

Teoremas de Normalização para
A Lógica da Inconsistência Epistêmica

Felipe Ferreira de Moraes Netto

Orientadora: Ana Teresa de Castro Martins

Setembro, 2004

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Sistemas Paraconsistentes	6
1.1.1	A Hierarquia de Cálculos C_n	9
1.1.2	A Lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI	14
1.2	Objetivos	16
2	LEI - Apresentação e Dedução Natural	18
2.1	Definições Gerais	18
2.2	Dedução Natural	27
2.3	Completude & Corretude	39
2.3.1	Completude	39
2.3.2	Corretude	45
3	Normalização Fraca para ND_{LEI}	54
3.1	Definições Gerais	54
3.2	Reduções	57
3.3	Normalização Fraca	67
3.4	A Forma de uma Prova Normal e suas Conseqüências	71
4	Normalização Forte	76
4.1	Pior Seqüência	78

4.2	Normalização Forte	87
4.3	Conclusão	92
4.3.1	Trabalhos Futuros	94

Resumo

Os sistemas paraconsistentes têm tido um papel importante na modelagem de inferências para a Inteligência Artificial. Mais especificamente, pela natural relação com sistemas não-monotônicos, permitindo a estes suportar transitóriamente uma situação de inconsistência até que premissas sejam revistas e as contradições desfeitas.

Dada a importância de tal classe de lógicas para a Ciência da Computação, um estudo estrutural de deduções (derivações) em sistemas paraconsistentes torna-se de extrema relevância, e é com esta motivação que fazemos um estudo, neste trabalho, a respeito das propriedades sintáticas de um sistema em dedução natural equivalente a apresentação axiomática da Lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI, [8].

Este estudo, que está incluído como campo da Teoria Geral da Prova, consiste na formalização de um sistema em dedução natural do qual inferências desnecessárias podem ser removidas, sem que haja prejuízo na correção das derivações do referido sistema. Este processo de remoção de passos supérfluos de uma dedução denominamos *Normalização*. Com a Normalização, propriedades estruturais interessantes para a automatização destas lógicas podem ser formalmente enunciadas, como por exemplo, a propriedade da subfórmula. Investigamos também a possibilidade de que qualquer que seja a seqüência adotada para a remoção destes “desvios”, esta seqüência é finita. Resultado que compõe o teorema da Normalização Forte.

Estes resultados, juntamente com a unicidade da prova normal (conseqüência da Normalização Forte), visam fornecer insumos para a verificação e elaboração

de métodos que permitam decidir a relação de consequência lógica induzida por LEI.

Capítulo 1

Introdução

A descoberta de uma série de antinomias formuladas através dos axiomas que compõe a Teoria dos Conjuntos, em sua apresentação clássica, levou a comunidade científica a uma reflexão: faz-se necessário rever as bases sobre as quais a Matemática se assenta. Tal reflexão levou Hilbert e seus colaboradores à proposição de um programa de fundamentação da matemática, o qual buscava provar a consistência das teorias essenciais da Matemática por intermédio de métodos formais claros e construtivos.

E vem desse contexto histórico, o grande apelo de um meta-estudo que se baseia na análise estrutural de demonstrações e argumentos formais, que com o trabalho seminal de Gentzen [6], dá os primeiros passos na investigação e construção de uma teoria sobre provas, mais especificamente sobre as propriedades estruturais subjacentes ao conceito formal de prova.

A Teoria da Prova, como o próprio nome diz, tem as provas formais como objeto de estudo. Não somente estuda a teoremicidade, isto é, o que se consegue deduzir em uma teoria, mas como se deduz algo nesta teoria, a dedução propriamente dita. Basicamente, existem dois grandes ramos em Teoria da Prova: um que se denomina *geral (estrutural)*, que surge com a finalidade de analisar as

propriedades estruturais e combinatoriais de provas formais; e outro, *reducional (interpretativo)*, que busca estudar as propriedades de um dado sistema lógico por intermédio de traduções, ou reduções a sistemas mais elementares.

Com o intuito de realizar tais análises concernentes as deduções formais, Gentzen propôs um sistema de cálculo, com regras de inferência, denominado *dedução natural*, para as lógicas clássica, intuicionista e minimal, que guarda correspondência com as respectivas relações de consequência induzidas pelas lógicas citadas.

Não obstante a apresentação das lógicas sob a forma de dedução natural, como aplicado por Gentzen, tenha um forte aspecto intuitivo, pois o entendimento de suas regras de inferência e de suas constantes lógicas aflora naturalmente, um aparentemente fraco conjunto de propriedades estruturais deixou a dedução natural em segundo plano, sendo substituída por outra forma de abstração: o cálculo de seqüentes. Esta formalização se apresentou muito mais adequada à análise de propriedades estruturais dos sistemas formais, e por bastante tempo vinha sendo a principal ferramenta dos teóricos em Teoria Estrutural da Prova.

Contudo, Prawitz [19], demonstrou que os sistemas em dedução natural também deveriam ser objeto de estudos em teoria da prova, fornecendo resultados significativos para as lógicas em comento. Prawitz trabalhou com uma apresentação, em dedução natural, similar àquela proposta por Gentzen, e obteve resultados que garantem a existência de provas normais para os sistemas sob análise, a saber: lógicas Clássica, Intuicionista e Minimal.

Os sistemas em dedução natural têm, via de regra, dois conjuntos de regras: regras que adicionam uma constante lógica a uma fórmula (*regras de introdução*), e outras regras que removem constantes lógicas (*regras de eliminação*). Para as regras de eliminação, a fórmula que tem a sua constante lógica removida denominamos como *premissa maior*. Prawitz observou que a conclusão de uma regra de eliminação, cuja premissa maior fosse conclusão de uma regra de introdução,

nada acrescentava às premissas da introdução, ou seja, uma introdução seguida por uma eliminação deveria ser descartada por ser um passo supérfluo. A este conceito, Prawitz deu o nome de *Princípio da Inversão*.

Com essa diretriz em mente, Prawitz desenvolveu procedimentos que permitissem a remoção desses passos desnecessários: as reduções. Ainda assim, alguns problemas estruturais surgiram quando da observação que a regra que representava o conceito clássico de *redução ao absurdo*¹ perturbava a noção de normalização pretendida por Prawitz, que se viu obrigado a trabalhar, com um número reduzido de constantes lógicas primitivas. Começava, então, o surgimento de inúmeros estudos tendo como objeto sistemas baseados em dedução natural.

E, embora o menor conjunto de constantes lógicas primitivas não signifique uma menor expressividade, no caso dos trabalhos de Prawitz, sistemas com um maior número de constantes lógicas fornecem uma leitura, sob o ponto de vista humano, mais clara e intuitiva de uma dada argumentação constituída sobre um sistema lógico. E com esta idéia em mente, muitos foram os trabalhos com buscaram apresentar sistemas em dedução natural com conjuntos mais ricos de símbolos lógicos primitivos. Dentre os trabalhos relevantes podemos citar os resultados de Statman [24], que forneceu a primeira prova para a normalização da lógica clássica com todos os símbolos usualmente utilizados ($\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$) tratados como elementos primitivos, Stalmarck [23] e Seldin [21] e Massi [10].

Os trabalhos relacionados se valeram das mais diversas técnicas para a obtenção de sistemas normalizáveis, como, por exemplo, a tradução para sistemas de mais alta ordem, como fez Statman, e a definição de novos e complexos procedimentos de redução, como em Seldin, contudo o trabalho de Massi [10] foi o que mais se aproximou da idéia original de lidar diretamente com as regras de inferência como

¹A regra de redução ao absurdo não obedece a classificação em regras de introdução e eliminação

definidas por Gentzen e posteriormente utilizadas por Prawitz. Cabe ressaltar, que a solução encontrada por Massi servirá de base para os resultados defendidos neste trabalho.

E esse tem sido o mote da Teoria Geral da Prova em dedução natural. Atualmente, com o advento da computação, surgiram muitos outros motivos, além das provas de consistência para os sistemas formais, para se fazer um estudo estrutural de Provas, como, por exemplo, a prova automática de teoremas e a modelagem computacional de problemas, para citar somente alguns.

Como dito anteriormente, o estudo da teoria da prova tem como uma de suas questões básicas a definição da noção de prova, incluindo questões sobre a distinção entre diferentes tipos de provas, tais como provas construtivas e provas clássicas; investigações a respeito da estrutura das provas e a possibilidade da existência de algum tipo de prova canônica (prova normal); a representação das provas através de derivações e, possivelmente, o estabelecimento de critérios de identidade entre provas; a análise de um limite superior do comprimento de provas e do possível crescimento das mesmas após a aplicação de procedimentos de normalização; dentre outras questões.

Existem três classes principais de resultados, em teoria da prova, sobre a forma que as derivações de uma dado sistema lógico podem assumir, a saber:

- Teorema da Forma Normal - Toda derivação no sistema lógico considerado possui uma forma normal;
- Teorema de Normalização Fraca - Dada uma derivação no sistema considerado, podemos efetivamente obter sua forma normal, através de certas operações chamadas reduções;
- Teorema de Normalização Forte - Dada uma derivação no sistema considerado, sua forma normal é única e sempre pode ser obtida após um número

finito de reduções, independentemente da ordem em que as mesmas são aplicadas.

Os três resultados são de vital importância para um conhecimento real a respeito das propriedades da relação de consequência lógica, sintática e semântica, de um dado sistema. E da possível existência de provas normais, podemos obter uma série de consequências importantes no que diz respeito à prova automática de teoremas, isto é, é possível que dessa análise estrutural se extraia um procedimento de decisão, um algoritmo para verificar se determinada relação de consequência lógica pertence ou não à lógica representada por um dado sistema.

Conhecer a forma de uma derivação normal permite-nos lançar mão de algumas heurísticas que podem fornecer uma estratégia adequada para automatização da construção de derivações, o que pode garantir, também, a decidibilidade do método de prova.

A análise da estrutura das derivações pode auxiliar, ainda, na abordagem de outras questões lógicas que usualmente não são formuladas em termos da noção estrutural de prova como, por exemplo, a que trata da consistência de um dado sistema formal. Com o advento dos teoremas de normalização para a lógica clássica (teorema da forma normal, normalização fraca e normalização forte), a teoria da prova demonstrou sua importância no estudo dos diversos sistemas dedutivos, que foram, gradualmente, providos de procedimentos de normalização, criando meios para se investigar propriedades que permitissem solucionar uma gama de questionamentos relacionados a cada um dos sistemas.

Portanto, fundamentado na importância de uma análise sob a perspectiva da Teoria da Prova e na possibilidade de se enriquecer outros trabalhos relativo à Lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI, um sistema paraconsistente, propõe-se, neste trabalho, investigar propriedades estruturais das derivações (provas ou deduções) em um cálculo em dedução natural, bem como, as suas consequências.

Outros sistemas paraconsistentes já possuem trabalhos em Teoria da Prova, como se pode observar em [13], onde as propriedades de C_ω , o cálculo limite da hierarquia de cálculos paraconsistentes C_n , $1 \leq n \leq \omega$, são analisadas através de uma análise de sistemas baseados em cálculo de seqüentes.

Pretende-se com este trabalho, também, um entendimento melhor da relação de consequência sintática em LEI e do comportamento das constantes lógicas "??", que representa a noção, a ser definida, de plausibilidade crédula; "!", a plausibilidade cética, e da negação paraconsistente "¬".

A escolha pela apresentação do sistema em dedução natural também é justificável, pois este se aproxima mais de uma argumentação informal, onde cada passo de uma dedução é explicitamente justificado, atribuindo um significado construtivo e individualizado para cada símbolo lógico, o que torna a dedução natural uma boa candidata para a análise do processo de formalização do raciocínio. Assim, estas são as justificativas para se abordar o problema, sob a óptica da Teoria da Prova, da normalização para a Lógica da Inconsistência Epistêmica.

1.1 Sistemas Paraconsistentes

Um lógica pode se definida como um par $\langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, em que \mathcal{L} representa a linguagem sobre a qual a lógica é definida e define a relação de consequência sintática \vdash (derivabilidade ou deducibilidade) entre um conjunto Γ (Γ, Γ_1, \dots - possivelmente multisets ou seqüências) de fórmulas e uma fórmula α (α, α_1, \dots), todas pertencentes à linguagem \mathcal{L} . A questão é: qual o conjunto mínimo de propriedades deve esta relação de consequência possuir? Usualmente, uma relação de consequência, para ser classificada como dedutiva, deve possuir as três seguintes propriedades:

- Se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \cup \Gamma_1 \vdash \alpha$ (monotonicidade);
- Se $\alpha \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash \alpha$ (reflexividade);

- Se $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma_1 \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ então $\Gamma \cup \Gamma_1 \vdash \beta$ (transitividade).

Classificamos um sistema lógico como dedutivo se ele possuir pelo menos estas três propriedades: monotonicidade, reflexividade e transitividade.

Com o desenvolvimento dos estudos e idéias sobre os diversos sistemas lógicos desenvolvidos, observou-se que a definição apresentada acima era muito restritiva, de certa forma, impedindo que os sistemas lógicos correntes se aproximassem do objetivo primordial do estudo da formalização do raciocínio: construir uma representação formal, precisa e abrangente, do raciocínio e da forma dos seres humanos conceberem o conhecimento.

Como exemplo podemos considerar a monotonicidade, a qual não é uma propriedade desejada em muitos dos processos de tomada de decisão humanos, já que em muitas situações, uma crença deve ser revista sob a presença de novos fatos (novas hipóteses), sendo que determinadas inferências podem não ser mais válidas sob um novo contexto. Ou seja, princípios compatíveis com procedimentos dedutivos puramente matemáticos podem não dar o poder necessário para a construção de sistemas que se prestem à modelagem de inferência mais ricas, mais próximas de situações reais.

Outro aspecto clássico, segundo a tradição aristotélica, o princípio da não contradição (PNC), pode ser definido como se segue:

$$(PNC) \vdash \sim (\alpha \wedge \sim \alpha)$$

onde α representa uma sentença arbitrária e \sim caracteriza a negação clássica, deve ser uma verdade irrevogável. Sistemas que não capturassem esta propriedade seriam indesejáveis. Teorias que permitissem a derivação de um enunciado e a sua negação deveriam ser descartadas, pois o conjunto de teoremas obtidos a partir de tais teorias seria igual ao conjunto de fórmulas pertencentes à linguagem subjacente a tal sistema lógico, e numa teoria em que tudo é verdade,

qualquer fórmula bem formada é consequência lógica, não há qualquer utilidade. Tal concepção, a qual afirma que de duas sentenças contraditórias deduz-se qualquer outra sentença (ex falso sequitur quodlibet), pode ser formalizado através da seguinte apresentação:

$$(EFQ) \sim \alpha, \alpha \vdash \beta$$

Onde α e β são fórmulas arbitrárias de uma dada linguagem.

Na lógica clássica, PNC e EFQ são equivalentes. Um estudo mais detalhado de alguns sistemas, que não os que contenham a negação clássica, pode mostrar que os dois princípios são independentes. A questão é que muitas teorias construídas no decorrer da evolução da ciência, e que foram utilizadas como embasamento para outras teorias largamente utilizadas e aceitas como naturalmente irrevogáveis, apresentaram a geração das antinomias, como as referidas na seção anterior, das quais um bom exemplo é o famoso Paradoxo de Russell, que pode ser definido a partir da apresentação da Teoria dos Conjuntos proposta por Cantor.

O que fazer então? Descartar toda a teoria? Reformulá-la impedindo o acontecimento de tais paradoxos? No caso da Teoria dos Conjuntos de Cantor, uma das soluções encontradas foi restringir o uso do esquema de compreensão, impedindo a auto-referência, que era a forma pela qual o paradoxo de Russell se apresentava.

Em princípio, esta restrição solucionaria o problema. Porém, seria o esquema de compreensão a única fresta para a entrada dos paradoxos na teoria de Cantor?

Com base nesse questionamento, outras soluções floresceriam: uma possibilidade seria deixarmos os paradoxos ocorrerem, porém impedindo que os mesmos gerassem uma contaminação da teoria, que a trivializaria. Este é o enfoque dos *sistemas paraconsistentes*. Da possível existência de teorias inconsistentes porém não triviais surgem as seguintes definições relevantes à nossa análise.

Definição 1. (*Teoria Trivial*) Diz-se de uma teoria Γ cujo conjunto de teoremas

é igual ao conjunto de fórmulas indutivamente geradas pertencentes à linguagem subjacente.

Definição 2. *(Teoria Inconsistente) Diz-se de uma teoria Γ da qual podemos derivar α e $\neg\alpha$, onde \neg representa a negação.*

E, assim definimos os sistemas paraconsistentes:

Definição 3. *(Lógica Paraconsistente) Diz-se de um sistema lógico que permite a construção de teorias inconsistentes porém não necessariamente triviais.*

Claramente, o uso de um sistema paraconsistente se adequaria a uma teoria que se apresentasse inconsistente, impedindo a sua trivialização sem, com isso, reduzir o seu poder dedutivo original com alguma forma de restrição no uso de seus postulados, como a axiomatização para a Teoria dos Conjuntos ZF - Zermelo-Fraenkel.

Nas seções que se seguem serão apresentados alguns sistemas formais paraconsistentes, suas principais propriedades e diferenças. O primeiro dos sistemas a serem apresentados será uma coleção de sistemas, que recebe a denominação de Hierarquia de Cálculos C_n .

O segundo, e último sistema a ser discutido neste capítulo será o sistema da lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI, que é o objeto deste trabalho, para o qual serão apresentados sua axiomática e algumas propriedades dedutivas.

1.1.1 A Hierarquia de Cálculos C_n

A hierarquia de cálculos proposicionais C_n foi proposta pelo professor Newton da Costa em [3] norteado pelos seguintes princípios gerais já:

1. Nestes cálculos, o princípio da não - contradição não deveria ser um esquema válido;

2. A trivialização de uma teoria não deve, em geral, ser aceita;
3. A extensão deste cálculo para o cálculo dos predicados deve ser simples e natural;
4. Estes cálculos devem conter a maior parte dos esquemas e regras do cálculo proposicional clássico que não interfiram com as condições anteriores.

A sistemas com estas características o professor Newton da Costa atribui a denominação de Sistemas Formais Inconsistentes. Posteriormente, a denominação paraconsistente passou a ser utilizada. Estudos sobre sistemas formais inconsistentes já haviam sido realizados no começo do séc. XX por Jaskowski. Porém, por não ter apresentado uma definição formal completa do que seria tal sistema, da Costa é considerado o fundador desta classe de lógicas.

Partindo dos princípios acima apresentados, da Costa propôs os cálculos apresentados na seção seguinte.

Os sistemas $C_n, 1 \leq n \leq \omega$

O sistema paraconsistente proposicional C_ω é construído a partir da linguagem proposicional usual utilizando-se das constantes lógicas \wedge (conjunção), \vee (disjunção), \rightarrow (implicação) e \neg (negação paraconsistente) e um enumerável conjunto de símbolos proposicionais (p_1, p_2, \dots). Fórmulas arbitrárias serão denotadas por letras latinas maiúsculas (A, B, C, \dots), e conjuntos de fórmulas serão denotados por letras gregas maiúsculas (Γ, Δ, \dots).

A seguir, os postulados que definem C_ω , como quando introduzidos em [3]:

- Postulado 1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
- Postulado 2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;

- Postulado 3. $\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$;
- Postulado 4. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$;
- Postulado 5. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$;
- Postulado 6. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$;
- Postulado 7. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$;
- Postulado 8. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$;
- Postulado 9. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$;
- Postulado 10. $\alpha \vee \neg\alpha$;
- Postulado 11. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$;

Estes 11 postulados caracterizam o cálculo C_w . Obviamente o sistema C_w é mais fraco que a lógica clássica no sentido que a lógica clássica contém os teoremas de C_w . Logo, dada a consistência da lógica clássica, C_w é consistente.

