula máxima φ_2 da forma $\gamma^{\perp\perp}$, então ρ não pode ser ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(e) ou 4.(c) em Π'_6. Isso ocorre porque, nesse caso, ρ não é premissa menor de uma aplicação de $E_\perp$. Logo, Π'_6 só contém uma ocorrência de fórmula máxima φ_2, é da forma desse Lema e pode ser reduzida a dedução Π' livre de ocorrências de fórmulas discordantes tal como no caso 2 da prova desse Lema.

(b) ρ é premissa menor de $E_\perp$ e ocorrência de fórmula diferente de ψ_1:

Sejam Π'_1 a subdedução de Π determinada por ρ e Π'_2 a subdedução de Π'_1 determinada por ψ_1. Π'_2 é do formato desse Lema e só contém uma ocorrência de fórmula máxima φ_1. Logo, podemos reduzir Π'_2 a uma redução Π'_3 livre de ocorrências de fórmulas discordantes tal como no caso 2 da prova desse Lema.

Seja Π'_4 a dedução obtida de Π'_1 pela substituição de Π'_2 por Π'_3. Como ψ_1, a fórmula final de Π'_2 e Π'_3, não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra em Π'_1, Π'_4 é livre de ocorrências de fórmulas discordantes. Logo, $i(\Pi'_4) = (0,0)$. Assim, pelo Lema G.3, Π'_4 é reduzida a uma dedução normal Π'_5 cuja fórmula final é ρ.

Seja Π'_6 a dedução obtida de Π pela substituição da subdedução Π'_1 pela dedução normal Π'_5. Como ρ é uma ocorrência de fórmula diferente de ψ_1, $r(\Pi'_4) = r(\Pi'_1)$. Como ρ é premissa menor de $E_\perp$ cuja premissa maior é φ_2 da forma $\gamma^{\perp\perp}$, ρ é da forma $\gamma^\perp$ e é diferente de $\perp$. Logo, pelo Lema G.14, $r(\Pi'_5) = r(\Pi'_4) = r(\Pi'_1)$.

Dessa forma, Π'_6 só contém uma ocorrência de fórmula máxima φ_2, é da forma desse Lema e pode ser reduzida a dedução Π' livre de ocorrências de fórmulas discordantes tal como no caso 2 da prova desse Lema.

(c) ρ é premissa menor de $E_\perp$ e é a mesma ocorrência de fórmula ψ_1:
Nesse caso, como ρ é premissa menor de $E_\perp$ cuja premissa maior é φ_2 da forma $\gamma^{\perp\perp}$, ρ é da forma $\gamma^\perp$. Sabemos que ρ, a mesma ocorrência de fórmula ψ_1, é conclusão de $E_\perp$, $C_!$, $W_!$, $I_!$ ou $E_?$, logo temos os seguintes casos:

i. ρ é conclusão de $C_!$, $W_!$ ou $E_?$:
No entanto, por ser fórmula vizinha de φ_2 e premissa menor de $E_\perp$, ρ não pode ser conclusão de $C_!$, $W_!$ ou $E_?$ por definição desse Lema. Logo esse caso não existe.

ii. ρ é conclusão de $E_\perp$:
Nesse caso, por ser conclusão de $E_\perp$, ρ seria da forma $\perp$. No entanto, ρ é da forma $\gamma^\perp$. Logo esse caso não existe.

iii. ρ é conclusão de $I_!$:
Nesse caso, por ser conclusão de $I_!$, ρ seria da forma $!\mu$. No entanto, ρ é da forma $\gamma^\perp$. Logo esse caso não existe.