As seguintes definições serão utilizadas na caracterização dos outros cálculos da Hierarquia $C_n, 1 \leq n < w$.

1. $\alpha^o =_{def} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$;
2. $\alpha^n =_{def} \alpha^{o \dots o}$;
3. $\alpha^{(1)} =_{def} \alpha^o$;
4. $\alpha^n =_{def} \alpha^o \wedge \alpha^{oo} \wedge \alpha^{ooo} \wedge \dots \wedge \alpha^n$.
5. $\neg^*\alpha =_{def} \neg\alpha \wedge \alpha^o$
6. $\neg^{(n)}\alpha =_{def} \neg\alpha \wedge \alpha^{(n)}$

A definição de α^o visa denotar o bom comportamento de uma sentença α , no sentido de que, para aquela sentença, o princípio da não-contradição é considerado. Logo se numa dada teoria Γ , α^o é derivável e se as proposições α e $\neg\alpha$ são derivadas, então Γ é uma teoria trivial.

A partir das definições apresentadas podemos, finalmente, formalizar os outros cálculos da hierarquia:

- Postulado 12(n). $\beta^o \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$;
- Postulado 13(n). $(\alpha^o \wedge \beta^o) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta)^o \wedge (\alpha \vee \beta)^o \wedge (\alpha \wedge \beta)^o)$

O operador \neg^* tem todas as propriedades da negação clássica. Em C_n , $1 \leq n < \omega$, isto pode ser facilmente demonstrado através da demonstração dos dois seguintes teoremas:

- $(\alpha \rightarrow \neg^*\beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg^*\alpha)$
- $\neg^*\neg^*\alpha \rightarrow \alpha$

As noções de demonstração, dedução e teoremas (formais) e as propriedades da relação de derivabilidade (\vdash) são como as usuais. Logo, C_ω é definido pelos postulados (esquemas de axiomas) (1) ao (11) e C_n , $1 \leq n < \omega$, por todo conjunto de postulados definidos, (1) ao (13).

Como se pode observar, toda lógica intuicionista positiva é preservada pelos postulados de (1) a (9). A grande diferença consiste no tratamento dado a negação, onde esta já não se comporta classicamente, pois teve seu "poder" enfraquecido, como veremos adiante. Tanto o Princípio do Terceiro Excluído (Postulado 10) como a eliminação da dupla negação (Postulado 11) são mantidos em C_n , $1 \leq n \leq \omega$.

Observa-se que em C_ω uma fórmula negada nunca poderá ser derivada por qualquer um dos postulados que definem C_ω , a menos que seja assumida como

hipótese. Intuitivamente, a idéia transmitida é que em C_ω a negação encontra-se extremamente enfraquecida, isto é, uma fórmula $\alpha \wedge \neg\alpha$ nunca representará uma contradição no sentido clássico, em qualquer que seja a teoria definida sobre C_ω . Consequentemente, uma série de teoremas clássicos é perdida. O enfraquecimento da negação pode ser observado de forma progressiva nos sistemas da hierarquia C_ω , à medida que n tende a ω . De forma oposta, os cálculos tornam-se progressivamente mais restritos (menor teoremicidade).

Outras observações relevantes podem ser apresentadas acerca dos cálculos C_n :

- Todos os teoremas da lógica intuicionista positiva são preservados em C_n , $1 \leq n \leq \omega$. Em particular, a comutatividade e associatividade de \wedge e \vee são preservadas.
- a Lei de Peirce, $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$, não é teorema em C_ω , mas é demonstrável em C_n , $1 \leq n < \omega$;
- C_ω não é finitamente trivializável, isto é, não existem teorias triviais finitas em C_ω , mas em C_n , $1 \leq n < \omega$, se em uma teoria Γ deriva-se $(\alpha \wedge \neg^{(n)}\alpha)$, Γ é trivial;
- as Leis de De Morgan e Redução ao Absurdo (RAA) clássica não valem em C_n , $1 \leq n \leq \omega$, em particular:
 - $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$ não é um esquema válido em C_n , $1 \leq n < \omega$;
 - $\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ não é um esquema válido em C_ω ;
 - $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ não é um esquema válido em C_n , $1 \leq n \leq \omega$;
 - $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ não é um esquema válido em C_n , $1 \leq n < \omega$.

o Teorema da Dedução é válido em C_ω . Em particular: $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$;

- A comutatividade dos conectivos \wedge e \vee inexistem quando a conjunção (disjunção) está sob o escopo de uma negação; isto é, não é válido, por exemplo, o seguinte teorema clássico: $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\beta \wedge \alpha)$.

Logo o Teorema da Substituição de Equivalentes - Replacement Theorem - não é válido em C_n , $1 \leq n \leq \omega$, o que é empecilho para a definição de uma semântica recursiva para os cálculos da hierarquia. Ainda assim, C_1 admite uma semântica bivalorada que pode ser estendida para os outros sistemas da hierarquia C_n [1], contudo, tal semântica não representa uma função de verdade.

- Os postulados que definem C_n , $1 \leq n < \omega$, são independentes.

1.1.2 A Lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI

A Lógica da Inconsistência Epistêmica - LEI [2] é uma lógica paraconsistente desenvolvida para tolerar contradições oriundas de inferências realizadas sobre contextos incompletos.

LEI é a base monotônica de uma lógica default IDL [15], mas também pode ser utilizada para formalizar raciocínios baseados em sistemas multi-agentes. Em LEI, encontramos dois símbolos que lidam com o conceito de plausibilidade: “?”, que representa a plausibilidade crédula, e “!”, a plausibilidade cética. “ $\alpha?$ ” pode ser compreendida intuitivamente “ α ” é plausível se pelo menos um dos agentes crê em sua verdade e “ $\alpha!$ ” representa que “ α ” é plausível sempre que todos os agentes crêem em sua verdade. A negação paraconsistente “ \neg ” de LEI permite lidar com conclusões conflitantes entre fórmulas plausíveis, sem que ocorra uma explosão de teoremas. Daí o caráter paraconsistente de LEI.

Objetivando melhor entender o poder dedutivo das constantes lógicas, e também compreendê-las individualmente, um sistema baseado em dedução natural e outro

$$\begin{array}{cc}
I?) \frac{\alpha}{\alpha?} & E?) \frac{\frac{[\alpha]^u}{\Pi_2}}{\gamma}^u \\
I!) \frac{\alpha}{\alpha!} & E!) \frac{\alpha!}{\alpha} \\
I\neg) \frac{\frac{[\alpha]^u}{\Pi_1}}{\perp}^u}{\neg\alpha} & E\neg) \frac{A \wedge \neg A}{\perp}
\end{array}$$

Tabela 1.1: Primeira versão das regras para ? e !, e para a negação paraconsistente \neg

em cálculo de seqüentes foram desenvolvidos para LEI [8]. Os sistemas seguem o padrão apresentado por Gentzen, e utilizado, também, por Prawitz, nos quais para cada uma das constantes lógicas definidas existem correspondentes regras de introdução e eliminação. Para os conectivos usuais (\wedge , \vee , \rightarrow , \sim , \forall e \exists), as regras não possuem mudanças significativas em relação às propostas para lógica clássica.

Para os conectivos “?”, “!” e “ \neg ”, regras com restrições especiais foram definidas. A regra $E?$ requer que γ seja ?-fechada e que todas as hipóteses, das quais γ dependa, sejam ?-fechadas, a menos das ocorrências sintaticamente idênticas a α . No caso da regra $I!$, a premissa de uma aplicação da referida regra deve depender somente de fórmulas que sejam ?-fechadas (vide tabela 1.1.2) ².

Contudo estas regras, apesar de corretas e completas, possuem restrições que forçam a existência de alguns “desvios” nas derivações geradas, ou seja, passos desnecessários na construção da prova, como podemos observar nos exemplos a seguir:

²Todas as regras , em sua nova definição, serão apresentadas no capítulo subsequente, vide tabela ??

$$\frac{\frac{\beta \quad \beta \rightarrow \alpha!}{\alpha!} \quad \frac{\frac{(\alpha!)^u}{\alpha} \quad \frac{(\alpha! \wedge \beta)^v}{\alpha!}}{\beta? \rightarrow \alpha} \quad \frac{\beta? \rightarrow \alpha}{(\beta? \rightarrow \alpha)!}}{\alpha! \vee (\alpha! \wedge \beta)} \quad \frac{\beta? \rightarrow \alpha}{(\beta? \rightarrow \alpha)!} \quad \frac{\beta? \rightarrow \alpha}{(\beta? \rightarrow \alpha)!} \quad u,v \quad \triangleright \triangleright \quad \frac{\beta \quad \beta \rightarrow \alpha!}{\frac{\alpha!}{\alpha}} \quad \frac{\alpha!}{\beta? \rightarrow \alpha} \quad \frac{\beta? \rightarrow \alpha}{(\beta? \rightarrow \alpha)!}$$

Observe que $\alpha! \vee (\alpha! \wedge \beta)$ é conclusão de uma regra de eliminação para logo em seguida ser premissa maior de uma regra de eliminação. E segundo o princípio da inversão, este seria um passo descartável, sobre o qual deveríamos aplicar um procedimento de redução. No entanto, a derivação à direita, que é resultado da eliminação dessa aplicação de regra desnecessária, não é mais uma derivação válida, pois as restrições para a aplicação da regra $I!$ não são mais obedecidas. Problemas similares ocorrem com aplicações da regra $E?$, em reduções que modificam as dependências da premissa menor das referidas aplicações.

No capítulo seguinte, apresentaremos um sistema em dedução natural para LEI, que tem como principal característica a propriedade de ser normalizável. Posteriormente, a principais conseqüências desta propriedade serão investigadas.

1.2 Objetivos

No capítulo 2, será apresentada a base axiomática de LEI e algumas de suas propriedades fundamentais. Em seguida formalizaremos um novo sistema em dedução natural $\mathcal{ND}_{\mathcal{LEI}}$, correto e completo em relação a LEI, para o qual será analisado a possibilidade de provas normais, no sentido definido por Prawitz.

No capítulo 3, definiremos as reduções necessárias para a remoção dos desvios, que segundo o Princípio da Inversão, nada acrescentam à dedução. As reduções serão utilizadas para formalizar uma prova de Normalização Fraca para o sistema em questão.

No último capítulo, será garantido que qualquer que seja a seqüência de reduções adotada, a mesma sempre terminará (Normalização Forte), finalizando com um resumo dos resultados obtidos e a proposição de novos trabalhos.

Capítulo 2

LEI - Apresentação e Dedução Natural

O objetivo deste capítulo é fornecer todas as definições e propriedades sintáticas de LEI necessárias para o desenvolvimento de uma análise sob o ponto de vista de teoria da prova, apresentando, inicialmente, a linguagem subjacente e, posteriormente, um sistema em dedução natural correto e completo em relação à apresentação axiomática de LEI [8].

2.1 Definições Gerais

Nesta seção apresentaremos alguns detalhes que dizem respeito à linguagem e ao uso da mesma. Inicialmente, será apresentado o alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ do sistema a ser definido no decorrer da dissertação.

Definição 4. *(Alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$) O alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ constitui-se pelos seguintes símbolos, cada um em sua respectiva classe gramatical:*

1. *Símbolos lógicos*

- (a) *Uma constante sentencial para o absurdo:* \perp ;
- (b) *Conectivos proposicionais:* \wedge (*conjunção*), \rightarrow (*implicação*), \vee (*disjunção*),
 $?$ (*plausibilidade crédula*) e $!$ (*plausibilidade cética*);
- (c) *Doas constantes lógicas para a negação:* \neg , *a paraconsistente* e \sim , *a clássica*;
- (d) *Quantificadores de primeira ordem:* \forall e \exists .

2. Símbolos não-lógicos

- (a) *Um conjunto enumerável de variáveis individuais:* x, y, z, \dots ;
- (b) *Um conjunto enumerável de parâmetros individuais:* a, b, c, \dots ;
- (c) *Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de constantes individuais;*
- (d) *Um conjunto enumerável, possivelmente vazio, de símbolos funcionais:*
 f, g, h, \dots ;
- (e) *Um conjunto enumerável de símbolos predicativos n -ários;*

3. Pontuação: "(,)" e ",."

Como em Prawitz [19], os parâmetros individuais representam indivíduos arbitrários em contextos não quantificados, o que em outras linguagens de primeira ordem poderia ser compreendido como variáveis livres, livres de quantificação.

Variáveis, parâmetros, símbolos funcionais e símbolos funcionais podem eventualmente vir acompanhados de índices alfanuméricos ($P_1, P_2, f_1, x_i, \dots$).

A partir da apresentação do alfabeto, torna-se possível construir indutivamente as expressões sintáticas aceitas para a representação de termos:

Definição 5. (*Termos Individuais t, u, v, \dots*) *O conjunto dos termos é o menor conjunto indutivamente definido a partir das seguintes cláusulas:*

1. *uma constante individual ou um parâmetro individual é um termo;*
2. *se f é um símbolo funcional de aridade n , e $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, termos, então $f(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ é um termo.*

Podemos, agora, definir indutivamente a linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, que constitui uma extensão da linguagem de primeira ordem usualmente utilizada para a lógica clássica. Usaremos letras gregas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma \dots$ para representar fórmulas arbitrárias pertencentes à $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$. Duas fórmulas em $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ são da mesma forma se são idênticas, isto é, se apresentam identidade sintática. A relação de identidade sintática será denotada por \equiv .

Definição 6. *(Linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$) A linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ é o menor conjunto indutivamente definido a partir das seguintes cláusulas:*

1. *seja P um símbolo predicativo, e $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, termos, então $P(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$;*
2. *sejam α, β fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ também o são;*
3. *seja α uma fórmula de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, então $(\sim \alpha)$ e $(\neg \alpha)$ pertencem à $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$;*
4. *seja α uma fórmula de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, então $(\alpha?)$ e $(\alpha!)$ pertencem à $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$;*
5. *se α é uma fórmula de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ e x uma variável individual, então $(\forall x\alpha^*)$, $(\exists x\alpha^*)$ pertencem à $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, onde α^* é resultado de se substituir, se existir, ocorrências de um dado parâmetro a qualquer por x .*

Eventualmente, com o objetivo de facilitar a leitura das fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, iremos omitir parênteses mais externos, contanto que o significado e a relação entre os símbolos sejam preservados, assim como em [12].

O significado informal das construções $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ deve ser entendido de maneira usual, como na lógica clássica. A respeito dos símbolos \sim e \neg , temos a representação da negação clássica e da negação paraconsistente, respectivamente. No caso das construções provenientes da quarta cláusula, faz-se necessário tecer alguns comentários. Fórmulas, tais como $(\alpha?)$ e $(\alpha!)$, podem ser entendidas como a representação sintática da plausibilidade crédula e cética de α , respectivamente. De $\alpha?$ podemos intuir que existem indícios da provabilidade de α . Porém, de $\alpha?$, não podemos afirmar, de maneira irrefutável, que α é provável, demonstrável. O comportamento paraconsistente provém da relação entre a plausibilidade e a negação \neg , o qual será melhor compreendido após a apresentação axiomática que caracteriza LEI.

Definição 7. (*Grau de uma Fórmula $g(\alpha)$*) O grau g de uma fórmula α é definido como o número de ocorrências de constantes lógicas em α , excetuando-se ocorrências de \perp .

Definição 8. (*Fórmula $?$ -livre*) Uma fórmula α arbitrária é $?$ -livre se α não contém qualquer ocorrência de “?” e de “!”.

Letras latinas maiúsculas A, B, C, \dots denotarão fórmulas $?$ -livres.

Exemplo 1. $\alpha \wedge (\beta \rightarrow (A \rightarrow (\gamma?)))$ não é $?$ -livre, mas $\forall x(P(x, y) \rightarrow (Q(x, y) \vee Q(y, x)))$ o é.

De forma similar, dizemos que uma fórmula qualquer α é $?$ -fechada, se todos os símbolos proposicionais de α ocorrem sob o escopo de “?” ou “!”. O conceito de fórmula $?$ -fechada e $?$ -livre serão importantes na obtenção das propriedades da apresentação axiomática de LEI.

Definição 9. (*Conectivo Principal*) O conectivo principal de uma fórmula α é a constante lógica adicionada pela última cláusula utilizada, da definição 6, na construção de α .

No que concerne às ocorrências de variáveis em fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{T}}$, podemos classificá-las como ligadas ou livres. Seja x uma variável, então se x ocorre em uma fórmula α sob o escopo de um quantificador ($\forall x, \exists x$), x ocorre ligada; caso contrário, ou x não ocorre em α ou ocorre livre. Observe, também, que uma variável x pode ocorrer tanto ligada como livre em uma mesma fórmula.

Seguindo [19], os parâmetros individuais são símbolos usados para variar sobre indivíduos em contextos quantificados. Enquanto que, as variáveis individuais são reservadas para serem usadas em contextos quantificados. Com este tipo de notação, não precisamos especificar se uma variável ocorre livre ou ligada em uma fórmula, tampouco, se um termo é livre para uma variável em uma fórmula.

Eventualmente, haverá razões para se considerar seqüências de símbolos de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{T}}$ que são como termos ou fórmulas exceto por conterem, possivelmente, variáveis na posição onde deveriam conter parâmetros. Como em Prawitz [19], tais seqüências serão denominadas pseudo-termos e pseudo-fórmulas, respectivamente. Fórmulas e termos, quando da definição de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{T}}$, constituirão casos especiais de pseudo-termos e pseudo-fórmulas.

Dessa forma, uma ocorrência de variável x e uma pseudo-fórmula α pode ser classificada como *livre* ou *ligada*, dependendo se x pertence ou não a um escopo de um quantificador imediatamente seguido

Nem todos os conectivos de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{T}}$ serão explicitamente definidos através da axiomatização a ser apresentada; a saber: “ \sim ” (negação clássica), “ $!$ ” (plausibilidade cética), “ \leftrightarrow ” (equivalência), “ \Rightarrow ” (implicação forte) e “ \Leftrightarrow ” (equivalência forte), embora no sistema em dedução natural a ser construído, os dois primeiros sejam tratados como primitivos.

Definição 10. (*Conectivos derivados*) *Os seguintes conectivos/constantas lógicas serão introduzidos por definição:*

- (*Negação Clássica \sim*): $\sim \alpha =_{def} \alpha \rightarrow (P(t_1, \dots, t_n) \wedge \neg P(t_1, \dots, t_n))$,

tal que $P(t_1, \dots, t_n)$ é qualquer fórmula atômica ?-livre;

- (Plausibilidade Cética !): $\alpha! =_{def} \sim((\sim \alpha)?)$;
- (Equivalência \leftrightarrow): $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$;
- (Implicação Forte \Rightarrow): $\alpha \Rightarrow \beta =_{def} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$;
- (equivalência forte \Leftrightarrow): $\alpha \Leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$.

A partir da formalização da linguagem $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ e das operações e definições auxiliares já exibidas, podemos, então, apresentar o conjunto de esquemas de axiomas que definem LEI.