5. Em Π existem duas ocorrências de fórmulas máximas e as duas não são vizinhas nem adjacentes:

Nesse caso, sejam φ_1 e φ_2 as duas ocorrências de fórmulas máximas de Π e ψ_1 e ψ_2 as ocorrências de fórmulas imediatamente abaixo de φ_1 e φ_2 respectivamente. Logo Π é da seguinte forma:

$\Pi \equiv$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \gamma & \gamma \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{array} \\ \Sigma_3 \\ \alpha \end{array}$$

Por ser ocorrência de fórmula discordante , φ_i, para $1 \leq i \leq 2$, é premissa de $E_\perp$, $C_!$, $W_!$, $I_!$ ou $E_?$. Logo ψ_i é conclusão de $E_\perp$, $C_!$, $W_!$, $I_!$ ou $E_?$. Se for conclusão de $E_\perp$, ψ_i é $\perp$ e não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra em Π. Se for conclusão de $C_!$, $W_!$, $I_!$ ou $E_?$, ψ_i também não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra, pois, caso contrário, ψ_i seria ocorrência de fórmula discordante diferente de φ_1 e φ_2 em Π. Logo, de qualquer jeito, ψ_i não é premissa maior ou intermediária de qualquer regra em Π.

Sejam Π'_1 e Π'_2 as subdeduções de Π determinadas por ψ_1 e ψ_2 respectivamente. Π'_1 é do formato desse Lema e só contém uma ocorrência de fórmula máxima φ_1. Logo, podemos reduzir Π'_1 a uma redução Π'_3 livre de ocorrências de fórmulas discordantes tal como no caso 2 da prova desse Lema. Por sua vez: Π'_2 também é do formato desse Lema e só contém uma ocorrência de fórmula máxima φ_2. Logo, podemos reduzir Π'_2 a uma redução Π'_4 livre de ocorrências de fórmulas discordantes tal como no caso 2 da prova desse Lema.

Π' é a dedução obtida de Π pela substituição de Π'_1 por Π'_3 e de Π'_2 por Π'_4. Como ψ_1, a fórmula final de Π'_1 e Π'_3, e ψ_2, a fórmula final de Π'_2 e Π'_4, não pode ser premissa maior ou intermediária de qualquer regra em Π, Π' é livre de ocorrências de fórmulas discordantes.

■

Lema G.16 (Lema das fórmulas máximas iguais para E$_{⅋}$) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ *tal que* Π *possui no máximo duas ocorrências de fórmulas máximas e se* β *é uma ocorrência de fórmula máxima em* Π *então:*

1. β *é da forma* $(\gamma ⅋ \delta)^\perp$.

2. β *é ocorrência de fórmula discordante .*

3. *a subdedução de* Π *determinada por* β *é da forma:*

$$\dfrac{\gamma ⅋ \delta \quad \gamma^{\perp j} \quad \delta^{\perp j}}{\dfrac{\perp}{(\gamma ⅋ \delta)^\perp} I_{\perp(j)}} E_{⅋}$$

4. *se* β *for premissa maior de uma aplicação de* $E_\perp$ *então a fórmula vizinha de* β *da forma* $\gamma ⅋ \delta$ *não é conclusão de* $\perp_c$, $E_\otimes$, $E_\oplus$, $E_\exists$, $E_?$, $C_!$, $W_!$ *ou* E_1 *em* Π.

Então Π *é reduzida a uma dedução* Π' *de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ *tal que* Π' *não contém ocorrências de fórmulas discordantes .*

Esse Lema G.16 é demonstrado de forma similar ao Lema G.15.

■

Lema G.17 (Lema das fórmulas máximas iguais para E$_?$) *Seja* Π *uma dedução de* $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ *tal que* Π *possui no máximo duas ocorrências de fórmulas máximas e se* β *é uma ocorrência de fórmula máxima em* Π *então:*

1. β é da forma $(?\gamma)^{\perp}$.

2. β é ocorrência de fórmula discordante .

3. a subdedução de Π determinada por β é da forma:

$$\dfrac{\dfrac{?\gamma^{j} \quad \varphi_1 \quad \ldots \quad \varphi_n \qquad \begin{matrix} \varphi_1^{k_1} \quad \ldots \quad \varphi_n^{k_n} \quad \gamma^{k_{n+1}} \\ \Sigma \\ \delta \end{matrix}}{\delta} E_{?(k_1,\ldots,k_{n+1})} \qquad \delta^{\perp}}{\dfrac{\perp}{(?\gamma)^{\perp}} I_{\perp(j)}} E_{\perp}$$

4. se β for premissa maior de uma aplicação de $E_{\perp}$ então a fórmula vizinha de β da forma $?\gamma$ não é conclusão de $\perp_c$, $E_{\otimes}$, $E_{\oplus}$, $E_{\exists}$, $E_{?}$, $C_{!}$, $W_{!}$ ou E_{1} em Π.