Axiomas Proposicionais Clássicos

1. (\rightarrow -1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. (\rightarrow -2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. (MP)
$$\frac{\alpha \quad (\alpha \rightarrow \beta)}{\beta}$$
4. (\wedge -1) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
5. (\wedge -2) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
6. (\wedge -3) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
7. (\vee -1) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
8. (\vee -2) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
9. (\vee -3) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
10. (\rightarrow -3) $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Axiomas para os Quantificadores

11. (\forall -1) $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$, t é livre para x em α
12. (\forall -2) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
13. (\forall -3) $\alpha \rightarrow \forall x\alpha$, considerando que x não ocorre livre em α
14. (GEN) $\alpha_x^a \rightarrow \forall x\alpha$, tal que t não ocorre livre em nenhuma hipótese da qual α depende, e ou $x \equiv t$ ou t não ocorre livre em α
15. (\exists -1) $\alpha_t^x \rightarrow \exists x\alpha$, t é livre para x em α
16. (\exists -2) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta)$
17. (\exists -3) $\exists x\alpha \rightarrow \alpha$, considerando que x não ocorre livre em α

Axiomas para a Negação Paraconsistente em LEI

18. (\neg -1) $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$
19. (\neg -2) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
20. (\neg -3) $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
21. (\neg -4) $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$

Axiomas para a Negação Paraconsistente envolvendo os Quantificadores

22. (\neg -5) $\neg\forall x\alpha \leftrightarrow \exists x\neg\alpha$
23. (\neg -6) $\neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha$

Axiomas para as Plausibilidades - Crédula ? e Cética !

24. (?-1) $(\alpha \rightarrow B) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\alpha)$
25. (?-2) $\alpha \rightarrow \alpha?$

26. (?-3) $\alpha?? \rightarrow \alpha?$
27. (?-4) $(\alpha? \rightarrow \beta?)? \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$
28. (?-5) $(\alpha \vee \beta)? \rightarrow (\alpha? \vee \beta?)$
29. (?-6) $(\neg\alpha)? \leftrightarrow \neg(\alpha?)$
30. (?-7) $(\exists x\alpha)? \rightarrow \exists x(\alpha?)$
31. (?-8) $(\alpha)? \rightarrow (\sim\sim \alpha?)$
32. (?-9) $\alpha? \wedge \sim(\beta?) \rightarrow (\alpha \wedge \sim \beta)?$
33. (?-10) $\alpha \vdash \alpha!$, onde todas as hipóteses das quais α depende são ?-fechadas.

Na apresentação axiomática de LEI, temos um conjunto de esquemas de axiomas, os quais podem ser instanciados através de substituição uniforme das metavariáveis (α, β, \dots) que ocorrem em um dado esquema por fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}EI}$; e também uma regra de inferência: modus ponens (MP). Dizemos que uma seqüência de fórmulas $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ ($n \geq 1$) é uma prova de α a partir de Γ , tal que $\alpha = \alpha_n$, se cada α_i ($1 \leq i \leq n$) ou é uma instância de axioma, ou pertence a Γ , ou é obtida de α_k e α_j ($k, j \vdash i$) por meio de uma aplicação de (MP). A relação de consequência induzida será denotada por $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$.

Os primeiros nove axiomas correspondem ao fragmento proposicional positivo da lógica clássica, garantindo a derivabilidade de todos os teoremas de tal fragmento. No caso do décimo axioma, temos a representação de um teorema da lógica clássica que não pertence ao fragmento positivo da lógica clássica: a Lei de Peirce.

Como é sabido, a negação \neg de LEI apresenta um caráter paraconsistente; logo o princípio *ex falso sequitur quodlibet* não deve, em geral, ser aceito. Ou seja, a conclusão de $\beta \wedge \neg\beta$ não necessariamente representa uma contradição capaz de

trivializar uma teoria em LEI. No entanto, se concluirmos $B \wedge \neg B$ temos uma contradição suficientemente forte para tornar uma teoria trivial. Este raciocínio é expresso através do axioma 24.

Definiremos como *contradição forte* fórmulas da forma $\beta \wedge \neg B$ ou da forma $B \wedge \neg\beta$, nas quais B é obtido de β através da remoção de todas as ocorrências de “?” e “!”, se existirem. Observe que nem toda contradição forte possui a capacidade de trivializar uma teoria em LEI. Esta restrição é possível através da definição do comportamento da negação paraconsistente \neg perante fórmulas que não são ?-livre [8].

A negação paraconsistente \neg , em virtude de seu fraco poder em relação à negação clássica, impede que teoremas de poder dedutivo relevante sejam deriváveis em LEI, os quais necessitam de aplicações de redução ao absurdo como na lógica clássica. Por exemplo, a dualidade entre os quantificadores \forall e \exists deixou de ser derivada, assim como, também, as leis de *De Morgan*. Com o intuito de recuperar o poder destes teoremas, foram adicionados os axiomas 18 a 23.

No que diz respeito à diferença entre o comportamento de fórmulas ?-livres e aquelas que não o são, todos os teoremas da lógica clássica são preservados para as ?-livres. Ou seja, todas as constantes lógicas “clássicas” funcionam como na lógica clássica para fórmulas que sejam ?-livre; em particular, a negação paraconsistente “ \neg ” comporta-se classicamente para tais fórmulas.

À negação clássica, que é um conectivo derivado na apresentação axiomática, os seguintes teoremas são válidos em LEI:

Teorema 1. • $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim \beta) \rightarrow \sim \alpha)$

• $\vdash \sim \sim \alpha \rightarrow \alpha$

O que comprova que a constante lógica \sim realmente se comporta como a negação no seu sentido clássico.

Em fórmulas $?$ -fechada, qualquer “?” ou “!” adicional torna-se irrelevante. Esta noção é formalizada através teorema a seguir.

Teorema 2. *Se α é uma fórmula $?$ -fechada, então $\vdash \alpha \Leftrightarrow \alpha?$ e $\vdash \alpha \Leftrightarrow \alpha!$*

LEI atende ao teorema de substituição de equivalentes (“replacement theorem”), ou seja, se $\vdash \beta \Leftrightarrow \beta'$ então $\vdash \alpha \Leftrightarrow \alpha'$, de forma que α' é obtido através da substituição, em α , de β por β' .

teorema é válido em LEI, o teorema da dedução. Formalmente:

Teorema 3. *Se $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.*

Dentre os principais teoremas de LEI, alguns serão agora mencionados devido a utilidade dos mesmos na prova da corretude do cálculo $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ a ser definido. Tais teoremas dizem respeito à introdução e à distributividade de “?” e “!” sobre a implicação. Estas observações a respeito dos meta-teoremas e teoremas de LEI podem ser verificadas em [2].

Teorema 4. *Se $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ então $\vdash \alpha? \rightarrow \beta?$ e $\vdash \alpha! \rightarrow \beta!$*

Teorema 5. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta)! \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)$

Teorema 6. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta)! \rightarrow (\alpha! \rightarrow \beta!)$

2.2 Dedução Natural

Dadas as definições e explanações gerais sobre o sistema LEI, apresentadas na seção anterior, podemos partir para a construção de um sistema em dedução natural que seja equivalente a sua axiomatização e que possua a propriedade de ser tanto fraca como fortemente normalizável. Ou seja, que as derivações realizadas neste sistema possuam uma forma canônica, padrão, no sentido apresentado no capítulo 1 e a ser formalizado no capítulo subsequente.

Na primeira apresentação de LEI em dedução natural [8], formula-se um sistema correto e completo em relação a axiomática de LEI, o qual segue os moldes daqueles propostos para a lógica clássica, como em [6] e [19]. No entanto, algumas restrições na aplicação de suas regras de inferência se apresentam demasiado fortes de tal forma que a normalização fraca, como queremos definir, não é aplicável. Tal impecilho nos motivou a buscar um novo sistema em dedução natural para LEI que não fosse carente de tal propriedade. Em particular, a normalização era perturbada pelas constantes lógicas “?” e “!”, quando estas eram manipuladas em suas respectivas regras de inferência.

Os sistemas em dedução natural são apresentados usualmente através de um conjunto de regras de inferência divididas em: *regras de introdução*, *regras de eliminação*. Possivelmente, outras regras de inferência que não sigam o padrão introdução/eliminação podem ser definidas, como, por exemplo, a *redução ao absurdo*. Para cada constante lógica, devem existir uma regra de introdução e outra de eliminação correspondente, sendo que algumas regras possuem restrições (pré-condições) para as suas aplicações e também realizam descarte de hipóteses (pós-condições).

Nesta nova apresentação de LEI em dedução natural, contudo, usaremos um conceito diferente: o sistema a ser construído neste trabalho terá suas regras de inferência e operações de descarte definidas separadamente. As primeiras constituirão as *quase-derivações*, e as últimas serão formalizadas através de uma função de descarte \mathfrak{F} .

Em [19] esta convenção para o descarte de hipóteses foi utilizada em formulações de sistemas em dedução natural as lógicas modais S4 e S5 com o intuito de fornecer sistemas modais passíveis de normalização. A solução apresentada garantiu a normalização, porém sem que se utilizasse todos as constantes lógicas como símbolos primitivos. A saber: o modalidade “possibilidade”, representada por \diamond ,

deveria ser tratada como derivada, dada a dualidade entre \diamond e \square (necessidade) existente nos sistemas modais que são estendidos a partir da lógica clássica.

Considerando a existência de uma tradução entre um fragmento de *LEI* e *S5* [8], o uso da proposta de Prawitz para os sistemas modais poderia ser adaptada em *LEI*, no entanto, sem que todas as constantes lógicas em *LEI* fossem tratadas como primitivas, pois a constante, em *LEI*, que corresponderia a \diamond em *S5*, a plausibilidade crédula “?”, deveria ser introduzida por definição. Contudo, a referida estratégia não atende aos objetivos do presente trabalho, pois se busca a normalização para $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ de forma que todas as constantes lógicas de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ sejam tratadas como símbolos primitivos.

Pretendemos, no presente trabalho, fornecer um sistema em dedução natural, normalizável, correto e completo em relação à axiomática de *LEI* e com todas as constantes lógicas tratadas como símbolos primitivos. Dessa forma, a função de descarte precisará sofrer algumas modificações, em relação à versão utilizada por Prawitz ¹, para que um sistema com boas propriedades em termos de Teoria da Prova (normalização, propriedade da subfórmula, ...) seja possível.

Usaremos a letra grega Π , possivelmente com índices, como meta-variável para quase-derivações, as quais são definidas indutivamente como a seguir:

Definição 11. (*Quase-Derivação Π*) Π é uma quase-derivação se:

- ou Π é uma fórmula α qualquer pertencente a $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ (α é uma quase-derivação de α dependendo apenas de α);
- ou existem quase-deduções Π_1 , Π_2 e Π_3 tal que Π é obtida através da aplicação de algum dos padrões encontrados nas tabelas 1 e 2 (denomi-

¹As modificações adotadas neste trabalho para o sistema em dedução natural para *LEI*, dada a existência da tradução citada, resolveriam, também, os problemas com a normalização, com todos os conectivos como primitivos, para os sistemas modais citados

nados regras de inferência), levando-se em consideração as restrições particulares de cada regra.

Como podemos observar, para cada constante lógica do sistema, exceto \perp , existem uma regra de introdução, a qual é denotada pela letra “I” seguida pela constante introduzida, e a sua correspondente eliminação, denotada pela letra “E” seguida da constante eliminada. As regras da tabela 1 seguem o padrão usual de apresentação para sistemas em dedução natural ([19], [6]).

As regras da tabela 2 não constituem propriamente regras de introdução ou eliminação, mas podem ser entendidas como uma forma de reescrita entre fórmulas. Esse comportamento sintaticamente anômalo, pois o princípio da inversão não é diretamente observado, se deve aos axiomas de LEI que buscam conservar parte da teoremicidade perdida no processo de definição da negação paraconsistente. Teoremas como as leis de De Morgan e a introdução da dupla negação têm seu lugar garantido devido às regras da tabela 2.

É imprescindível salientar que, embora ainda não formalmente apresentadas, uma série de restrições, sobre suas regras correspondentes, deve ser obedecida para que uma quase-derivação seja considerada como tal. Antes, porém, de apresentarmos as restrições, que completam a definição das quase-deduções, apresentaremos outros conceitos fundamentais para a definição das restrições e, conseqüentemente, do próprio sistema.

Denominaremos *aplicação de uma regra inferência* uma instância de qualquer uma das regras apresentadas (Tabelas 1 e 2). Seja $\frac{\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n}{\beta}$ uma aplicação de uma regra de inferência qualquer, então $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ serão as premissas e β a conclusão da referida aplicação. Nas regras de eliminação, a premissa que contém a constante lógica destacada é denominada *premissa maior* e as demais, se existirem, *premissa menor*. Uma determinada fórmula α pertencente a uma quase-derivação Π será tratada como *ocorrência de fórmula* em Π quando quisermos enfatizar a

Tabela 2.1: Regras de Introdução e Eliminação, e Regras do Absurdo

$$\text{I?} \frac{\Pi_1}{\alpha?}$$

$$\text{E?} \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\gamma}$$

$$\text{I!} \frac{\Pi_1}{\alpha!}$$

$$\text{E!} \frac{\Pi_1}{\alpha!}$$

$$\text{I}\wedge \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\alpha \wedge \beta}$$

$$\text{E}_1\wedge \frac{\Pi_1}{\alpha \wedge \beta}$$

$$\text{E}_2\wedge \frac{\Pi_1}{\beta}$$

$$\text{I}_1\vee \frac{\Pi_1}{\alpha \vee \beta}$$

$$\text{I}_2\vee \frac{\Pi_1}{\beta \vee \alpha}$$

$$\text{E}\vee \frac{\alpha \vee \beta \quad \Pi_1 \Pi_2}{\gamma}$$

$$\text{I}\rightarrow \frac{\Pi_1}{\alpha \rightarrow \beta}$$

$$\text{E}\rightarrow \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\alpha \rightarrow \beta}$$

$$\text{I}\exists \frac{\Pi_1}{\alpha^x}$$

$$\exists x \alpha$$

$$\text{E}\exists \frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\gamma}$$

$$\text{I}\forall \frac{\Pi_1}{\alpha^x}$$

$$\forall x \alpha$$

$$\text{E}\forall \frac{\Pi_1}{\alpha^x}$$

$$\text{I}\neg \frac{\Pi_1}{\neg \alpha}$$

$$\text{E}\neg \frac{\Pi_1}{B \wedge \neg B}$$

$$\neg \perp \frac{\Pi_1}{\alpha}$$

$$\text{I}\sim \frac{\Pi_1}{\sim \alpha}$$

$$\text{E}\sim \frac{\Pi_1}{\beta \wedge \sim \beta}$$

$$\sim \perp \frac{\Pi_1}{\alpha}$$

Tabela 2.2: Regras Especiais

I_{-1}	$\frac{\Pi_1}{\alpha \wedge \neg\beta}$	E_{-1}	$\frac{\Pi_1}{\neg(\alpha \rightarrow \beta)}$
I_{-2}	$\frac{\Pi_1}{\neg(\alpha \vee \neg\beta)}$	E_{-2}	$\frac{\Pi_1}{\neg(\alpha \wedge \beta)}$
I_{-3}	$\frac{\Pi_1}{\neg(\alpha \wedge \neg\beta)}$	E_{-3}	$\frac{\Pi_1}{\neg(\alpha \vee \beta)}$
I_{-4}	$\frac{\Pi_1}{\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}}$	E_{-4}	$\frac{\Pi_1}{\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}}$
I_{-5}	$\frac{\Pi_1}{\frac{\exists x\neg\alpha}{\neg\forall x\alpha}}$	E_{-5}	$\frac{\Pi_1}{\frac{\neg\forall x\alpha}{\exists x\neg\alpha}}$
I_{-6}	$\frac{\Pi_1}{\frac{\forall x\neg\alpha}{\neg\exists x\alpha}}$	E_{-6}	$\frac{\Pi_1}{\frac{\neg\exists x\alpha}{\forall x\neg\alpha}}$
I_{-7}	$\frac{\Pi_1}{\frac{(\neg\alpha?)}{\neg(\alpha?)}}$	E_{-7}	$\frac{\Pi_1}{\frac{\neg(\alpha?)}{(\neg\alpha?)}}$

posição de α em Π , isto é, para uma dada fórmula de $\mathcal{L}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{T}}$, podem existir múltiplas ocorrências em Π , porém uma ocorrência é única e referencia uma única instância de fórmula. A noção de ocorrência de fórmula se faz necessária quando se quer relacionar a posição de fórmulas quaisquer em uma quase-derivação.

Dada a noção de ocorrência de fórmula em uma quase-derivação Π , podemos definir a seguintes noções: uma fórmula α *ocorre imediatamente acima de* uma outra fórmula β em uma quase-derivação Π , se α for uma premissa de uma determinada aplicação de regra de inferência em Π e β for a conclusão da referida aplicação. Da mesma forma, dizemos que uma fórmula α *ocorre acima de* β , se ou α ocorre imediatamente acima de β , ou se existe uma ocorrência de fórmula γ , da qual α ocorre imediatamente acima, e γ ocorre acima de β . Reciprocamente, pode se dizer que β ocorre imediatamente abaixo de α , no primeiro caso; e que β ocorre abaixo de α , no segundo caso. Em ambas as situações, dizemos que α e β estão *conectados*, ou seja: existe uma conexão determinada por α e β . Diz-se, ainda, das premissas de uma aplicação de uma regra de inferência que as mesmas ocorrem lateralmente, ou seja, sejam α_1 e α_2 premissas de uma mesma aplicação, logo, α_1 ocorre ao lado de α_2 , ou α_1 ocorre lateralmente a α_2 .

As fórmulas que não possuem nenhuma ocorrência de fórmula acima, em uma dada quase-derivação Π , denominaremos *top-fórmulas* (as folhas da árvore de prova), e a fórmula que não possui nenhuma ocorrência de fórmula abaixo, *fórmula final*.

O comprimento l de uma quase-derivação Π , $l(\Pi)$, é definido como sendo o número de ocorrências de fórmulas em Π . É importante ressaltar que muitas das provas apresentadas neste trabalho serão provas por indução sobre o comprimento de quase-derivações.

Utilizaremos a seguinte notação para explicitar top-fórmulas ou a conclusão de uma quase-derivação Π :

- $\frac{[\alpha]}{\Pi}$ denota um conjunto de ocorrências de fórmulas da forma α que são top-fórmulas de uma quase-derivação Π . Se ao invés de colchetes, utilizarmos parênteses, uma única ocorrência de α estará sendo destacada;
- $\frac{\Pi}{\alpha}$ denota a conclusão de Π , a qual é da forma α .

Observe que entre α e Π não aparece a barra horizontal que caracteriza a aplicação de uma regra de inferência, de forma que α está contida em Π , pretendendo, com a notação acima definida, apenas destacá-la, não representado uma ocorrência externa à Π .

Logo, faz-se necessário observar que:

1. $l\left(\frac{[\alpha]}{\Pi}\right) = l(\Pi)$;
2. $l\left(\frac{\Pi}{\alpha}\right) = l(\Pi)$.

Porém, $l\left(\frac{\Pi}{\alpha}\right) = l(\Pi) + 1$, pois a barra horizontal pressupõe a utilização de alguma regra de inferência.

De uma maneira informal, as quase-derivações se apresentam sob a forma de uma estrutura em árvore, as quais podemos chamar informalmente de árvores de prova. Seja α uma ocorrência de fórmula em uma quase-derivação Π qualquer, dizemos que a *sub-árvore determinada por α* é a quase-derivação obtida a partir de Π pela remoção de todas as ocorrências de fórmulas, exceto α e aquelas que ocorrem acima de α .