Então Π é reduzida a uma dedução Π' de $\Gamma \vdash_{ndll} \alpha$ tal que Π' não contém ocorrências de fórmulas discordantes .

Esse Lema G.17 é demonstrado de forma similar ao Lema G.15.

■

Lema G.18 (Lema crítico) *Seja Π uma dedução de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ tal que $i(\Pi) = (p,q) > (0,0)$ e toda ocorrência de fórmula máxima em Π é premissa de $r(\Pi)$. Então Π é reduzida a uma dedução Π' de $\Gamma \vdash_{ndll} \beta$ tal que $z(\Pi') < z(\Pi)$.*

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as ocorrências de fórmulas discordantes de índice (p,q) em Π, ou seja $i(\alpha_1) = \ldots = i(\alpha_n) = i(\Pi)$. Como $i(\Pi) > (0,0)$, então $n \geq 1$ e $z(\Pi) = (p,q,n)$. Em Π, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são todas fórmulas vizinhas e premissas de $r(\Pi)$. Sem perda de generalidade consideramos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ocorrém na ordem da esquerda para a direita em $r(\Pi)$, ou seja, α_i está a esquerda de α_j se e somente se $i < j$.

Provamos esse Lema G.18 por indução em $l(\Pi)$. Temos os seguintes casos:

1. $n = 1$, $r(\Pi)$ é uma regra de eliminação e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(a):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.4 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

2. $n = 1$, $r(\Pi)$ é uma regra de eliminação e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 4.(a):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.13 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

3. $n = 1$, $r(\Pi)$ é uma regra de eliminação e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(c):

   Nesse caso, α_1 é a única ocorrência de fórmula máxima em Π e é conclusão de $\perp_c$. Π é da seguinte forma:

   $\Pi \equiv$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\alpha_1^{\perp j}\\ \Sigma_1\\ \perp\end{matrix}}{\alpha_1}\perp_{c(j)} \qquad \Sigma_2}{\beta}\, r(\Pi)$$

   Tal que Σ_2 pode estar a esquerda de α_1 e pode também ser vazia.

   Nesse caso, $i(\Pi) = i(\alpha_1)$.

   Π é reduzida a uma dedução Π_1^* pela redução 19 como segue:

   $\Pi_1^* \equiv$

$$\begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha_1^{j_1}\quad\Sigma_2}{\beta}\,r(\Pi)\qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha_1^\perp}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}\\ \Sigma_1\\ \dfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\end{matrix}$$

   Em Π, a ocorrência de hipótese $\alpha_1^{\perp j}$ pode ser premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$, $\mathrm{C}_!$ ou $\mathrm{W}_!$, e pode também ser premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$ ou $\mathrm{E}_?$. Nesse casos, $\alpha_1^\perp$ é uma ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*. Então temos os seguintes casos dependendo de $\alpha_1^\perp$:

   (a) $\alpha_1^\perp$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_1^*:
   Nesse caso, como $i(\Pi_1^*) = (0, 0) < i(\Pi) = i(\alpha_1)$, $\Pi' \equiv \Pi_1^*$.

   (b) $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$ em Π:
   Nesse caso, Π_1^* é da seguinte forma:
   $\Pi_1^* \equiv$

$$\begin{array}{c}\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha_1\end{array} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha_1^{j_1} \quad \Sigma_2}{\beta}\,r(\Pi) \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha_1^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ \cfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\end{array}$$

A ocorrência de α_1 ilustrada acima em Π_1^* que é premissa menor de $\mathrm{E}_\perp$ não pode ser conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, caso contrário, ela seria uma ocorrência de fórmula máxima em Π do tipo 1.(e) ou 4.(c), mas não é premissa de $r(\Pi)$.