Dizemos que σ , de comprimento n , é uma *conexão entre α_1 e α_n* em uma quase-derivação Π se $\sigma = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, tal que, para $1 \leq i < n$, α_i está conectado a α_{i+1} . Note que existe uma única conexão entre duas ocorrências quaisquer de fórmulas em uma quase-derivação. O conceito de conexão será utilizado na definição das restrições de aplicação das regras de inferência. No entanto, antes,

definiremos a noção de dependência que será utilizada, também, na definição da função de descarte \mathfrak{F} .

Definição 12. (*β depende de α em Π*) Dizemos que uma ocorrência de fórmula β qualquer depende de α em uma quase-derivação Π , se α é uma top-fórmula que ocorre acima de β , e ou a função \mathfrak{F} não é aplicável a α , ou $\mathfrak{F}(\alpha) = \gamma$ e γ ocorre abaixo de β .

Quando da apresentação das regras de inferência, foi determinado que certas regras não poderiam ser aplicadas arbitrariamente, a menos que fossem atendidas determinadas restrições. Dada a noção de dependência, podemos definir tais restrições.

Definição 13. (*Restrições sobre Aplicações de Regras de Inferência*) Uma quase-derivação Π somente será aceita como tal se:

1. em cada aplicação da regra \forall em Π , existe um termo t qualquer de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ que não ocorre livre em α e em nenhuma hipótese das quais sua premissa α_t^x depende;
2. em cada aplicação da regra $E\exists$ em Π , existe um termo t qualquer de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ que não ocorre livre em α nem mesmo em γ e em nenhuma hipótese das quais Γ depende, exceto as de forma α_t^x ;
3. em cada aplicação da regra $I!$ em Π , cada conexão entre a premissa α de uma referida aplicação e uma ocorrência de fórmula da qual α depende contém uma ocorrência de fórmula que é $?$ -fechada.

Dessa maneira, faz-se necessário fornecer ao sistema alguma forma de descarte de hipóteses que não são mais necessárias para a continuidade do processo dedutivo, isto é, hipóteses que possuem apenas um caráter transitório na quase-derivação.

Nos sistemas em dedução natural clássicos, o descarte de tais hipóteses é feito de maneira uniforme. Se uma determinada regra de inferência permite o descarte de hipóteses, todas as ocorrências de top-fórmulas que possuem a mesma forma da fórmula a ser descartada, efetivamente o serão.

Como observado anteriormente, no sistema em dedução natural pretendido para LEI, o descarte de hipóteses será feito de maneira mais liberal, não tão uniforme; e para tal, construiremos uma função de descarte \mathfrak{F} , a qual definirá em que ocorrência de fórmula de uma quase-derivação Π (e em que circunstâncias ...) uma dada hipótese será descartada.

Para definirmos a função de descarte \mathfrak{F} , precisamos, antes, formalizar o conceito que denominaremos árvore plausível. A definição é como a seguir.

Definição 14. (*Árvore Plausível determinada por β dependente de α*) Considere uma quase-derivação Π , logo, se existe, em Π , uma subárvore determinada por uma ocorrência de fórmula β qualquer que é γ -fechada e que atende às seguintes condições:

1. para cada hipótese, diferente de α , da qual β depende, a conexão entre β e a respectiva hipótese deve conter pelo menos uma ocorrência, além de β , de fórmula que é γ -fechada;
2. deve existir pelo menos uma hipótese, da qual β depende, que é da forma α ;

então dizemos que tal árvore é uma árvore plausível determinada por γ dependente de α .

Se em uma dedução Π , temos uma árvore plausível determinada por γ dependente de α , de forma que não exista nenhuma ocorrência de fórmula abaixo de γ que determine, também, uma árvore plausível dependente de α , dizemos que tal

árvore plausível é maximal. Dada a noção de árvore plausível, podemos, então, definir a função de descarte \mathfrak{F} .

Definição 15. (*Função de Descarte \mathfrak{F}*) Seja Π uma quase-derivação, e α uma ocorrência fórmula que é uma hipótese (top-fórmula) em Π . Logo, $\mathfrak{F}(\alpha) = \beta$, e α e β atenderem a uma das seguintes condições abaixo:

1. β depende de α em Π , e β é premissa menor de uma aplicação da regra $\vee E$, que possui premissa maior da forma $(\alpha \vee \gamma)$ ou $(\gamma \vee \alpha)$, e β é a primeira ou segunda premissa menor da referida aplicação, respectivamente;
2. β depende de α em Π , e β é premissa de uma aplicação da regra $I \rightarrow$, que possui conclusão $\alpha \rightarrow \beta$;
3. β depende de α em Π , β é da forma \perp e é premissa de uma aplicação da regra $\perp \neg$ ou $\perp \sim$, e α é da forma $\neg \gamma$ ou $\sim \gamma$, respectivamente, com conclusão γ ;
4. β depende de α em Π , β é da forma \perp e é premissa de uma aplicação da regra $\perp \neg$ ou $\perp \sim$, e α é da forma $\neg \gamma$ ou $\sim \gamma$, respectivamente, com conclusão γ ;
5. β depende de α em Π , e β é premissa menor de uma aplicação da regra $E?$, cuja premissa maior é da forma $\alpha?$, e α é top-fórmula de alguma árvore plausível dependente de α em π ;

Observe que \mathfrak{F} é uma função parcial, ou seja, para uma dada derivação $\langle \Pi, \mathfrak{F} \rangle$ é possível que \mathfrak{F} não seja aplicável a algumas top-fórmulas.

A partir da definição da função de descarte \mathfrak{F} , as regras que possuem o descarte de hipóteses associado à sua aplicação terão as hipóteses a serem decartadas, por tal regra, denotadas da seguinte maneira:

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \quad \frac{[\alpha]^u}{\gamma} \Pi_2}{\gamma} u$$

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\exists x\alpha} \quad \frac{[\alpha^x]^u}{\gamma} \Pi_2}{\gamma} u$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \frac{[\alpha]^u [\beta]^v}{\gamma} \Pi_1 \quad \Pi_2}{\gamma} u, v$$

$$\frac{[\alpha]^u}{\frac{\Pi_1}{\beta}} u$$

$$\frac{[\alpha]^u}{\frac{\Pi_1}{\perp}} \frac{\perp}{\neg\alpha} u$$

$$\frac{[\alpha]^u}{\frac{\Pi_1}{\sim}} \frac{\perp}{\sim\alpha} u$$

$$\frac{[\neg\alpha]^u}{\frac{\Pi_1}{\perp}} \frac{\perp}{\alpha} u$$

$$\frac{[\sim\alpha]^u}{\frac{\Pi_1}{\perp}} \frac{\perp}{\alpha} u$$

Usaremos letras minúsculas do alfabeto latino i, j e k como um artifício da meta-linguagem para denotar classes de top-fórmulas descartáveis simultaneamente em uma mesma aplicação de regra de inferência. Observe, à direita da regra de inferência, a ocorrência do rótulo que determina a classe descartada. Quando quisermos nos referenciar ao descarte de uma única hipótese e não de um conjunto com uma ou mais, ao invés de letras do alfabeto latino, usaremos números inteiros. Assim, definidas as noções de quase-derivação e da função de descarte \mathfrak{F} podemos apresentar a noção de derivação no nosso sistema.

Definição 16. (*Dedução* $\langle \Pi, \mathfrak{F} \rangle$) *Seja Π uma quase-derivação e \mathfrak{F} uma função de descarte como definida acima, então, o par ordenado $\langle \Pi, \mathfrak{F} \rangle$ constitui uma dedução no sentido pretendido.*

A relação induzida pela derivação em $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ será denotada por \vdash_{NDLEI} e pode ser definida como: $\Gamma \vdash_{NDLEI} \alpha$ se e somente se existe uma dedução $\langle \Pi, \mathfrak{F} \rangle$ de conclusão α dependendo de $\Delta \subseteq \Gamma$.

2.3 Completude & Corretude

Nesta seção, apresentaremos uma prova de que o sistema em dedução natural proposto é correto e completo em relação à axiomática de LEI, considerando que:

1. Dizemos que o sistema é correto se, para Γ e α arbitrários, $\Gamma \vdash_{NDLEI} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$;
2. Dizemos que o sistema é completo se, para Γ e α arbitrários, $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$, então $\Gamma \vdash_{NDLEI} \alpha$;

2.3.1 Completude

A completude de \mathcal{ND}_{LEI} em relação LEI consiste em garantir que todos os axiomas que definem LEI são deriváveis no nosso sistema em dedução natural e que o referido sistema é fechado em relação à regra Modus Ponens (MP). Logo, qualquer seqüência de prova em LEI pode ser transformada em uma derivação em \mathcal{ND}_{LEI} , de modo que a relação de consequência lógica seja preservada.

Demonstração. A prova se dará por indução no comprimento de uma seqüência de prova $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ qualquer.

Seja α_n pertencente a Γ , logo, a uma derivação formada somente por α_n atende ao teorema.

No caso de α_n ser obtida através de instanciação de um dos esquemas de axioma de LEI ou através de uma aplicação da regra modus ponens (MP), as seguintes derivações atende ao teorema.

Axioma (\rightarrow -1)

$$\frac{\frac{\alpha^1}{\beta \rightarrow \alpha}}{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)} 1$$

Axioma (\rightarrow -2)

$$\frac{\frac{\frac{\alpha^1 \quad (\alpha \rightarrow \beta)^2}{\beta} \quad \frac{\alpha^3 \quad (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))^4}{\beta \rightarrow \gamma}}{\frac{\gamma}{\alpha \rightarrow \gamma} \text{ 1,3}} \quad \frac{(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \text{ 4}}{(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \text{ 2}}$$

Axioma (\wedge -1)

$$\frac{\frac{(\alpha \wedge \beta)^1}{\alpha}}{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha} \text{ 1}$$

Axioma (\wedge -2)

$$\frac{\frac{(\alpha \wedge \beta)^1}{\beta}}{(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta} \text{ 1}$$

Axioma (\wedge -3)

$$\frac{\frac{\frac{\alpha^1 \quad \beta^2}{\alpha \wedge \beta}}{\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)} \text{ 2}}{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))} \text{ 1}$$

Axioma (\vee -1)

$$\frac{\frac{\alpha^1}{\alpha \vee \beta}}{\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)} \text{ 1}$$

Axioma (\vee -2)

$$\frac{\frac{\beta^1}{\alpha \vee \beta}}{\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)} \text{ 1}$$

Axioma (\vee -3)

$$\frac{(\alpha \vee \beta)^1 \quad \frac{\frac{\alpha^2 \quad (\alpha \rightarrow \gamma)^3}{\gamma} \quad \frac{\beta^4 \quad (\beta \rightarrow \gamma)^5}{\gamma} \text{ 2,4}}{\frac{\gamma}{(\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma} \text{ 1}} \quad \frac{(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \text{ 5}}{(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)) \text{ 3}}$$

Axioma (\rightarrow -3)

$$\frac{\frac{\frac{\alpha^1 \sim \alpha^2}{\frac{\perp}{\beta}}}{\alpha \rightarrow \beta} \quad 1 \quad \frac{((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)^3}{\alpha} \sim \alpha^4}{\frac{\frac{\perp}{\alpha} \quad 2,4}{((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha} \quad 3}$$

Axioma(\forall -1)

$$\frac{\frac{\forall x \alpha^1}{\alpha_t^x}}{\forall x \alpha \rightarrow \alpha_t^x} \quad 1$$

Axioma(\forall -2)

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \alpha^1}{\alpha_t^x} \quad \frac{\forall x(\alpha \rightarrow \beta)^2}{\alpha_t^x \rightarrow \beta_t^x}}{\frac{\beta_t^x}{\forall x \beta}}}{\frac{(\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)}{\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)} \quad 1} \quad 2$$

Axioma(\forall -3)

$$\frac{\frac{\alpha_t^{x1}}{\forall x \alpha}}{\alpha \rightarrow \forall x \alpha} \quad 1$$

Observação 1. x não ocorre livre em α , e t não ocorre livre em α .

Axioma(\forall -4)

$$\frac{\frac{\Gamma}{\Pi_1} \quad \alpha_t^x}{\forall x \alpha}$$

Observação 2. ou $t \equiv x$ ou t não ocorre livre em α , e t não ocorre livre em nenhuma fórmula γ , $\gamma \in \Gamma$.

Axioma(\exists -1)

$$\frac{\frac{\alpha_t^{x1}}{\exists x \alpha}}{\alpha_t^x \rightarrow \exists x \alpha} \quad 1$$

Axioma(\exists -2)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x(\alpha \rightarrow \beta)^3}{\alpha_t^{x2}}}{\alpha_t^x \rightarrow \beta_t^x}}{\beta_t^x}}{\exists x\alpha^1}}{\exists x\beta}^2}{\exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta}^1}{\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta)}^3$$

Observação 3. ou $t \equiv x$ ou t não ocorre livre em α , e t não ocorre livre em $\exists x\beta$ e nem em nenhuma fórmula da qual $\exists x\beta$ dependa, a menos das ocorrências de α_t^x .

Axioma(\exists -3)

$$\frac{\frac{\exists x\alpha^1}{\alpha_t^{x2}}}{\alpha_t^x}^2}{\exists x\alpha \rightarrow \alpha_t^x}^1$$

Observação 4. ou $t \equiv x$ ou t não ocorre livre em α , e t não ocorre livre em nenhuma fórmula da qual $\exists x\beta$ dependa, a menos das ocorrências de α_t^x .

Axioma(\neg -1)

$$\frac{\frac{\frac{\neg(\alpha \rightarrow \beta)^1}{\alpha \wedge \neg\beta}}{\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)}^1}{\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)}^2 \quad \frac{\frac{\frac{\alpha \wedge \neg\beta^2}{\neg(\alpha \rightarrow \beta)}}{(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)}^2}{\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)}^2$$

Axioma(\neg -2)

$$\frac{\frac{\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)^1}{(\neg\alpha \vee \neg\beta)}}{\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)}^1}{\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)}^2 \quad \frac{\frac{\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta^2}{\neg(\alpha \wedge \beta)}}{\neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)}^2}{\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)}^2$$

Axioma(\neg -3)

$$\frac{\frac{\frac{\neg(\alpha \vee \beta)^1}{(\neg\alpha \wedge \neg\beta)}}{\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)}^1}{\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)}^2 \quad \frac{\frac{\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta^2}{\neg(\alpha \wedge \beta)}}{(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta)}^2}{\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)}^2$$

Axioma(\neg -4)

$$\frac{\frac{\frac{\neg\neg\alpha^1}{\alpha}}{\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha}^1 \quad \frac{\frac{\alpha^2}{\neg\neg\alpha}}{\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha}^2}{\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha}$$

Axioma(\neg -5)

$$\frac{\frac{\frac{\neg\forall x\alpha^1}{\exists x\neg\alpha}}{\neg\forall x\alpha \rightarrow \exists x\neg\alpha}^1 \quad \frac{\frac{\exists x\neg\alpha^2}{\neg\forall x\alpha}}{\exists x\neg\alpha \rightarrow \neg\forall x\alpha}^2}{\neg\forall x\alpha \leftrightarrow \exists x\neg\alpha}$$

Axioma(\neg -6)

$$\frac{\frac{\frac{\neg\exists x\alpha^1}{\forall x\neg\alpha}}{\neg\exists x\alpha \rightarrow \forall x\neg\alpha}^1 \quad \frac{\frac{\forall x\neg\alpha^2}{\neg\exists x\alpha}}{\forall x\neg\alpha \rightarrow \neg\exists x\alpha}^2}{\neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha}$$

Axioma(?-1)

$$\frac{\frac{\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow B}{B} \quad \frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \neg B}{\neg B}}{B \wedge \neg B}}{\frac{\neg\alpha}{(\alpha \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\alpha}}}{(\alpha \rightarrow B) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg\alpha)}$$

Axioma(?-2)

$$\frac{\frac{\alpha}{\alpha?}}{\alpha \rightarrow \alpha?}$$

Axioma(?-3)

$$\frac{\frac{\alpha??^1 \quad \alpha?^2}{\alpha?}^2}{\alpha?? \rightarrow \alpha?}^1$$

Axioma(?-4)

$$\frac{\frac{\frac{\alpha? \quad \alpha? \rightarrow \beta?}{\beta?}}{(\alpha? \rightarrow \beta?)?} \quad \frac{\alpha? \rightarrow \beta?}{\alpha? \rightarrow \beta?}}{(\alpha? \rightarrow \beta?)? \rightarrow (\alpha? \rightarrow \beta?)}^1$$

Axioma(?-5)

$$\frac{\frac{\alpha \vee \beta}{(\alpha \vee \beta)?^1} \quad \frac{\frac{\frac{\alpha}{\alpha?}}{(\alpha? \vee \beta?)}}{(\alpha? \vee \beta?)}}{\frac{\frac{\frac{\beta}{\beta?}}{(\alpha? \vee \beta?)}}{(\alpha? \vee \beta?)}}{(\alpha? \vee \beta?)}}}{\frac{(\alpha? \vee \beta?)}{(\alpha \vee \beta)? \rightarrow (\alpha? \vee \beta?)^1}}$$

Axioma(?-6)

$$\frac{\frac{\frac{(\neg \alpha)?}{\neg(\alpha?)}}{(\neg \alpha)? \rightarrow \neg(\alpha?)}}{\frac{\frac{\frac{\neg(\alpha?)}{(\neg \alpha)?}}{(\neg \alpha)? \rightarrow (\neg \alpha)?}}{(\neg \alpha)? \leftrightarrow \neg(\alpha?)}}$$

Axioma(?-7)

$$\frac{\frac{(\exists x \alpha)?}{(\exists x \alpha)?} \quad \frac{\frac{\frac{\alpha}{\alpha?}}{(\exists x(\alpha?))}}{(\exists x(\alpha?))}}{\frac{\frac{\frac{\frac{\alpha}{\alpha?}}{(\exists x(\alpha?))}}{(\exists x(\alpha?))}}{(\exists x \alpha)? \rightarrow \exists x(\alpha?)}}$$

Axioma(?-8)

$$\frac{\frac{\alpha^{?1}}{\alpha?} \quad \frac{\frac{\frac{\alpha^2}{\sim \sim \alpha}}{(\sim \sim \alpha)?}}{(\sim \sim \alpha)?}}{\frac{\frac{\frac{\frac{\alpha^2}{\sim \sim \alpha}}{(\sim \sim \alpha)?}}{(\sim \sim \alpha)?}}{\alpha? \rightarrow (\sim \sim \alpha)?^1}}$$

Axioma(?-9)

$$\frac{\frac{(\alpha? \wedge \sim(\beta?))^1}{\alpha?} \quad \frac{\frac{(\alpha)^2}{\alpha \wedge \sim \beta} \quad \frac{\frac{(\alpha? \wedge \sim(\beta?))^3}{\sim(\beta?)} \quad \frac{(\beta)^4}{\beta?}}{\sim \beta}}{\frac{\frac{\frac{\frac{\alpha \wedge \sim \beta}{(\alpha \wedge \sim \beta)?}}{(\alpha \wedge \sim \beta)?}}{(\alpha \wedge \sim \beta)?}}{\alpha? \wedge \sim(\beta?) \rightarrow (\alpha \wedge \sim \beta)?^1}}$$

□

2.3.2 Corretude

A corretude será provada por indução no comprimento l de uma dedução Π qualquer em dedução natural, $l(\Pi)$. Os conectivos para a plausibilidade terão um tratamento diferenciado, mais especificamente, as regras E? e I!.