Π_1^* é reduzida a uma dedução Π_2^* pela redução operacional 11 como segue:

$\Pi_2^* \equiv$

$$\begin{array}{c}\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_{1.1}\\ \alpha_1\end{array} \quad \Sigma_2}{\beta}\,r(\Pi) \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp \\ \Sigma_{1.2} \\ \cfrac{\perp}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}\end{array}$$

Temos os seguintes casos:

i. α_1 não é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
Nesse caso, como $i(\Pi_2^*) = (0,0) < i(\Pi) = i(\alpha_1)$, $\Pi' \equiv \Pi_2^*$.

ii. α_1 é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
Nesse caso, como α_1 não pode ser conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, então α_1 é conclusão de uma regra de introdução. Assim, $i(\alpha_1)$ em Π_2^* é igual a $i(\alpha_1)$ em Π e $i(\Pi_2^*) = i(\Pi)$.
Seja Π_3^* a subdedução determinada pela ocorrência mais acima de β ilustrada acima em Π_2^*. Π_3^* é da forma descrita por esse Lema G.18 e podemos notar que $i(\Pi_3^*) = i(\Pi_2^*) = i(\Pi)$ e $l(\Pi_3^*) < l(\Pi)$. Assim, Π_3^* é reduzida, por hipótese de indução, a uma dedução Π_4^* tal que $i(\Pi_4^*) < i(\Pi_3^*) = i(\Pi)$.
Seja Π' a dedução obtida a partir de Π_2^* pela substituição de Π_3^* por Π_4^*. Π' é então a seguinte dedução:
$\Pi' \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\Pi_4^* \quad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp\\ \Sigma_{1.2}\\ \perp\end{array}}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}$$

Podemos notar que $i(\Pi') = i(\Pi_4^*) < i(\Pi)$.

(c) $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$ em Π:
Então Π_1^* é da seguinte forma:
$\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\\ \\ \Sigma_{1.1}\\ \varphi_1 \ldots\end{array}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha_1^{j_1} \quad \Sigma_2}{\beta}\,r(\Pi) \qquad \beta^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\alpha_1^{\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)} \qquad \begin{array}{c}\\ \\ \Sigma_{1.d}\\ \ldots\varphi_d\end{array} \qquad \begin{array}{c}\varphi_1^{k_1}\ldots\alpha_1^{\perp k_i}\ldots\varphi_d^{k_d}\\ \Sigma_{1.(d+1)}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\ldots,k_d)}\end{array}\\ \Sigma_{1.(d+2)}\\ \perp\end{array}}{\beta}\,\perp_{c(j_2)}$$

Tal que $1 \leq i \leq d$ e $\alpha_1^{\perp}$ é φ_i. Nesse caso, $i(\Pi_1^*) = i(\alpha_1^{\perp}) > i(\Pi) = i(\alpha_1)$. A ocorrência de $!\gamma$ ilustrada acima em Π_1^* não pode ser premissa maior ou intermediária, caso contrário, ela seria uma ocorrência de fórmula discordante diferente de α_1 em Π.

Como $\alpha_1^{\perp}$ é fórmula essencialmente !-modal, α_1 é fórmula essencialmente ?-modal. Assim, $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_\perp$, $\mathrm{E}_\parr$ ou $\mathrm{E}_?$. Temos os seguintes casos:

i. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_\perp$:
Então, α_1 é da forma $\delta^\perp$, β é $\perp$, e Π_1^* é da seguinte forma:
$\Pi_1^* \equiv$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\\ \\ \Sigma_{1.1}\\ \varphi_1 \ldots\end{array}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \delta\end{array} \quad \delta^{\perp j_1}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp \qquad \perp^{\perp j_2}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(j_1)} \qquad \begin{array}{c}\\ \\ \Sigma_{1.d}\\ \ldots\varphi_d\end{array} \qquad \begin{array}{c}\varphi_1^{k_1}\ldots\delta^{\perp\perp k_i}\ldots\varphi_d^{k_d}\\ \Sigma_{1.(d+1)}\\ \gamma\end{array}}{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\ldots,k_d)}\\ \Sigma_{1.(d+2)}\\ \perp\end{array}}{\perp}\,\perp_{c(j_2)}$$