Demonstração. Seja $\langle \Pi, \mathfrak{F} \rangle$ uma dedução, de comprimento $l(\Pi) = n$, de α a partir de Γ , isto é, $\Gamma \vdash_{ND_{LEI}} \alpha$. Queremos provar, então, que $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$. Considere o teorema válido para deduções cujo o comprimento é k , para $k < n$. \square

I \wedge)

- (1) H.I.: $\Gamma_1 \vdash_{LEI} \alpha$ e $\Gamma_2 \vdash_{LEI} \beta$
- (2) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$
- (3) $\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$
- (4) $\alpha \wedge \beta$

E \wedge)

- (1) H.I.: $\Gamma_1 \vdash_{LEI} \alpha \wedge \beta$
- (2) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
- (3) α

I \rightarrow)

- (1) H.I.: $\Gamma \vdash_{LEI} \beta$
- (2) $\Gamma - \{\alpha\} \vdash_{LEI} \alpha \rightarrow \beta$

E \rightarrow)

- (1) *H.I.* : $\Gamma_1 \vdash_{LEI} \alpha \wedge \beta$
- (2) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
- (3) β

IV₁

- (1) *H.I.*: $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$
- (2) $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} (\alpha \vee \beta)$

IV₂

- (1) *H.I.*: $\Gamma \vdash_{LEI} \beta$
- (2) $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} (\alpha \vee \beta)$

EV

- (1) *H.I.*: $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha \vee \beta$ e $\Gamma_1 \vdash_{LEI} \gamma, \Gamma_2 \vdash_{LEI} \gamma$
- (2) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
- (3) $\Gamma_1 - \{\alpha\} \vdash_{LEI} \alpha \rightarrow \gamma$
- (4) $\Gamma_2 - \{\beta\} \vdash_{LEI} \beta \rightarrow \gamma$
- (5) $((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$
- (6) $((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma)$
- (7) $\Gamma, \Gamma_1 - \{\alpha\}, \Gamma_2 - \{\beta\} \vdash_{LEI} \gamma$

IV)

- (1) H.I.: $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha_t^x$
- (2) $\alpha_t^x \rightarrow \forall x\alpha$,
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \forall x\alpha$

E \forall)

- (1) H.I. : $\Gamma \vdash_{LEI} \forall x\alpha$
- (2) $\forall x\alpha \rightarrow \alpha_t^x$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha_t^x$

□

E \exists)

- (2) $\alpha_t^x \rightarrow \exists x\alpha$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \exists x\alpha$

E \exists)

- $\Gamma_1 \vdash_{LEI} \gamma$
- (2) $\alpha_t^x \rightarrow \exists x\alpha$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \exists x\alpha$

I!)

1. H.I.: $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$, tal que existe uma ocorrência de fórmula γ_i^* , que atende às condições apresentadas na restrição sobre aplicação de I!, em cada conexão entre α e uma hipótese da qual α depende (considere Γ^* o conjunto de tais ocorrências de fórmulas);

2. H.I.: $\Gamma^* \vdash_{LEI} \alpha$, representando a derivação $\langle \Pi', \mathfrak{F}' \rangle$, em que $\langle \Pi, \mathfrak{F} \rangle$, Π' é obtida de Π através da remoção de todas as ocorrências de fórmulas acima de γ_i^* , para cada ocorrência de γ_i^* em Γ^* , e $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, para os pares que contenham alguma ocorrência de γ_i^* como domínio;
3. $\alpha \vdash_{LEI} \alpha!$, instância do axioma 33 (?-10);
4. $\Gamma^* \vdash_{LEI} \alpha!$, modus ponens (2,3);
5. $\vdash_{LEI} \gamma_1^* \rightarrow (\gamma_2^* \rightarrow \dots (\gamma_n^* \rightarrow \alpha!)) \dots$, após sucessivas aplicações do teorema da dedução (4);
6. $\Gamma \vdash_{LEI} \gamma_i^*$, para cada ocorrência contida Γ^* , por H.I.;
7. $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha!$, após sucessivas aplicações de modus ponens (5,6)

E!)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} \sim ((\sim \alpha)?)$ hipótese indutiva
- (2) $\Gamma, \sim \alpha \vdash_{LEI} \sim \alpha$
- (3) $\sim \alpha \rightarrow (\sim \alpha)?$
- (4) $\Gamma, \sim \alpha \vdash_{LEI} (\sim \alpha)?$
- (5) $\Gamma, \sim \alpha \vdash_{LEI} \sim ((\sim \alpha)?)$
- (6) $(\sim \alpha \rightarrow (\sim \alpha)?) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \sim ((\sim \alpha)?) \rightarrow \sim (\sim \alpha))$
- (7) $\Gamma \vdash_{LEI} \sim (\sim \alpha)$ teorema da dedução (4,5), e, posteriormente, modus ponens (6)
- (8) $\sim (\sim \alpha) \rightarrow \alpha$ teorema nn (cf. apêndice x)
- (9) $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$ modus ponens (7,8)

I?)

- (1) H.I. : $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$
- (2) $\alpha \rightarrow \alpha?$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha?$

E?)

Para esta regra, prosseguiremos com a prova de modo ligeiramente diferente. De início, será provado o caso em que a premissa menor de uma aplicação de E? determina uma única árvore plausível dependente de α .

Caso base - Premissa menor determina Árvore Plausível

1. H.I.: $\Gamma_1 \vdash_{LEI} \alpha?$;
2. H.I.: $\Gamma_2, \alpha \vdash_{LEI} \gamma$, representando a árvore plausível determinada por γ ;
3. $\Gamma_2 \vdash_{LEI} \alpha \rightarrow \gamma$, aplicação do teorema da dedução (2);
4. $\Gamma_2, (\alpha \vdash_{LEI} \gamma)!$, como na prova da corretude da regra I!, já que a árvore plausível atende às condições de aplicação;
5. $\vdash_{LEI} (\alpha \vdash_{LEI} \gamma)! \rightarrow (\alpha? \vdash_{LEI} \gamma?)$, instância do teorema 5;
6. $\Gamma_2 \vdash_{LEI} \alpha? \rightarrow \gamma?$
7. $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{LEI} \gamma?$, modus ponens (1,6);
8. $\gamma? \rightarrow \gamma$, pois γ é ?-fechada pela H.I.;
9. $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash_{LEI} \gamma$, modus ponens (7,8);

□

Com a prova acima, garante-se que para uma única árvore plausível, que seja determinada pela premissa menor da aplicação da regra E? em destaque, a regra é correta. Contudo, a regra proposta trabalha com um número ilimitado de árvores plausíveis, as quais podem ser determinadas por qualquer ocorrência de fórmula contida na árvore de prova determinada pela premissa menor. Tal qualidade é que efetivamente permitirá o uso das reduções permutativas de maneira usual.

A prova para a versão completa da regra será por indução no número de árvores plausíveis dependentes de α . Inicialmente, escolhe-se uma árvore plausível qualquer em Π a partir da ocorrência de fórmula que a determina. Aplica-se o caso base nesta árvore, que por sua vez deixa de ser uma árvore plausível dependente de α , já que as ocorrências de α que se apresentavam como top-fórmulas nesta árvore já foram descartadas. Com um menor número de árvores plausíveis, pela hipótese indutiva, a regra é aplicável.

I₋₁)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} (\alpha \wedge \neg\beta)$
- (2) $(\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

E₋₁)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
- (2) $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

I₋₂)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- (2) $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha \wedge \beta)$

E₋₂)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha \wedge \beta)$
- (2) $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

I₋₃)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha \vee \beta)$
- (2) $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

E₋₃)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- (2) $(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta)$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha \vee \beta)$

I₋₄)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$
- (2) $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg\neg\alpha$

E₋₄)

(1) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg\neg\alpha$

(2) $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$

(3) $\Gamma \vdash_{LEI} \alpha$

I₋₅)

(1) $\Gamma \vdash_{LEI} \exists x\neg\alpha$

(2) $\exists x\neg\alpha \leftrightarrow \neg\forall x\alpha$

(3) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg\forall x\alpha$

E₋₅)

(1) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg\forall x\alpha$

(2) $\neg\forall x\alpha \leftrightarrow \exists x\neg\alpha$

(3) $\Gamma \vdash_{LEI} \exists x\neg\alpha$

I₋₆)

(1) $\Gamma \vdash_{LEI} \forall x\neg\alpha$

(2) $\forall x\neg\alpha \leftrightarrow \neg\exists x\alpha$

(3) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg\exists x\alpha$

E₋₆)

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg \exists x \alpha$
- (2) $\neg \exists x \alpha \leftrightarrow \forall x \neg \alpha$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} \forall x \neg \alpha$

I_{¬7})

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} \neg(\alpha?)$
- (2) $\neg(\alpha?) \leftrightarrow (\neg\alpha)?$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} (\neg\alpha)?$

E_{¬7})

- (1) $\Gamma \vdash_{LEI} (\neg\alpha)?$
- (2) $(\neg\alpha)? \leftrightarrow (\neg\alpha)?$
- (3) $\Gamma \vdash_{LEI} (\neg\alpha)?$

Dadas as definições necessárias e a garantia da equivalência do cálculo proposto à axiomática apresentada, prosseguiremos no capítulo subsequente com a prova da normalização fraca para $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{T}}$.

Capítulo 3

Normalização Fraca para ND_{LEI}

Iniciaremos neste capítulo o estudo sobre a normalização fraca em ND_{LEI} . Na primeira seção, definiremos o conceito de pretendido de normalização e prova normal. Apresentaremos, também, alguns conceitos acessórios relativos à prova da normalização. Na segunda seção, apresentaremos as reduções que constituirão o procedimento de redução das derivações do sistema ND_{LEI} até a obtenção de provas normais. O esquema geral de prova seguirá, *mutatis mutandis*, aquele proposto em Massi [10], o qual foi originariamente utilizado para a demonstração da propriedade de normalização fraca para a Lógica Clássica em dedução natural.

3.1 Definições Gerais

Inicialmente, faremos de uma pequena simplificação na notação utilizada: ao invés de nos referirmos a uma derivação com a notação $\langle \Pi, \mathfrak{F} \rangle$, tal que Π constitui uma quase-derivação e \mathfrak{F} uma função de descarte, utilizaremos apenas Π para denotar tal derivação.

No capítulo anterior, definimos a noção de conexão, a qual foi útil na definição das restrições sobre certas aplicações de regras de inferência e, também, na definição

da função de descarte. Porém iremos particularizar a noção de conexão com o intuito de obter o conceito de segmento, posteriormente o de segmento máximo, como em Prawitz [19].

Definição 17. (Segmento σ) *Um segmento em uma derivação Π é uma seqüência $\sigma = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, de tamanho n , de consecutivas ocorrências de fórmulas em uma conexão de Π , tal que:*

1. α_1 não é uma conclusão de aplicação de $E\vee$, $E\exists$ e $E?$;
2. α_i , ($i < n$), é uma premissa menor de uma aplicação de $E\vee$, $E\exists$ ou $E?$;
3. α_n não é uma premissa menor de uma aplicação de $E\vee$, $E\exists$ ou $E?$.

Observe que todas as ocorrências de fórmulas em um segmento σ qualquer são da mesma forma, e que o conceito de segmento máximo apresenta-se como uma generalização da noção de fórmula máxima, em virtude de algumas regras ($E\vee$, $E\exists$, $E?$) “mascararem” a existência de uma fórmula máxima [19].

Estenderemos a noção de segmento máximo [19, 10], adaptando-a para ND_{LEI} como se segue.

Definição 18. (Segmento Máximo σ) *Seja $\sigma = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ um segmento qualquer. Então, segundo o comprimento de σ , podemos classificá-lo como:*

(a) $n = 1$

1. $\alpha_1 (= \alpha_n)$ é conclusão de uma aplicação de regra de introdução ou de regra do absurdo intuicionista¹ e é, ao mesmo tempo, premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação;

¹A regra que representa o absurdo intuicionista é uma aplicação $\perp \neg$ ou $\perp \sim$ que não descarta qualquer hipótese. Uma definição mais precisa sobre o assunto pode ser encontrada em [19].

2. $\alpha_1 (= \alpha_n)$ é conclusão de uma aplicação do absurdo clássico ($\perp \sim$), ou do absurdo paraconsistente ($\perp \neg$), e é, ao mesmo tempo, premissa maior de uma aplicação de uma regra de eliminação;
3. $\alpha_1 (= \alpha_n)$ é conclusão de uma aplicação do absurdo clássico ($\perp \sim$), ou paraconsistente ($\perp \neg$) e é, ao mesmo tempo, premissa menor de $E\sim$ ou $E\neg$, respectivamente, tal que a premissa maior desta última é uma top-fórmula da forma $\sim \alpha$ (no caso de $E\sim$) ou $\neg \alpha$ (no caso de $E\neg$);

(b) $n > 1$

1. α_n é conclusão de uma aplicação $E\vee$, $E\exists$ ou $E?$ e é, ao mesmo tempo, premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação;
2. α_n é conclusão de uma aplicação de $E\vee$, $E\exists$ ou $E?$ e é, ao mesmo tempo, premissa menor de uma aplicação de $E\sim$ ou $E\neg$, cuja premissa maior é uma top-fórmula da forma $\sim \alpha$, or $\neg \alpha$, respectivamente.

Como pode ser observado, existem alguns segmentos máximos que fogem à idéia original motivada pelo princípio da inversão [19]; tais segmentos não terminam com uma premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação, não caracterizando, assim, um desvio na derivação, ou seja, aplicação dispensável. Contudo, tais segmentos devem ser removidos, pois perturbam a remoção dos segmentos máximos tradicionais. Portanto, por não representarem essencialmente um segmento máximo, na definição de grau de uma derivação, tais segmentos não serão considerados.

Definição 19. (Grau de uma derivação) Denotamos por $d(\Pi)$ o grau de uma derivação Π , que é definido como sendo $d(\Pi) = \max\{d(\sigma)$, tal que σ é um segmento máximo do tipo (a.1), (a.2) ou (b.1)}.

Se caso Π não contenha segmentos máximos, ou se não contém segmentos máximos (a.1),(a.2) ou (b.1), então $d(\Pi) = 0$. Os segmentos máximos considerados na definição do grau de Π são aqueles segmentos máximos definidos por Prawitz [19].

Aplicações das regras EV , $E\exists$ e $E?$ que não descartam qualquer ocorrência de fórmulas serão classificadas como *aplicações redundantes*, pois, trivialmente, tal aplicação é desnecessária para a obtenção de conclusão esperada. Dessa forma, podemos, então, definir o nosso conceito de derivação normal.

Definição 20. (*Derivação Normal*) *Uma derivação Π qualquer é uma derivação normal se e somente se Π não contiver segmentos máximos (de qualquer tipo) nem aplicações redundantes de regras de inferência.*

Na seção seguinte, apresentaremos estratégias de remoção para cada um dos segmentos máximos definidos.

3.2 Reduções

Usualmente, as reduções são classificadas em três tipos: reduções operacionais, reduções permutativas e reduções do absurdo. As reduções operacionais e as permutativas, que dizem respeito aos conectivos da linguagem da lógica clássica são introduzidas por Prawitz [19]. Acrescentamos, às mesmas, as reduções correspondentes às constantes que denotam as plausibilidades, “?” e “!”. Em todas as reduções abaixo, a derivação à direita é uma *redução imediata* da derivação à esquerda. Denotaremos a relação de reducibilidade por $\triangleright\triangleright$. Denotaremos por R a regra de eliminação que tem como premissa maior a última ocorrência de fórmula do segmento máximo referenciado.

- Reduções Operacionais

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_1} \frac{\Pi_2}{\alpha_2}}{\frac{\alpha_n}{\Pi_3}} \quad (n = 1, 2) \quad \triangleright_i \quad \Pi' \equiv \frac{\Pi_n}{\Pi_3} \quad (3.1)$$

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \frac{[\alpha]^i \Pi_2}{\beta}}{\frac{\beta}{\Pi_3}} \quad \triangleright_i \quad \Pi' \equiv \frac{\Pi_1}{\frac{[\alpha]}{\Pi_2} \frac{\beta}{\Pi_3}} \quad (3.2)$$

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_n} \frac{[\alpha_2]^i \Pi_2}{\gamma} \frac{[\alpha_3]^j \Pi_3}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad (n = 2, 3) \quad \triangleright_i \quad \Pi' \equiv \frac{\Pi_1}{\frac{[\alpha_n]}{\Pi_n} \frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad (n = 2, 3) \quad (3.3)$$

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_2} \frac{\Pi_2}{\gamma} \frac{[\alpha_3]^j \Pi_3}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad \triangleright_i \quad \Pi' \equiv \frac{\Pi_2}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad (3.4)$$

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_3} \frac{[\alpha_2]^i \Pi_2}{\gamma} \frac{\Pi_3}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad \triangleright_i \quad \Pi' \equiv \frac{\Pi_3}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad (3.5)$$

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_2} \frac{\Pi_2}{\gamma} \frac{\Pi_3}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad \triangleright_i \quad \Pi' \equiv \frac{\Pi_2}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad (3.6)$$

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\perp} \quad \frac{[\alpha_2]^i}{\Pi_2} \quad \frac{[\alpha_3]^j}{\Pi_3}}{\alpha_2 \vee \alpha_3} \quad \frac{\gamma}{\Pi_4} \quad i \quad \triangleright \triangleright_i \quad \Pi' \equiv \frac{\Pi_1}{\frac{\perp}{[\alpha_2]}} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma} \quad \frac{\Pi_3}{\Pi_4} \quad (3.7)$$

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha}}{\forall x \alpha_x^a} \quad \frac{\gamma}{\Pi_3} \quad i \quad \triangleright \triangleright_i \quad \frac{\Pi_{1t}^a}{(\alpha_t^a)} \quad \frac{\Pi_3}{\Pi_3} \quad (3.8)$$

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_t^x} \quad \frac{[\alpha_a^x]^i}{\Pi_2}}{\exists x \alpha} \quad \frac{\gamma}{\Pi_3} \quad i \quad \triangleright \triangleright_i \quad \frac{\Pi_1}{[\alpha_t^x]} \quad \frac{\Pi_{2t}^a}{\gamma} \quad \frac{\Pi_3}{\Pi_3} \quad (3.9)$$

Observação 5. $\exists x \alpha$ é premissa maior da regra de eliminação destacada.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{[\alpha]^i}{\Pi_2}}{\alpha?} \quad \frac{\gamma}{\Pi_3} \quad i \quad \triangleright \triangleright_i \quad \frac{\Pi_1}{[\alpha]} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma} \quad \frac{\Pi_3}{\Pi_3} \quad (3.10)$$

Observação 6. $\alpha?$ é premissa maior da regra de eliminação destacada.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\alpha!}{\alpha}}{\Pi_2} \quad i \quad \triangleright \triangleright_i \quad \frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\Pi_2}{\Pi_2} \quad (3.11)$$

- Reduções do Absurdo Intuicionista

$$\mathbf{R} \frac{\frac{\Pi_1}{\perp} \quad \Sigma_2}{\alpha} \quad \frac{\gamma}{\Pi_4} \quad i \quad \triangleright \triangleright_i \quad \frac{\Pi_1}{\perp} \quad \frac{\Pi_4}{\Pi_4} \quad (3.12)$$

Observação 7. R é uma regra de eliminação qualquer, exceto $E\vee$; e Σ_2 pode ocorrer à esquerda de α .

- Reduções Permutativas

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\gamma} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\tau} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad (3.13)$$

Observação 8. R é uma regra de eliminação qualquer, e γ é premissa maior da referida eliminação; Σ_3 pode ocorrer à esquerda de γ .

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\gamma} \quad \frac{\Pi_3}{\gamma}}{\tau} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\tau} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad \frac{\frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau}}{\tau} \quad (3.14)$$

Observação 9. R é uma regra de eliminação qualquer, e γ é premissa maior da referida eliminação; Σ_3 pode ocorrer à esquerda de γ .

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\exists x \alpha} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\gamma} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\exists x \alpha} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\tau} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad \frac{\Pi_3}{\tau} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad (3.15)$$

Observação 10. γ é premissa maior de R .

- Reduções para as regras especiais

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\Pi_2}{\beta}}{\beta} \quad \frac{\Pi_3}{\alpha}}{\alpha} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\Pi_2}{\alpha}}{\alpha} \quad (3.16)$$

Observação 11. Neste passo, “I” denota uma aplicação de $I_{n\rightarrow}$, e “E” denota uma aplicação de regra $E_{n\rightarrow}$, $1 \leq n \leq 7$.

- Reduções do Absurdo Paraconsistente

$$\text{R} \frac{\frac{[\neg\alpha]^i}{\Pi_1} \perp}{\alpha} \Sigma_2}{\gamma} i \quad \triangleright \triangleright_i \quad \text{R} \frac{\frac{\alpha^j \Sigma_2}{\gamma} \sim \gamma^k}{\frac{\perp}{[\neg\alpha]^j} \Pi_1^*} \frac{\perp}{\gamma} k} \quad (3.17)$$

$$\Pi_1^* = \Pi_1 - \frac{\Pi_n}{\alpha} \frac{\perp}{\neg\alpha^i} + \frac{\Pi_n}{\alpha} \frac{\Sigma_2}{\gamma} \sim \gamma^k$$

Observação 12. α é premissa maior de R. O mesmo procedimento de redução é usado para remover segmentos máximos deste tipo resultantes de uma aplicação de $\perp \sim$ (como declarado na definição de segmento máximo). Σ_2 pode ocorrer à esquerda de α

- Redução Auxiliar 1

$$\text{R} \frac{\frac{[\neg A]^j}{\Pi_1} \perp}{A} \neg A}{\perp} \quad \triangleright \triangleright_i \quad \frac{\Pi_1}{\perp} \quad (3.18)$$

Observação 13. O mesmo procedimento de redução é usado para eliminar segmentos máximos deste tipo resultantes de uma aplicação de $\perp \sim$ e que são premissa menor de uma aplicação de $E \sim$ (como apresentado na definição de segmento máximo).

- Redução Auxiliar 2

$$\frac{\frac{[\neg\alpha]^j}{\Pi_1} \quad \frac{\perp}{\alpha}^j \quad \sim \alpha}{\perp}}{\perp} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\alpha^k \quad \sim \alpha}{\perp}}{\frac{[\neg\alpha]^k}{\Pi_1^*}} \quad \perp} \quad (3.19)$$

3.19

$$\Pi_1^* = \Pi_1 - \frac{\Pi_n}{\alpha} \frac{\neg\alpha^j}{\perp} + \frac{\Pi_n}{\alpha} \frac{\sim \alpha}{\perp}$$

Observação 14. *O mesmo procedimento de redução é usado para eliminar segmentos máximos deste tipo resultantes de uma aplicação de \perp_{\sim} e que são premissa menor de uma aplicação de E_{\neg} (como apresentado na definição de segmento máximo).*

- Redução Auxiliar 3

$$\frac{\frac{[\sim A]^j}{\Pi_1} \quad \frac{\perp}{A}^j \quad \neg A}{\perp}}{\perp} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{A^k \quad \neg A}{\perp}}{\frac{[\sim A]^k}{\Pi_1^*}} \quad \perp} \quad (3.20)$$

$$\Pi_1^* = \Pi_1 - \frac{\Pi_n}{A} \frac{\sim A^j}{\perp} + \frac{\Pi_n}{A} \frac{\neg A}{\perp}$$

- Reduções Permutativas Auxiliares

–

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \quad \frac{[\alpha]^i}{\Pi_2}}{\gamma} \quad \frac{\gamma}{\perp}^i \quad \Pi_3}{\mathbf{R}} \quad \perp}{\perp} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \quad \frac{[\alpha]^i}{\Pi_2}}{\gamma} \quad \Pi_3}{\mathbf{R}} \quad \frac{\perp}{\perp}^i}{\perp} \quad (3.21)$$

Observação 15. γ é premissa menor de R e Π_3 é uma top-fórmula da forma $\sim \gamma, \neg\gamma$.

–

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha \vee \beta} \quad \frac{\frac{[\alpha]^i [\beta]^j}{\Pi_2 \quad \Pi_3} \quad \gamma}{\gamma} \quad i,j}{\tau} \quad \Pi_3}{R}}{\tau} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad R \quad \frac{[\alpha]^i}{\Pi_2} \quad \Sigma_3}{\tau} \quad R \quad \frac{[\beta]^j}{\Pi_3} \quad \tau}{\tau} \quad \Pi_3}{\tau} \quad i,j}{(3.22)}$$

Observação 16. γ é premissa menor de R e Π_3 é uma top-fórmula da forma $\sim \gamma, \neg\gamma$.

–

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\exists x \alpha} \quad \frac{[\alpha_a^x]^i}{\Pi_2} \quad \gamma}{\gamma} \quad i \quad \Pi_3}{\perp}}{\perp} \quad \triangleright_i \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\exists x \alpha} \quad \frac{[\alpha_a^x]^i}{\Pi_2} \quad \gamma}{\gamma} \quad \perp \quad i \quad \Pi_3}{\perp}}{\perp} \quad (3.23)$$

Observação 17. γ é premissa menor de R e Π_3 é uma top-fórmula da forma $\sim \gamma, \neg\gamma$.

Definição 21. (Redução imediata \triangleright_i) Uma derivação Π' é uma redução imediata de Π , se Π' é obtida de Π substituindo uma subárvore de Π por sua redução.

Definição 22. (Seqüência de Redução) Uma derivação Π se reduz a Π' , se existe uma seqüência de derivações $\Pi_1, \dots, \Pi_n, n \geq 1$, tal que:

- $\Pi_1 \equiv \Pi$;
- Π_{i+1} é uma redução imediata de Π_i ($i < n$);
- $\Pi_n \equiv \Pi'$;

É importante observar que a primeira apresentação de LEI em dedução natural não permitiria algumas das reduções ora definidas, como podemos verificar nos seguintes exemplos:

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \quad \frac{[\alpha]^u}{\Pi_2} \quad \gamma}{\gamma} \quad u \quad \gamma \rightarrow \tau}{\tau} \quad \triangleright \triangleright \quad \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \quad \frac{[\alpha]^u}{\Pi_2} \quad \gamma}{\gamma} \quad \tau}{\tau} \quad \gamma \rightarrow \tau \quad u$$

Na derivação em questão, teríamos, possivelmente, uma violação de uma das restrições anteriormente impostas sobre a aplicação da regra $E?$, sendo que a redução imediata apresentada não seria uma derivação no sistema apresentado no capítulo 2, a saber: é possível que τ não fosse $?$ -fechada, propriedade esta que é uma exigência para que a aplicação da regra $E?$, em sua versão anterior, seja válida.

Como pôde ser notado, a referida restrição não ocorre nesta nova versão da regra $E?$; mais especificamente, com o uso de uma função de descarte \mathfrak{F} adequada e com a implementação do conceito de *árvores plausíveis*, nenhuma restrição é imposta sobre a premissa menor para que se verifique, como válida ou não, uma aplicação desta regra de eliminação.

Assim, as reduções permutativas podem ser utilizadas sem modificações significativas, minimizando as complicações nos procedimentos relativos a estas reduções, que, normalmente, geram muitas dificuldades na elaboração de estratégias completas para a normalização de sistemas em dedução natural.

Outra conseqüência do sistema adotado neste trabalho é a de permitir que derivações possam ser unidas, fundidas sem que aplicações inválidas das regras de inferência surjam decorrentes destas fusões; ou seja, a transitividade presente em LEI é conservada no sistema em dedução natural $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$. O exemplo a seguir demonstra a situação:

$$\frac{\frac{\beta \quad \beta \rightarrow \alpha!}{\alpha!} \quad \frac{\frac{(\alpha!)^u}{\alpha} \quad \frac{(\alpha! \wedge \beta)^v}{\alpha!}}{\beta? \rightarrow \alpha} \quad \frac{(\alpha! \wedge \beta)^v}{\alpha!}}{\alpha! \vee (\alpha! \wedge \beta)} \quad \frac{\frac{(\alpha!)^u}{\alpha} \quad \frac{(\alpha! \wedge \beta)^v}{\alpha!}}{\beta? \rightarrow \alpha}}{(\beta? \rightarrow \alpha)!} \quad \frac{\frac{\beta \quad \beta \rightarrow \alpha!}{\alpha!}}{\beta \rightarrow \alpha}}{(\beta \rightarrow \alpha)!} \quad \triangleright \triangleright$$

Como se observa, na derivação à direita, que é a redução imediata da derivação da esquerda, a premissa $\beta \rightarrow \alpha$ da aplicação da regra de introdução I! não depende somente de ocorrências de fórmulas ?-fechada, o que, na versão anterior do sistema em dedução natural, não seria permitido.

Nesta nova versão, a aplicação em questão da regra I! é válida e correta segundo a axiomatização descrita, quando da apresentação de LEI, pois a ocorrência de $\alpha!$ atende à nova restrição proposta para a regra. Logo, com as modificações adotadas, as reduções não perturbam a corretude das derivações em $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$.

Outra observação necessária é que para que a nova restrição seja válida, proporcionando a corretude das novas regras relativas as plausibilidades "???" e "?!", é que as dependências, ou seja, as hipóteses das quais uma ocorrência de fórmula em uma derivação depende, não sejam alteradas. E tal propriedade é obtida com a definição da função de descarte \mathfrak{F} , que mantém essa relação, hipóteses das quais uma ocorrência de fórmula depende, constante em uma derivação, não importando qual seja a seqüência de redução realizada.

Caso adotássemos o procedimento convencional para o descarte de hipóteses teríamos a seguinte derivação resultante da redução acima:

$$\frac{(\beta)^u \quad \beta \rightarrow \alpha!}{\frac{\frac{\alpha!}{\alpha}}{\beta \rightarrow \alpha} \quad u} \quad \frac{\alpha!}{(\beta \rightarrow \alpha)!}$$

Nesta derivação, a ocorrência da fórmula $\alpha!$ tem mais dependências do que a premissa da aplicação da regra $I!$, o que não permite que cheguemos à conclusão $(\beta \rightarrow \alpha)!$, enquanto que a redução obtida quando do uso da função de descarte \mathfrak{F} , no primeiro exemplo, não modifica as relações de dependência, de forma que é possível derivarmos a conclusão em LEI a partir da transitividade da relação de consequência lógica $\vdash_{LEI}: \beta, \beta \rightarrow \alpha! \vdash_{LEI} \alpha!$ e $\alpha! \vdash_{LEI} (\beta \rightarrow \alpha)!$, que equivale a derivação apresentada no exemplo em destaque.

Na próxima seção, apresentaremos uma demonstração para o teorema da normalização fraca.

3.3 Normalização Fraca

Nesta seção, forneceremos uma prova direta (sintática) do teorema da normalização fraca para LEI, utilizando para isto das reduções definidas na seção anterior. O esquema de prova, como já mencionado anteriormente, seguirá a mesma estrutura proposta por Massi [10].

Inicialmente, alguns lemas serão demonstrados.

Lema 1. *Seja Π uma derivação em $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ de α a partir de Γ , $\Gamma \vdash_{\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}} \alpha$, tal que $d(\Pi) = n$ e todo o segmento máximo de grau n que contribui para o grau de Π é do tipo (a.1). Então, Π se reduz a uma derivação Π' de α a partir de $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Delta \vdash_{\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}} \alpha$, tal que $d(\Pi') < d(\Pi)$.*

Demonstração. A prova segue como em Prawitz [19] e decorre da observação direta dos procedimentos de redução definidos para os referidos segmentos máximos. A prova é realizada por intermédio de uma indução na soma dos comprimentos dos segmentos máximos de grau igual à $d(\Pi)$, escolhendo-se um segmento máximo que não contenha nenhum outro segmento máximo acima dele nem acima (ou que contenha) de alguma forma que ocorra ao lado do segmento máximo escolhido. \square

Lema 2. *Toda derivação Π tal que $d(\Pi) = 0$, reduz-se a uma derivação normal Π' .*

Demonstração. Se Π é normal, então $\Pi' \equiv \Pi$. Se Π não é normal, então o resultado é obtido usando como valor de indução para uma derivação Π :

$k =$ a soma dos comprimentos dos segmentos máximos de Π .

Escolha um segmento máximo σ em Π , tal que não exista outro segmento máximo acima dele ou acima de (ou que contenha) uma fórmula que ocorre ao lado da última fórmula de σ .

Seja Π_1 a redução de Π que elimina o segmento máximo σ . É fácil ver, a partir das reduções auxiliares 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22 e 3.23 que o valor de indução de Π_1 é menor que o valor de indução de Π . O resultado então é imediato. \square

Lema 3. (*Derivação crítica*) *Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash_{NDLEI} \beta$, tal que:*

1. $r(\Pi)$ é uma regra de eliminação, cuja premissa maior α é a última ocorrência de fórmula do único segmento máximo em Π ;
2. e $d(\Pi) > 0$.

Então Π se reduz a uma derivação Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash_{NDLEI} \beta$, tal que $d(\Pi') < d(\Pi)$.

Demonstração. A prova se dará por indução no comprimento de Π , $l(\Pi)$.

1. Se α é do tipo (a.1) - o resultado é obtido diretamente da reduções.

$$2. \text{ Se } \alpha \text{ é do tipo (b.1), e } \Pi \equiv \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{\gamma \vee \delta} \quad \frac{\Sigma_2}{\alpha} \quad \frac{\Sigma_3}{\alpha}}{\alpha} \quad u \quad \Sigma_4}{\tau}$$

Π se reduz a Π^* :

$$\Pi^* \equiv \frac{\frac{\Sigma_1}{\gamma \vee \delta} \quad \frac{\frac{\Sigma_2}{\alpha} \quad \Sigma_4}{\tau} \quad \frac{\frac{\Sigma_3}{\alpha} \quad \Sigma_4}{\tau}}{\tau} \quad u$$

Se $d(\Pi) < d(\Pi)$, então $\Pi^* \equiv \Pi'$. Se $d(\Pi^*) = d(\Pi)$, então pelo menos uma das sub-árvores de Π determinada por uma das premissas menores β , tem a forma do lema.

Suponhamos que as duas sub-árvores tenham a forma do lema, os outros casos são similares. Então, pela hipótese indutiva:

$$\frac{\Sigma_i \quad \Sigma_4}{\tau} \quad \triangleright \triangleright \quad \frac{\Pi_i}{\tau}, (i = 2, 3)$$

tal que $d(\Pi_i) < d(\Pi)$. Podemos então considerar Π' como

$$\Pi' \equiv \frac{\Sigma_1 \quad \frac{\Pi_2 \quad \Pi_3}{\tau}}{\gamma \vee \beta} \frac{\beta}{\tau} u$$

De forma que, certamente, $d(\Pi') < d(\Pi)$. Para os casos das reduções permutativas de $E\exists$ e $E?$, ou seja:

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1 \quad \frac{[\alpha_t^x]^i \quad \Pi_2}{\gamma}}{\exists x \alpha} \quad \Sigma_3}{\tau} i$$

ou

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1 \quad \frac{[\alpha]^i \quad \Pi_2}{\gamma}}{\alpha?} \quad \Sigma_3}{\tau} i$$

o estratégia é similar.

3. Se α é do tipo (a.2), então

$$\mathbf{R} \frac{\frac{[\neg A]^u \quad \Sigma_1}{\perp} \quad \Sigma_2}{A^u} \perp$$

que se reduz a

$$\Pi^* \equiv \frac{\mathbf{R} \frac{\alpha^i \quad \Sigma_1}{\gamma} \sim \gamma^j}{\frac{\perp}{[\neg \alpha]^i} \quad \frac{\Pi_1^*}{\perp} \quad \frac{\perp}{\gamma} j}$$

onde todas as partes de Π da forma

$$\frac{\Sigma_2}{\alpha} \frac{\neg\alpha}{\perp}$$

foram substituídas por

$$\frac{\Sigma_2}{\alpha} \frac{\Sigma_1}{\beta} \frac{\neg\beta}{\perp}$$

Os únicos segmento máximos que podem ocorrer em Π^* são todos do tipo (a.1) e (b.2) e os do primeiro tipo têm a forma de α . O resultado é obtido então do lema 1.

□

Teorema 7. *Seja Π uma derivação de $\Gamma \vdash_{NDLEI} \alpha$, então Π se reduz a uma derivação normal Π' de $\Delta \subseteq \Gamma \vdash_{NDLEI} \alpha$.*

Demonstração. A prova segue como em [10], por indução no par ordenado (m, h) , considerando a ordem lexicográfica, onde m é o grau da derivação Π e h o seu comprimento $l(\Pi)$. Abaixo podemos verificar todos os casos possíveis:

- Se $r(\Pi)$ é uma aplicação de uma regra de introdução ou de qualquer das regras do absurdo, então o resultado segue da hipótese indutiva.
- Se $r(\Pi)$ é uma eliminação, então Π é da forma:

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_1} \quad \dots \quad \frac{\Pi_n}{\alpha_n}}{\beta}$$

Usando a hipótese indutiva, cada Π_i , $(1 \leq i \leq n)$ se reduz a uma derivação normal Π'_i . Considere Σ a seguinte derivação:

$$\Sigma \equiv \frac{\Pi'_1 \quad \dots \quad \Pi'_n}{\beta}$$

Se Σ é normal, então $\Pi' \equiv \Sigma$. Se Σ não é normal, então Π' é obtida de Σ usando o lema lem-red-aux

□

3.4 A Forma de uma Prova Normal e suas Conseqüências

Nesta seção, estenderemos a propriedade da subfórmula para o sistema em dedução natural $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, sendo que além da noção usual de subfórmula, também incluiremos a relação entre premissa e conclusão das regras $I_{\neg j}$ e $E_{\neg j}$, $1 \leq j \leq 7$, que nada mais são do que versões reescritas uma da outra. A noção de subfórmula pretendida pode ser formalizada como se segue:

Teorema 8. *Toda ocorrência de uma fórmula em uma derivação de α a partir de Γ em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}} \alpha$, é subfórmula de α ou de alguma fórmula de Γ , com exceção das hipóteses descarregadas por aplicações de alguma das regras de redução ao absurdo (\perp_{\neg} e \perp_{\sim}) e das ocorrências de \perp que ocorrem imediatamente abaixo de tais hipóteses.*

Antes de provarmos o enunciado acima, apresentaremos algumas definições necessárias à sua demonstração.

Definição 23. *(Ramo σ) Um ramo em uma derivação Π em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ é uma seqüência de fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que:*

- α_1 é uma top-fórmula em Π que não é descarregada por uma aplicação de $E\vee$, $E\exists$ ou $E?$; e

- α_i , para $i < n$, não é premissa menor de uma aplicação de $E \rightarrow$, $E \neg$ ou $E \sim$, também não é premissa maior de $E \vee$, $E \exists$ ou $E ?$, e α_{i+1} é a ocorrência de fórmula imediatamente abaixo de α_i ; ou α_i é a premissa maior de uma aplicação de $E \vee$, $E \exists$ ou $E ?$, e α_{i+1} é uma hipótese descarregada em Π pela referida aplicação;
- α_n ou é uma premissa menor de uma aplicação de $E \rightarrow$, $E \neg$ ou $E \sim$, ou a fórmula final de Π , ou uma premissa menor de uma aplicação de $E \vee$, $E \exists$ ou $E ?$ onde não descarta é qualquer hipótese.