Suponha que a ocorrência da fórmula topo da forma $\delta^{\perp\perp k_i}$ ilustrada acima é premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$. Nesse caso, a fórmula

vizinha dessa ocorrência de fórmula não poderia ser conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, pois, caso contrário, essa fórmula vizinha seria ocorrência de fórmula máxima diferente de β em Π.
Π_1^* é reduzida a uma dedução Π_2^* através da redução 29.(b) como segue:
$\Pi_2^* \equiv$

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{
      \begin{array}{c}\Sigma_{1.1} \quad \Sigma_2 \quad \Sigma_{1.d} \\ \varphi_1 \ldots \delta \ldots \varphi_d \end{array}
      \qquad
      \begin{array}{c}
        \varphi_1^{k_1} \ldots \cfrac{\cfrac{\delta^{k_i} \quad \delta^{\perp\, l}}{\perp}\,\mathrm{E}_\perp}{\delta^{\perp\perp}}\,\mathrm{I}_{\perp(l)} \ldots \varphi_d^{k_d} \\
        \Sigma_{1.(d+1)} \\
        \gamma
      \end{array}
    }{!\gamma}\,\mathrm{I}_{!(k_1,\ldots,k_d)}
    \qquad (!\gamma)^{\perp\, j_1}
  }{\perp}\,\mathrm{E}_\perp
  \qquad \perp^{\perp\, j_2}
}{
  \begin{array}{c}
    \cfrac{\perp}{!\gamma}\,\perp_{c(j_1)} \\
    \Sigma_{1.(d+2)} \\
    \cfrac{\perp}{\perp}\,\perp_{c(j_2)}
  \end{array}
}\,\mathrm{E}_\perp
$$

Nesse caso, como a ocorrência de $!\gamma$ ilustrada acima em Π_2^* que é conclusão de $\perp_c$ não pode premissa maior ou intermediária, $!\gamma$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*.
Como $d_c(\delta) < d_c(\delta^\perp) = d_c(\alpha_1)$, mesmo que δ seja ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*, $i(\delta) < i(\Pi)$. No entanto $\delta^{\perp\perp}$ pode ser ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*. Temos os seguintes casos:

A. $\delta^{\perp\perp}$ não é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
Nesse caso, $\Pi' \equiv \Pi_2^*$. Podemos notar que $i(\Pi')$ é no máximo igual a $i(\delta)$, logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

B. $\delta^{\perp\perp}$ é ocorrência de fórmula discordante em Π_2^*:
Nesse caso, seja Π_3^* a subdedução determinada pela ocorrência de γ ilustrada acima em Π_2^*.
Como, se $\delta^{\perp\perp}$ for premissa maior de $\mathrm{E}_\perp$, sua fórmula vizinha não poderia ser conclusão de $\perp_c$, $\mathrm{E}_\otimes$, $\mathrm{E}_\oplus$, $\mathrm{E}_\exists$, $\mathrm{E}_?$, $\mathrm{C}_!$, $\mathrm{W}_!$ ou E_1, Π_3^* é da forma do Lema G.15. Logo Π_3^* pode ser reduzida, pelo Lema G.15, a uma dedução Π_4^* livre de ocorrências de fórmulas discordantes. Π' é então a seguinte dedução:
$\Pi' \equiv$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_{1.1} & \Sigma_2 & \Sigma_{1.d} & \\ \varphi_1 \ldots & \delta & \ldots \varphi_d & \Pi_4^*\end{matrix}}{!\gamma}\ \mathrm{I}_{!(k_1,\ldots,k_d)} \qquad (!\gamma)^{\perp j_1}}{\perp}\ \mathrm{E}_\perp \qquad \perp^{\perp j_2}}{\dfrac{\perp}{!\gamma}\ \perp_{c(j_1)}}\ \mathrm{E}_\perp
$$
$$
\begin{matrix} \Sigma_{1.(d+2)} \\ \dfrac{\perp}{\perp}\ \perp_{c(j_2)} \end{matrix}
$$