Partindo da noção de ramo em uma derivação arbitrária Π , normal, em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, podemos observar um padrão estrutural em tal derivação. Da mesma forma que observado por Prawitz [19], podemos utilizar a seguinte definição:

Teorema 9. *Considere Π uma derivação normal em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ e $\sigma = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ um ramo de Π . Assim, temos que:*

- uma E -parte de σ (possivelmente vazia) $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$, na qual toda fórmula é premissa maior de uma regra de eliminação e contém a fórmula imediatamente subsequente em σ como subfórmula ou como consequência de alguma aplicação de $E_{\neg i}$, para $1 \leq i \leq 7$;
- uma parte mínima α_i de σ que é consequência de uma regra de eliminação, se $i \neq 1$, ou premissa de uma regra de introdução, de \perp_{\neg} ou de \perp_{\sim} , caso $i \neq n$;
- uma I -parte de σ (possivelmente vazia) $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$, na qual toda fórmula é premissa maior de uma regra de introdução e contém a fórmula imediatamente precedente em σ como subfórmula ou como premissa de alguma aplicação de $I_{\neg i}$, para $1 \leq i \leq 7$.

Demonstração. A prova segue diretamente da normalização fraca para $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$.

□

Como em Prawitz [19], atribuiremos uma ordem aos ramos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de uma derivação Π arbitrária:

1. σ_1 é o ramo que termina com a fórmula final de Π , que será denominado ramo principal;
2. se a premissa maior de uma aplicação da regra $E \rightarrow$ pertence a σ_i , então o ramo que termina com a premissa menor desta mesma aplicação é o ramo σ_{i+1} .

E daí podemos seguir com o princípio da subfórmula.

Teorema 10. (*Princípio da Subfórmula*) *Toda ocorrência de uma fórmula em uma dedução normal de α a partir de Γ em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, ou é subfórmula de α , ou de alguma fórmula que ocorre em Γ , ou reescrita por alguma das regras $I_{\neg i}$ ou $E_{\neg i}$, excetuando-se as ocorrências descartadas por aplicações das regras do absurdo.*

Demonstração. Considere uma derivação normal Π de α a partir de Γ em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, um ramo $\sigma = \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ de Π e α_i a fórmula mínima de σ . A prova se dará por indução na ordem dos ramos de Π . Será suficiente mostrar que para cada j , $1 \leq j \leq n$, considerando as exceções indicadas no corolário, a fórmula α_j é subfórmula de α ou de alguma fórmula de Γ , ou é obtida através de alguma das regras $I_{\neg i}$ ou $E_{\neg i}$, para $1 \leq i \leq 7$.

- ($j = n$) α_n é a fórmula final de Π . Trivial.
- ($j = n$) α_n é premissa menor de uma aplicação de $E \rightarrow$, E_{\neg} ou E_{\sim} .

Neste caso, a premissa maior da referida aplicação de alguma das eliminações citadas tem necessariamente uma das possíveis formas: $\alpha_n \rightarrow \beta$, $\neg\alpha_n$ ou $\sim \alpha_n$; e pertence a um ramo de ordem $k - 1$. Pela hipótese de indução qualquer uma das formas apresentadas é subfórmula, ou rescrita por $I_{\neg i}$ ou por $E_{\neg i}$, de α ou de alguma fórmula de Γ .

- (i | j | n) Pelo teorema 9, α_j é subfórmula, ou rescrita por $I_{\neg i}$ ou por $E_{\neg i}$, de α_n . O resultado segue dos itens anteriores ($j = n$).
- (j = 1) Primeira possibilidade, α_j é descartada por alguma aplicação de regra E_{\rightarrow} , E_{\neg} ou E_{\sim} que, obviamente tem conclusão que pertence a um ramo de ordem menor do que K. Pela hipótese indutiva, o caso está satisfeito. Se α_j não é descartada, então α_j pertence a Γ ; ou então é descartada por uma aplicação de alguma das regras de redução ao absurdo.
- (1 | j | i) Pelo teorema 9, α_j é subfórmula, ou rescrita por $I_{\neg i}$ ou por $E_{\neg i}$, de α_1 . O resultado segue do item anteriores ($j = 1$).

□

As regras $I_{\neg i}$ e $E_{\neg i}$, para $1 \leq i \leq 7$, perturbam o controle das subfórmulas que podem ocorrer uma determinada derivação normal em $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, já que premissas e conclusões de aplicações de cada uma dessas regras guardam pouco relação estrutural, e, em princípio, tornariam o espaço de busca de prova muito maior do que sistemas que não contém regras dessas natureza.

Contudo, mesmo com tais regras, é possível ter um controle das ocorrências compatíveis com a derivação que representa a relação de consequência entre Γ e α . Assim, o universo de fórmulas possíveis de ocorrer em uma dada derivação normal em $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, conhecidas as hipóteses e conclusão, é finito e conhecido.

Assim, o sistema $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ é suscetível a processos de normalização, cujas formas normais possuem propriedades interessantes para o desenvolvimento de procedimentos de busca de prova, que podem, posteriormente servir de substrato para a elaboração de provadores automáticos de teoremas para LEI.

Capítulo 4

Normalização Forte

Aborda-se agora a possibilidade de se verificar que qualquer seqüência adotada nos procedimentos de redução terminará sempre, sem que se gere uma seqüência infinita de tais passos, nunca alcançando uma derivação normal.

A confirmação desse resultado está contida no seguinte enunciado:

Teorema 11. *(Normalização Forte) Todas as seqüências de redução para qualquer derivação em $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ são finitas e terminam em uma derivação equivalente que está na forma normal.*

Assim definimos o objeto desse capítulo: A normalização forte para $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$.

Existem para o teorema acima enunciado, duas noções de métodos para a elaboração de provas do mesmo, a saber: métodos sintáticos e métodos semânticos.

Em provas semânticas de normalização forte, define-se uma propriedade P que é aplicável a um determinado sistema formal, e prova-se que se P é válida para uma derivação arbitrária no sistema em comento, então tal sistema é fortemente normalizável. Podemos encontrar trabalhos nos quais são observadas as mais diversas propriedades com o intuito de garantir a normalização forte. O conceito de Validade Forte [20], convertibilidade [26] e a computabilidade [?] foram alguns dos utilizados com este fim.

No entanto, nas provas semânticas, reside uma peculiaridade: não existe, via de regra, uma manipulação sintática das derivações; ou seja, propriedades estruturais importantes, que seriam consequência da normalização forte, não conseguem ser percebidas, pois o estudo exclusivo da propriedade P , que não necessariamente tem relação com o caráter sintático das derivações, obscurece uma análise estrutural mais detalhada.

No caso das provas sintáticas, tais propriedades não são ocultadas pela definição e manipulação da propriedade P , pois os métodos de provas desenvolvidos lidam diretamente com a estrutura de tais derivações. Dentre as possibilidades a serem consideradas, existem métodos que se baseiam em um mapeamento das seqüências de redução em um sistema auxiliar, que sabidamente satisfaz a normalização forte ([10], [16], [?]). Outro método sintático do qual se dispõe baseia-se no fato da existência de uma possível *pior seqüência de redução*, a qual levaria em conta todas as fórmulas máximas (segmentos máximos) que existem e que podem surgir em uma derivação, de forma que uma prova, condicionada à suposição de que qualquer *pior seqüência de redução* termina, pode ser formulada.

Neste capítulo apresentamos uma noção de *pior seqüência de redução* para a $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, e mostramos que se a pior seqüência de redução para uma derivação Π termina, então qualquer seqüência de redução para Π termina em uma única formal normal.

A idéia da pior seqüência de redução foi proposta por Martin L of [?], e Massi [10], a pior seqüência de redução foi formalmente definida, e, no mesmo trabalho, foi apresentada uma prova para a normalização forte para o cálculo C' , que continha somente \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow e \forall como símbolos primitivos e que as conclusões de redu o ao absurdo poderiam ser transformadas em conclusões atômicas.

O trabalho foi estendido por Alves [18], que apresentou uma prova de normaliza o forte, baseada na pior seqüência de redu o, para a lógica intuicionista.

A pior seqüência de redução para Π , pode ser compreendida intuitivamente como aquela seqüência de redução que leva em consideração todas os possíveis segmentos máximos que podem se geradas a partir daquelas já existentes em Π .

4.1 Pior Seqüência

Usaremos o sistema ND_{LEI} como definido no segundo capítulo; ou seja, com todas as constantes lógicas tratadas como símbolos primitivos, com suas respectivas regras de introdução e eliminação (exceto \perp). Em relação à prova de normalização forte apresentada por Massi [10], apresentaremos algumas modificações. Primeiramente, não se faz necessário que a conclusão de aplicação da regra do absurdo, clássico ou paraconsistente, seja uma fórmula atômica. No referido trabalho, o autor lidou com o sistema C' como proposto por Prawitz [?], no qual somente \wedge , \rightarrow , \forall e \perp , foram tratados como símbolos primitivos.

Partiremos dos resultados obtidos em Alves [18], no qual foi apresentado uma prova de normalização forte para um sistema em dedução natural para a lógica intuicionista, no qual suas definições para as reduções envolvendo \vee e \exists serão utilizadas.

Como uma primeira definição, considere Π uma derivação em $\mathcal{ND}_{\mathcal{LEI}}$ que não é normal. Logo, a aplicação de regra de inferência que contém um segmento máximo e que é a aplicação de regra que ocorre mais abaixo e mais à direita em Π será denotada por $F(\Pi)$.

Define-se então, para uma derivação Π , a fórmula máxima principal $FP(\Pi)$, que será escolhida de forma a preservar os todos os segmentos máximos existentes e aqueles que potencialmente podem surgir.

Definição 24. • *Fórmulas Máximas Principais para as Reduções Operacionais*

1.

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_1} \quad \frac{\Pi_2}{\alpha_2}}{\frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2}{\alpha_n}} \quad (n = 1, 2)$$

$$\frac{\alpha_n}{\Pi_3}$$

$\alpha_1 \wedge \alpha_2$ é $F(\Pi)$. Logo, para $(m = 1, 2)$ e $m \neq n$, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_1 \wedge \alpha_2, & \text{se } \Pi_m \text{ é normal;} \\ FP(\Pi_m), & \text{se } \Pi_m \text{ não é normal.} \end{cases}$$

2.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\frac{\Pi_2}{\beta}}{\alpha \rightarrow \beta}^i}{\beta}$$

$$\frac{\beta}{\Pi_3}$$

$\alpha \rightarrow \beta$ é $F(\Pi)$ e não ocorre descarte pela regra $I \rightarrow$ em destaque.

Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha \rightarrow \beta, & \text{se } \Pi_1 \text{ é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_1 \text{ não é normal.} \end{cases}$$

3.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \frac{\frac{[\alpha]^i}{\Pi_2}}{\beta}}{\alpha \rightarrow \beta}^i}{\beta}$$

$$\frac{\beta}{\Pi_3}$$

$\alpha \rightarrow \beta$ é $F(\Pi)$ e $[\alpha]$ é descartada pela regra $I \rightarrow$ em destaque. Logo, temos que $FP(\Pi) = \alpha \rightarrow \beta$.

4.

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_n}}{\alpha_2 \vee \alpha_3} \quad \frac{[\alpha_2]^i}{\Pi_2} \quad \frac{[\alpha_3]^j}{\Pi_3}}{\gamma}^i}{\gamma}^i, j \quad (n = 2, 3)$$

$$\frac{\gamma}{\Pi_4}$$

$\alpha_2 \vee \alpha_3$ é $F(\Pi)$, e tanto α_2 como α_3 são descartados. Logo, para $(m = 2, 3)$ e $m \neq n$, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_2 \vee \alpha_3, & \text{se } \Pi_m \text{ é normal;} \\ FP(\Pi_m), & \text{se } \Pi_m \text{ não é normal.} \end{cases}$$

5.

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_2}}{\alpha_2 \vee \alpha_3} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma} \quad \frac{[\alpha_3]^j}{\Pi_3}}{\gamma}}{\Pi_4} j$$

$\alpha_2 \vee \alpha_3$ é $F(\Pi)$, e o descarte é realizado somente na segunda subderivação (α_3 é descartado). Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_2 \vee \alpha_3, & \text{se } \Pi_1 \text{ e } \Pi_3 \text{ são ambas normais;} \\ FP(\Pi_3), & \text{se } \Pi_3 \text{ não é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_3 \text{ é normal e } \Pi_1 \text{ não o é.} \end{cases}$$

6.

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_2}}{\alpha_2 \vee \alpha_3} \quad \frac{[\alpha_3]^i}{\Pi_2} \quad \frac{\Pi_3}{\gamma}}{\gamma}}{\Pi_4} i$$

$\alpha_2 \vee \alpha_3$ é $F(\Pi)$, e o descarte é realizado somente na primeira subderivação ($[\alpha_2]$ é descartado). Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_2 \vee \alpha_3, & \text{se } \Pi_1 \text{ e } \Pi_2 \text{ são ambas normais;} \\ FP(\Pi_2), & \text{se } \Pi_2 \text{ não é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_2 \text{ é normal e } \Pi_1 \text{ não o é.} \end{cases}$$

7.

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_2} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma} \quad \frac{\Pi_3}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} i$$

$\alpha_1 \vee \alpha_2$ é $F(\Pi)$, e nenhum descarte é realizado. Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_1 \vee \alpha_2, & \text{se } \Pi_1 \text{ e } \Pi_3 \text{ são ambas normais;} \\ FP(\Pi_3), & \text{se } \Pi_3 \text{ não é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_3 \text{ é normal e } \Pi_1 \text{ não o é.} \end{cases}$$

8.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha}}{\frac{\forall x \alpha_x^a}{(\alpha_{xt}^{ax})}} \Pi_3$$

$\forall x \alpha_x^a$ é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \forall x \alpha_x^a$.

9.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_t^x} \quad \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\frac{\gamma}{\Pi_3}} i$$

$\exists x \alpha$ é $F(\Pi)$ e não ocorre descarte pela regra $E\exists$ em destaque. Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \exists x \alpha, & \text{se } \Pi_1 \text{ é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_1 \text{ não é normal.} \end{cases}$$

10.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha_t^x} \quad \frac{[\alpha_a^x]^i}{\Pi_2}}{\frac{\gamma}{\Pi_3}} i$$

$\exists x\alpha$ é $F(\Pi)$ e $[\alpha_a^x]$ é descartado pela regra $E\exists$ em destaque. Logo, temos que $FP(\Pi) = \exists x\alpha$.

11.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\frac{\alpha}{\alpha?}} \quad \Pi_2}{\frac{\gamma}{\Pi_3}} i$$

$\alpha?$ é $F(\Pi)$ e não ocorre descarte pela regra $E?$ em destaque. Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha?, & \text{se } \Pi_1 \text{ é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_1 \text{ não é normal.} \end{cases}$$

12.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\frac{\alpha}{\alpha?}} \quad [\alpha]^i \quad \Pi_2}{\frac{\gamma}{\Pi_3}} i$$

$\alpha?$ é $F(\Pi)$ e $[\alpha]$ é descartado pela regra $E?$ em destaque. Logo, temos que $FP(\Pi) = \alpha?$.

13.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\frac{\alpha}{\alpha!}} \quad \Pi_2}{\Pi_2} \triangleright \triangleright \frac{\Pi_1}{\alpha}$$

$\alpha!$ é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \alpha!$.

14.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\frac{\perp}{\alpha}} \quad \Sigma_2}{\frac{\gamma}{\Pi_4}} i$$

α é premissa maior de \mathcal{R} , e Σ_2 pode ocorrer à direita de α . Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_1 \text{ não é normal e } \mathcal{R} \text{ descarta } \alpha; \\ \alpha, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

15.

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\perp} \quad \frac{[\alpha_1]^i}{\Pi_2} \quad \frac{[\alpha_2]^i}{\Pi_3}}{\frac{\alpha_2 \vee \alpha_3}{\gamma} \quad \frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad i$$

$\alpha_2 \vee \alpha_3$ é $F(\Pi)$, e tanto $[\alpha_2]$ como $[\alpha_3]$ são descartados. Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_2 \vee \alpha_3, & \text{se } \Pi_3 \text{ é normal;} \\ FP(\Pi_3), & \text{se } \Pi_3 \text{ não é normal.} \end{cases}$$

16.

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\perp} \quad \frac{[\alpha_2]^j}{\Pi_3}}{\frac{\alpha_2 \vee \alpha_3}{\gamma} \quad \frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad j$$

$\alpha_2 \vee \alpha_3$ é $F(\Pi)$, e o descarte é realizado somente na segunda subderivação ($[\alpha_2]$ é descartado). Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_2 \vee \alpha_3, & \text{se } \Pi_1 \text{ e } \Pi_3 \text{ são ambas normais;} \\ FP(\Pi_3), & \text{se } \Pi_3 \text{ não é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_3 \text{ é normal e } \Pi_1 \text{ não o é.} \end{cases}$$

17.

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\perp} \quad \frac{[\alpha_1]^i}{\Pi_2} \quad \frac{\Pi_3}{\gamma}}{\frac{\alpha_2 \vee \alpha_3}{\gamma} \quad \frac{\gamma}{\Pi_4}} \quad i$$

$\alpha_2 \vee \alpha_3$ é $F(\Pi)$, e o descarte é realizado somente na primeira subderivação ($[\alpha_1]$ é descartado). Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_2 \vee \alpha_3, & \text{se } \Pi_1 \text{ e } \Pi_2 \text{ são ambas normais;} \\ FP(\Pi_2), & \text{se } \Pi_2 \text{ não é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_2 \text{ é normal e } \Pi_1 \text{ não o é.} \end{cases}$$

18.

$$\Pi \equiv \frac{\frac{\Pi_1}{\perp}}{\alpha_2 \vee \alpha_3} \frac{\Pi_2}{\gamma} \frac{\Pi_3}{\gamma} \Bigg|_i \frac{\gamma}{\Pi_4}$$

$\alpha_2 \vee \alpha_3$ é $F(\Pi)$, e a aplicação em destaque não descarta nenhum conjunto de hipóteses. Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha_2 \vee \alpha_3, & \text{se } \Pi_1 \text{ e } \Pi_3 \text{ são ambas normais;} \\ FP(\Pi_3), & \text{se } \Pi_3 \text{ não é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{se } \Pi_3 \text{ é normal e } \Pi_1 \text{ não o é.} \end{cases}$$

Reduções Permutativas

•

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \frac{[\alpha]^i}{\Pi_2}}{\gamma} \Bigg|_i \frac{\Sigma_3}{\tau}$$

γ é premissa maior de \mathcal{R} , e Σ_3 pode ocorrer à direita de γ . γ é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \gamma$.

•

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha \vee \beta} \frac{[\alpha]^i [\beta]^j}{\Pi_2 \Pi_3}}{\gamma} \Bigg|_{i,j} \frac{\Sigma_3}{\tau}$$

γ é premissa maior de \mathcal{R} , e Σ_3 pode ocorrer à direita de γ . γ é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \gamma$.

•

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\exists x \alpha}}{\mathcal{R}} \quad \frac{[\alpha_t^x]^u \quad \Pi_2}{\gamma} \quad \Sigma_3}{\gamma} \quad \tau$$

γ é premissa maior de \mathcal{R} , e Σ_3 pode ocorrer à direita de γ . γ é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \gamma$.

Reduções para as regras especiais

•

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha}}{I} \frac{\beta}{E} \frac{\alpha}{\Pi_2}$$

Observação 18. Neste passo, “I” denota uma aplicação de $I_{n\rightarrow}$, e “E” denota uma aplicação de regra $E_{n\rightarrow}$, $1 \leq n \leq 5$.

β é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \beta$.

Reduções do Absurdo Paraconsistente

•

$$\frac{\frac{[\neg \alpha]^i}{\Pi_1}}{\frac{\perp}{\alpha}} \quad \Sigma_2 \quad i}{\mathcal{R} \quad \gamma}$$

α é $F(\Pi)$. Logo, temos que:

$$FP(\Pi) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } \Pi_1 \text{ é normal;} \\ FP(\Pi_1), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 19. α é premissa maior de \mathcal{R} . O mesmo critério de escolha para $FP(\Pi)$ é usado em fórmula $F(\Pi)$ que seja resultante de uma aplicação de $\perp \sim$.

- *Redução Auxiliar 1*

$$\frac{\frac{[\neg A]^u}{\Pi_1} \quad \frac{\perp}{A} \quad u \quad \neg A}{\mathcal{R} \quad \perp}}$$

α é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \alpha$.

Observação 20. A é premissa menor de \mathcal{R} . O mesmo critério de escolha para $FP(\Pi)$ é usado em fórmula $F(\Pi)$ que seja resultante de uma aplicação de $\perp \sim$, neste caso, A pode ser substituída por α .

- *Redução Auxiliar 2*

$$\frac{\frac{[\neg \alpha]^i}{\Pi_1} \quad \frac{\perp}{\alpha} \quad i \quad \sim \quad \alpha}{\mathcal{R} \quad \perp}}$$

α é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \alpha$.

Observação 21. A é premissa menor de \mathcal{R} . O mesmo critério de escolha para $FP(\Pi)$ é usado em fórmula $F(\Pi)$ que seja resultante de uma aplicação de $\perp \sim$ e premissa menor de $E\neg$.

- *Reduções Permutativas Auxiliares*

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \quad \frac{[\alpha]^i}{\Pi_2} \quad \gamma}{\gamma} \quad i \quad \Pi_3}{\mathcal{R} \quad \perp}}$$

α é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \alpha$.

Observação 22. γ é premissa menor de \mathcal{R} e Π_3 é uma top-fórmula da forma $\sim \gamma, \neg\gamma$.

•

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\exists x\alpha} \quad \frac{[\alpha_a^x]^i \quad \Pi_2}{\gamma}}{\gamma} \quad i \quad \Pi_3}{\perp}}{\mathcal{R}} \quad \perp$$

α é $F(\Pi)$. Logo, temos que $FP(\Pi) = \alpha$.

Observação 23. γ é premissa menor de \mathcal{R} e Π_3 é uma top-fórmula da forma $\sim \gamma, \neg\gamma$.

4.2 Normalização Forte

A prova que segue é uma extensão daquela apresentada em [18], que já considerava todos os conectivos de um cálculo que realiza a lógica intuicionista, como definido em [19], ao qual se adicionam os conectivos para as plausibilidades, a crédula “?” e a cética “!”, e mais as reduções do absurdo, tanto clássico como paraconsistente. Portanto, tal extensão garante não só a normalização forte para $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$ mas também uma prova de normalização forte via pior seqüência para o cálculo C [19], no qual todos as constantes lógicas são tratadas como primitivas e no qual não se obriga que as conclusões de aplicações de quaisquer das reduções ao absurdo (\perp_{\neg} e \perp_{\sim}) sejam atômicas.

Além disso, dada a tradução entre um fragmento de LEI e a lógica modal S5 [8], temos que o mesmo procedimento de normalização forte se aplica a esta última, bem como a noção de árvore plausível, *mutatis mutandis*. Dessa forma, garante-se, através do método apresentado, a finitude de qualquer seqüência de

redução e, como corolário, a unicidade da formal normal (Church-Rosser) para qualquer dos cálculos citados.

Antes de apresentarmos o enunciado do teorema objeto deste capítulo, será proposto o seguinte lema:

Lema 4. *Seja Π uma derivação não normal em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, e Π_1 uma subárvore de Π tal que:*

- $r(\Pi_1)$ é alguma premissa de \mathbf{R} cuja premissa maior é $F(\Pi)$;
- Π_1 é eliminada na redução de $FP(\Pi)$.

Então: $lp(\Pi_1) < lp(\Pi)$.

Demonstração. Observa-se pelas definições de $FP(\Pi)$ e pior seqüência de redução, que em todos os casos que Π_1 satisfizer as condições do lema, a pior seqüência para Π_1 representa um segmento inicial da pior seqüência de redução para Π . Portanto $lp(\Pi_1) \leq lp(\Pi)$. Mas como $F(\Pi)$ não pertence a Π_1 , pois para se completar a pior seqüência de redução para Π é necessário eliminar $F(\Pi)$, $lp(\Pi_1) < lp(\Pi)$. □

O lema 4 acima também é apresentado por [10], porém o enunciado engloba somente as constantes de C' .

Define-se então o enunciado base para a formalização do teorema da normalização forte:

Teorema 12. *Admita que $lp(\Pi) < \omega$ para toda derivação Π em $\vdash_{\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}}$. Se Π se reduz imediatamente a Π' ($\Pi \xrightarrow[i]{P} \Pi'$), então $lp(\Pi) > lp(\Pi')$ e existe uma derivação Π^* tal que $\Pi \xrightarrow{P} \Pi^*$ e $\Pi' \xrightarrow{P} \Pi^*$.*

Demonstração. A prova se dará por indução em $lp(\Pi)$.

Antes de prosseguirmos na demonstração do teorema , e considerando a notação já apresentada, que define Π se reduz imediatamente através da pior seqüência de Π^o , $\Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^o$, o seguinte lema se faz necessário provar.

Lema 5. Se $\Pi^o \triangleright\triangleright \Pi_1$, então $lp(\Pi_1) < lp(\Pi^o)$ e existe Π_1^* , tal que $\Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi_1^*$ e $\Pi_1 \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi_1^*$

Demonstração. A prova dá-se por indução no comprimento da $\Pi^o \triangleright\triangleright \Pi_1$, é a mesma apresentada em [10] e [18]. □

Dado o lema acima, podemos retornar a prova do teorema.

A considerar, temos duas situações: ou $\Pi' \equiv \Pi^o$ ou $\Pi' \not\equiv \Pi^o$.

Se $\Pi' = \Pi^o$, o lemma está provado pois, pela definição de pior seqüência de redução, $lp(\Pi^o) < lp(\Pi)$, e $\Pi^o \equiv \Pi^*$.

Caso $\Pi' \not\equiv \Pi^o$, então, segundo cada possibilidade para $F(\Pi)$, temos os seguintes casos a analisar. Neste trabalho, destacaremos apenas o método para a plausibilidade crédula, de forma que para os demais conectivos, a mesma estratégia pode ser utilizada. Assim:

1. Se Π tem a forma:

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \Pi_2}{\alpha? \quad \gamma} \\ \frac{\gamma}{\Pi_3}$$

Considerando que:

- $\alpha?$ é $F(\Pi)$;
- nenhuma ocorrência de α é descartada pela aplicação destacada de $I?$.

Para cada possível redução imediata Π' de Π , devemos considerar os seguintes subcasos:

(a)

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \Pi_2}{\frac{\gamma}{\Pi_3}}$$

onde $\Pi_1 \triangleright_i \Pi'_1$.

Observamos pelo lema 4 que Π_1 atende a hipótese indutiva, $lp(\Pi_1) < lp(\Pi)$. Portanto:

- existe $\Pi_1^\#$ tal que $\Pi_1 \xrightarrow{P} \triangleright_i \Pi_1^\#$ e $\Pi'_1 \xrightarrow{P} \triangleright_i \Pi_1^\#$;
- $lp(\Pi'_1) < lp(\Pi_1)$

Assim, considere $\Pi^\#$ como tendo a seguinte forma:

$$\Pi^\# \equiv \frac{\frac{\Pi_1^\#}{\alpha} \quad \Pi_2}{\frac{\gamma}{\Pi_3}}$$

De forma que, pela própria definição de pior seqüência de redução, $\Pi \xrightarrow{P} \triangleright \Pi^\#$, $\Pi' \xrightarrow{P} \triangleright \Pi^\#$ e, utilizando-se do lema 4, $lp(\Pi') < lp(\Pi)$.

(b)

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha} \quad \Pi'_2}{\frac{\gamma}{\Pi_3}}$$

onde $\Pi_2 \triangleright_i \Pi'_2$.

Neste caso, temos duas possibilidades:

- Se Π_1 é normal, então:

$$\Pi^o \equiv \frac{\Pi_2}{\beta \Pi_3}$$

$$\Pi'^o \equiv \frac{\Pi'_2}{\beta \Pi_3}$$

, de forma que $\Pi \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^o$.

Nota-se claramente que $\Pi^o \triangleright\triangleright \Pi^o$. Pela definição de pior seqüência, temos que $lp(\Pi^o) < lp(\Pi)$. Pelo lema 5, existe $\Pi^\#$ tal que: $\Pi^o \stackrel{P}{\triangleright} \triangleright \Pi^\#, \Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^\#$ e $lp(\Pi^o) < lp(\Pi^\#)$. Logo, $\Pi \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^\#$ e $\Pi' \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^\#$ e $lp(\Pi') \leq lp(\Pi^o) < lp(\Pi)$.

- Se Π_1 não é normal, neste caso Π^o tem a seguinte forma:

$$\frac{\frac{\Pi_1^o}{\alpha} \frac{\frac{\Pi_2}{\beta}}{\alpha \rightarrow \beta} i}{\frac{\beta}{\Pi_3}}$$

, $\Pi_1 \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi_1^o$.

Considere também que:

$$\frac{\frac{\Pi_1^o}{\alpha} \frac{\frac{\Pi_2'}{\beta}}{\alpha \rightarrow \beta} i}{\frac{\beta}{\Pi_3}}$$

, $\Pi' \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^o$.

Nota-se claramente que $\Pi^o \triangleright\triangleright \Pi^o$. Pela definição de pior seqüência, temos que $lp(\Pi^o) < lp(\Pi)$. Pelo lema 5, existe $\Pi^\#$ tal que: $\Pi^o \stackrel{P}{\triangleright} \triangleright \Pi^\#, \Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^\#$ e $lp(\Pi^o) < lp(\Pi^\#)$. Logo, $\Pi \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^\#$ e $\Pi' \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^o \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi^\#$ e $lp(\Pi') \leq lp(\Pi^o) < lp(\Pi)$.

(c)

$$\frac{\frac{\Pi_1}{\alpha?} \frac{\Pi_2}{\gamma}}{\Pi_3'}$$

Onde $\Pi_3 \stackrel{P}{\triangleright\triangleright} \Pi_3'$.

- existe $\Pi_1^\#$ tal que $\Pi_1 \xrightarrow{P} \Pi_1^\#$ e $\Pi_1' \xrightarrow{P} \Pi_1^\#$;
- $lp(\Pi_1') < lp(\Pi_1)$

Assim, considere $\Pi^\#$ como tendo a seguinte forma:

$$\Pi^\# \equiv \frac{\begin{array}{c} \Pi_1^\# \quad \Pi_2 \\ \alpha? \quad \gamma \end{array}}{\gamma} \\ \Pi_3$$

De forma que, pela própria definição de pior seqüência de redução, $\Pi \xrightarrow{P} \Pi^\#, \Pi' \xrightarrow{P} \Pi^\#$ e, utilizando-se do lema 4, $lp(\Pi') < lp(\Pi)$.

Com este caso, ilustramos o método empregado para a prova da normalização forte. Aplicando analogamente o mesmo procedimento para as demais $F(\Pi)$, conclui-se a prova para todo o sistema $\mathcal{N}\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, e utilizando-se de $\Pi^\#$, podemos verificar a propriedade de confluência para as seqüências de redução possíveis sobre o conjunto de reduções definidas.

□

4.3 Conclusão

Apresentou-se com este trabalho uma nova formulação para LEI em dedução natural, formulação esta que permitiu que se construísse um sistema fechado sob os procedimentos de redução definidos, obtendo-se uma caracterização para as derivações normais no referido sistema, bem como a demonstração do princípio da subfórmula.

Em seqüência, estendeu-se as provas anteriores de normalização forte, com o objetivo de confirmar que os procedimentos de redução conforme definidos, eram suficientes para que se garantisse que qualquer que fosse a seqüência de reduções escolhida, sempre terminaria em uma derivação normal, que também é única.

A intenção final do trabalho seria a de unificar esses resultados culminando com uma prova de decibilidade para LEI, no entanto, algumas dificuldades foram encontradas quando da manipulação dos conectivos que permitem reduções permutativas.

A idéia de uma prova de decibilidade baseada em teoria da prova decorreria da finitude dos ramos em uma derivação normal e da propriedade da subfórmula. O principal problema encontrado decorre da dificuldade de se controlar aplicações contíguas das regras $E\vee$, $E\exists$ e $E?$, como no exemplo a seguir:

Como pode ser observado, as premissas menores das referidas aplicações não sofrem variação em seu grau. De forma que, ao construirmos uma derivação partindo da conclusão da mesma até suas hipóteses podemos nos defrontar com situação similar, o que pode levar a um loop interminável, impossibilitando responder se a relação entre o conjunto de hipóteses especificadas e a conclusão pretendida pertence a LEI.

Ainda assim, é trivial observar que existe um sistema com um número menor de constantes lógicas, a saber: o fragmento $\{\wedge, \rightarrow, !, \forall, \neg, \sim\}$, que é completo, desde que as demais constantes podem ser definidas a partir deste conjunto e de seus axiomas correlatos. Ou seja, para o conjunto apresentado, a decidibilidade pode ser obtida através da observação de que qualquer ramo de uma derivação normal deste fragmento em \mathcal{ND}_{LEI} , em cada aplicação de regra de inferência, modifica de forma controlada (E-parte, fórmula mínima e I-parte) o grau das fórmulas que os compõem.

Em resumo, os resultados obtidos neste trabalho são:

- Um sistema em dedução natural, correto e completo em relação à axiomática de LEI, que é passível de ser normalizado;
- A idéia combinada da função de descarte não regular \mathfrak{F} e das árvores plausíveis pode ser também utilizada em sistemas modais com a constante lógica \diamond

(possibilidade) tratada como símbolo primitivo, obtendo, assim, sistemas com boas propriedades estruturais;

- A extensão de uma prova de normalização forte para $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, baseada na noção de pior seqüência de redução que complementa o resultado apresentado anteriormente para os sistemas C [10] e I [18] de Prawitz.

4.3.1 Trabalhos Futuros

Para o sistema $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$, modificações podem ser apresentadas a fim de se obter um controle adequado das combinações entre aplicações das regras $E\forall$, $E?$ e $E\exists$ que perturbam o bom comportamento dos ramos em uma derivação, objetivando, assim, uma demonstração da decidibilidade para LEI com todas as constantes lógicas tratadas como símbolos primitivos.

Vale ressaltar que a prova de normalização forte apresentada ainda possui um caráter condicional, desde que é assumido como finito o comprimento da pior seqüência de redução para uma derivação qualquer em $\mathcal{ND}_{\mathcal{L}\mathcal{E}\mathcal{I}}$. Em [18], a noção de ordinal natural [?], é utilizada com o intuito de retirar essa condição sobre o comprimento da pior seqüência de redução, garantindo que de fato a pior seqüência de redução, aquela que considera todos os segmentos máximos existentes e que podem surgir em decorrência das reduções, termina.

As regras de inferência relativas às plausibilidades não acarretariam, em princípio, problemas com uma possível adaptação da definição de ordinal natural citada, dada a similaridade estrutural com as regras para as constantes de primeira ordem (\exists, \forall).

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, E. H.: Lógica e Inconsistência: um estudo dos cálculos C_n , $1 \leq n < \omega$.
Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 1976.
- [2] Buchsbaum, A.R., Pequeno, T.: Uma Família de Lógicas Paraconsistentes e/ou Paracompletas com Semânticas Recursivas, Departamento de informática da PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1991.
- [3] da Costa, N.C.: Sistemas Formais Inconsistentes, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1963.
- [4] Chellas, B.: Modal Logic. Cambridge University Press, 1980.
- [5] Enderton, H.: A Mathematical Introduction to Logic. 2 ed., Academic Press, 2001.
- [6] Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schliessen. Mathematische Zeitschrift, 39, 1935.
- [7] Hughes, G. E., Cresswell, M. J.: A new Introduction to Modal Logic. Routledge, 1996.
- [8] Martins, A.T.C.: A Syntactical and Semantical Uniform Treatment for the IDL & LEI Nonmonotonic System. PhD Thesis, Departamento de Informática, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1997.

- [9] Martin-Löf, P. Hauptsatz for Theory of Species, Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium, North Holland, Amsterdam, 1971.
- [10] Massi, C.D.B.: Provas de Normalização para a Lógica Clássica, PhD Thesis, Departamento de Filosofia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1990.
- [11] Medeiros, M. P. N.: Traduções via Teoria da Prova: Aplicações à Lógica Linear. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001.
- [12] Mendelson, E.: Introduction to Mathematical Logic. D. van Nostrand, Princeton, 1964.
- [13] Moura, J.E.A. : Um Estudo de C_w em Cálculo de Seqüentes e Dedução Natural, Departamento de Filosofia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.
- [14] Morais, F.F.: Uma Teoria da Prova para a Lógica da Inconsistência Epistêmica, Monografia Apresentada como Proposta de Dissertação de Mestrado ,Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2002.
- [15] Pequeno, T.H.C.: a Logic for Inconsistent Nonmonotonic Reasoning, Technical Report 90/6, Department of Computing, Imperial college, London, 1990.
- [16] Pereira, L. C.: Normalização Forte para a Lógica Intuicionista de primeira ordem com reduções permutativas. In Cadernos de Historia e Filosofia da Ciência, v. 7, CLE - Unicamp, 1974.
- [17] Pereira, L. C.: On the Estimation of the Length of Normal Derivations. Phd thesis, Filosofiska Institutionen, Stockholm, 1982.

- [18] Pereira Alves, D. D.: Normalização Forte via Ordinal Natural. Tese de Doutorado, Unicamp, 1999.
- [19] Prawitz, D.: Natural Deduction: A Proof-theoretical Study. In *Stockholm Studies in Philosophy* 3, Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1965.
- [20] Prawitz, D.: Ideas and Results in Proof Theory. In J.E.Fenstad, editor, *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, pp. 235-250, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [21] Seldin, J.P.: Normalization and Excluded Middle I, *Studia in Logic* 48, pp. 193-217, 1989.
- [22] Simpson, Alex: *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*, PhD. Thesis, University of Edinburgh, 1994.
- [23] Stalmarck, Gunnar: Normalization Theorems for Full First Order Classical Natural Deduction. *The Journal of Symbolic Logic*. 56, 1991.
- [24] Statman, R.: *Structural Complexity of Proofs*, PhD. Dissertation. Stanford, 1974.
- [25] Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H.: *Basic Proof Theory*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, v. 43. Cambridge University Press, 1996.
- [26] Tait, W.: Intentional Interpretations of Functionals of finite type I. In *Journal of Symbolic Logic* , v.32, pp. 198-212, 1967.
- [27] Zimmermann, E.: Peirce's Rule in Natural Deduction. *Proceedings of Natural Deduction*