Podemos notar que $i(\Pi')$ é no máximo igual a $i(\delta)$, logo $z(\Pi') < z(\Pi)$.

ii. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_{\invamp}$:
Usando o Lema G.16 ao invés do Lema G.15, esse caso é similar ao anterior.

iii. $r(\Pi)$ é $\mathrm{E}_?$:
Usando o Lema G.17 ao invés do Lema G.15, esse caso é similar ao anterior.

(d) $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa intermediária de $\mathrm{E}_?$ em Π:
Nesse caso, Π é reduzida a uma dedução Π' tal que $z(\Pi') < z(\Pi)$ por um procedimento similar ao usado no caso anterior no qual $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$ em Π.

(e) $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa maior de $\mathrm{C}_!$ em Π:
Nesse caso, Π é reduzida a uma dedução Π' tal que $z(\Pi') < z(\Pi)$ por um procedimento similar ao usado no caso no qual $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$ em Π.

(f) $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa maior de $\mathrm{W}_!$ em Π:
Nesse caso, Π é reduzida a uma dedução Π' tal que $z(\Pi') < z(\Pi)$ por um procedimento similar ao usado no caso no qual $\alpha_1^{\perp j}$ é premissa intermediária de $\mathrm{I}_!$ em Π.

4. $n = 1$, $r(\Pi)$ é $\mathrm{W}_!$ e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(b):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.5 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

5. $n = 1$, $r(\Pi)$ é $\mathrm{W}_!$ e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 4.(b):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.6 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

6. $n = 1$, $r(\Pi)$ é $W_!$ e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 1.(d):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.7 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

7. $n = 1$, $r(\Pi)$ é $C_!$ e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 2.(c):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.10 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

8. $n = 1$, $r(\Pi)$ é $C_!$ e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 3.(c):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.11 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

9. $n = 1$, $r(\Pi)$ é $C_!$ e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$ e é uma ocorrência de fórmula máxima do tipo 2.(f):

   Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.12 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $i(\Pi') < i(\Pi)$. Assim, $z(\Pi') < z(\Pi)$.

10. $n \geq 1$, $r(\Pi)$ é $I_!$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são todas premissas intermediárias de $r(\Pi)$:

    Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.8 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $z(\Pi') < z(\Pi)$.

11. $n \geq 1$, $r(\Pi)$ é $E_?$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são todas premissas intermediárias de $r(\Pi)$:

    Nesse caso, Π é da forma descrita pelo Lema G.9 e é reduzida a uma dedução Π' tal que $z(\Pi') < z(\Pi)$.

12. $n \geq 1$, $r(\Pi)$ é $E_?$ e α_1 é a premissa maior de $r(\Pi)$:

    Temos os seguintes casos:

    (a) α_1 é ocorrência de fórmula discordante do tipo 1.(a):
        Esse caso é resolvido por um procedimento similar ao do caso 1 desse Lema.

    (b) α_1 é ocorrência de fórmula discordante do tipo 4.(a):
        Esse caso é resolvido por um procedimento similar ao do caso 2 desse Lema.

    (c) α_1 é ocorrência de fórmula discordante do tipo 1.(c):
        Esse caso é resolvido por um procedimento similar ao do caso 3 desse Lema.

■

Referências Bibliográficas

[ABCJ94] David Albrecht, F. Bäuerle, John N. Crossley, and Jonh S. Jeavons. Curry-howard terms for linear logic. *Logic Colloquium*, 1994.

[Abr93] Samson Abramsky. Computational interpretations of linear logic. *Theoretical Computer Science*, 111:3–57, 1993.

[ACJ97] David Albrecht, John N. Crossley, and Jonh S. Jeavons. New curry-howard terms for full linear logic. *Theoretical Computer Science*, 185(2):217–235, 1997.

[BBHdP92] Nick Benton, G. M. Bierman, J. Martin E. Hyland, and Valeria de Paiva. Term assignment for intuitionistic linear logic. Technical Report 262, Computer Laboratory, University of Cambridge, 1992.

[Bie89] G. M. Bierman. Classical linear λ-calculus. *Theoretical Computer Science*, 28:181–203, 1989.

[BP97] A. Barber and G. Plotkin. Dual intuitionistic linear logic. Technical report, LFCS, University of Edinburgh, 1997.

[dPNdM01] Maria da Paz N. de Medeiros. *Traduções Via Teoria da Prova: Aplicações à Lógica Linear*. PhD thesis, Departamento de Filosofia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.

[dPNdM03] Maria da Paz N. de Medeiros. Modal logic systems in natural deduction. In Jouko Väänänen, editor, *Proceedings of Logic Colloquium 2003*, Finland, 2003.

[DR99] V. Danos and L. Regnier. The structure of multiplicatives. *Archive for Math. Logic*, 227(1-2):43–78, 1999.

[Gal91] Jean Gallier. Contructive logics. part ii: Linear logic and proof nets. Technical Report PR2-RR-9, Digital Equipment Corporation, Paris, 1991.

[Gal93] Jean Gallier. Contructive logics. part i: A tutorial on proof systems and typed λ-calculi. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1993.

[Gen69] Gerhard Gentzen. Investigations into logical deduction. In M. E. Szabo, editor, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, pages 68–131. North Holland, Amsterdam, 1969.

[Gir87] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–102, 1987.

[Gir91] Jean-Yves Girard. A new constructive logic: Classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1:255–296, 1991.

[Gir93a] Jean-Yves Girard. Linear logic: A survey. In L. F. Bauer, W. Brauer, and H. Schwichtenberg, editors, *Proceedings of the International Summer School of Marktoberdorf*, NATO Advanced Science Institutes, series F94, pages 63–112. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[Gir93b] Jean-Yves Girard. On the unity of logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 59:201–217, 1993.

[Gir95] Jean-Yves Girard. Linear logic: Its syntax and semantics. In J.-Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pages 1–42. Cambridge University Press, 1995.

[Gir96] Jean-Yves Girard. Proof-nets: The parallel syntax for proof-theory. In P. Agliano and A. Ursini, editors, *Logic and Algebra*, New York, 1996. Marcel Dekker.

[GLT88] Jean-Yves Girard, Yves Lafont, and P. Taylor. *Proofs and Types.* Number 7 in Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 1988.

[Has02] M. Hasegawa. Classical linear logic of implications. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 2471:458. Springer-Verlag, 2002.

[Mar00] John Maraist. Classical linear logic and the linear λ_δ calculus. Technical Report ACRC/00/014, Advanced Computing Research Centre, University of South Australia, 2000.

[Mas90] Cosme D. B. Massi. *Provas de Normalização para a Lógica Clássica*. PhD thesis, Departamento de Filosofia, Universidade Estadual de Campinas, 1990.

[Per82] Luiz Carlos P. D. Pereira. *On the Estimation of the Length of Normal Derivations.* Akademilitteratur, Stockholm, 1982.

[Pra65] D. Prawitz. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study.* Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965.

[Pra71] D. Prawitz. Ideas and results in proof theory. In J.E. Fenstad, editor, *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, pages 235–307, Amsterdam, 1971. North Holland.

[Sta91] Gunnar Stalmarck. Normalization theorems for full first order classical natural deduction. *The Journal of Symbolic Logic*, 56, 1991.

[Tro92] Anne S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic.* CSLI Lecture Notes 29, Center for the Study of Language and Information, Stanford, California, 1992.

[Tro95] Anne. S. Troelstra. Natural deduction for intuitionistic linear logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 73(1):79–108, 1995.

[TS96] Anne S. Troelstra and H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory.* Cambridge tracts in theoretical computer science 43, Cambridge University Press, 1996.

[Ung92] A. M. Ungar. *Normalization, Cut-elimination and the Theory of Proofs.* CSLI Lecture Notes 28, 1992.