Guilherme Oliveira Mota

Uma Generalização do Teorema de Hall e Suas Implicações Para a Teoria de Fatores

Fortaleza – CE

Fevereiro / 2009

Guilherme Oliveira Mota

Uma Generalização do Teorema de Hall e Suas Implicações Para a Teoria de Fatores

Dissertação apresentada à Coordenação do Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador:
Prof^{a}. Dra. Cláudia Linhares Sales

ParGO - Grupo de Pesquisa em Paralelismo, Grafos e Otimização Combinatória
Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação
Departamento de Computação
Centro de Ciências
Universidade Federal do Ceará

Fortaleza – CE

Fevereiro / 2009

"Prove and Conjecture"

Paul Erdős

Dissertação de Mestrado sob o título *Uma Generalização do Teorema de Hall e Suas Implicações Para a Teoria de Fatores*, defendida por Guilherme Oliveira Mota e aprovada em 13 de fevereiro de 2009, em Fortaleza, Ceará, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Profª. Dra. Cláudia Linhares Sales
Orientadora

Prof. Dr. Marcelo Henriques de Carvalho
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Rafael Castro de Andrade
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dr. Rudini Menezes Sampaio
Universidade Federal do Ceará

Resumo

Apresentamos neste trabalho um estudo sobre a teoria de fatores em grafos (subgrafos geradores), abordando os principais aspectos e resultados existentes nesta teoria. Os principais tipos, conhecidos como f-fatores e (g, f)-fatores são analisados. Definimos um novo tipo de fator, chamado de (g, f)-*fator restrito*, que é uma generalização de f-fatores e um caso particular de (g, f)-fatores. Fornecemos condições necessárias e suficientes para a existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos. Fazendo uso deste resultado, obtemos alguns resultados existenciais para casos particulares de (g, f)-fatores restritos e também para o caso em que a condição que garante a existência de tais fatores seja somente suficiente.

PALAVRAS-CHAVE: Emparelhamentos, Fatores, Teorema de Hall.

Abstract

We present in this work a study about factor's theory in graphs (spanning subgraphs), addressing the main points and existing results in this theory. The main types, known as f-factors and (g, f)-factors are analyzed. We define a new type of factor, called *restricted* (g, f)*-factor*, a generalization of f-factors and a particular case of (g, f)-factors. We provide necessary and sufficient conditions to the existence of restricted (g, f)-factors on bipartite graphs. Using this result, we obtain some existencial results for a particular case of restricted (g, f)-factors and also for the case where the condition wich garantees the existence of such factors is only sufficient.

KEYWORKS: Matchings, Factors, Hall's Theorem.

Agradecimentos

O presente trabalho teria sido bem mais difícil e bem menos prazeroso sem a ajuda de muitas pessoas. De modo que não posso deixar de agradecer a todas elas:

Aos professores Cláudia, Manoel, Rafael e Ricardo. Cláudia por ter me acolhido e acreditado em mim. Manoel por sua amizade, confiança e, além disso, muito do que aprendi devo a ele. Rafael por abrir minha mente para outras interessantes áreas de pesquisa e Ricardo pelas valiosas sugestões que me permitiram melhorar este trabalho.

Aos meus amigos, que ajudaram nos momentos em que precisava relaxar um pouco. Em particular, Júlio e Leonardo que além de muitos desses momentos, também proporcionaram importantes discussões que foram fundamentais para esta dissertação. Sou, realmente, muito grato a eles.

Ao meu grande amigo Carlos, por ter sido um grande mestre para mim. Suas sábias palavras serão úteis durante toda minha vida.

Ao meu irmão, que sempre foi amigo e companheiro. Sem seu bom humor, esses anos teriam sido mais difíceis.

Aos meus pais, por terem sempre colocado minha educação acima de tudo e fornecerem a estrutura necessária para meu crescimento intelectual. Serão sempre um grande exemplo de vida.

À minha amiga Juliana, pessoa que muito admiro. Sou muito grato pelos bons momentos vividos ao seu lado no decorrer desses anos. Também não posso deixar de mencionar todo o incentivo que recebi ao longo dos momentos difíceis durante minha vida acadêmica. Seus conselhos sempre foram um ótimo guia.

Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - por ter financiado esta pesquisa.

Sumário

1 Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$, um emparelhamento de G é um subconjunto M de suas arestas, duas a duas não adjacentes. Emparelhamentos modelam de forma natural problemas de designação de tarefas a processadores, dentre outros e têm sido vastamente utilizados [LP86], [Plu07]. O estudo de emparelhamentos em grafos bipartidos tem merecido uma atenção especial dos pesquisadores, pois muitos problemas práticos são modelados por grafos dessa classe como, por exemplo, os que envolvem redes de comunicação: implementação da comunicação entre processadores e células de memória em um computador paralelo e modelagem de redes de telefonia [Pip90].

Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos X e Y disjuntos de vértices, de modo que todas as arestas de G conectam um vértice de X a um vértice de Y. Uma rede de comunicação pode ser vista como um grupo de grafos bipartidos com alguns vértices chamados de fontes e outros de destinos, onde uma boa rede é aquela capaz de fornecer conexões simultâneas entre várias fontes e destinos. Para se construir uma boa rede é fundamental o estudo de emparelhamentos em grafos bipartidos. A figura 1.1 mostra uma rede de comunicação simples e exemplo de um emparelhamento entre seus subgrafos bipartidos.

Um importante resultado da teoria de emparelhamentos é o *Teorema de Hall*, que fornece condições para a existência de um emparelhamento que cobre todos os vértices de X em um grafo bipartido com partição (X, Y), ou seja, para a existência de um emparelhamento M onde, para cada vértice v de X, existe uma aresta em M que incide em v. Basicamente, a existência de tal emparelhamento é possível se, e somente se, todo subconjunto de X com k vértices possui no mínimo k vizinhos, para todos os valores possíveis de k.

Alguns autores investigaram generalizações do Teorema de Hall, relaxando a exigência de se obter um emparelhamento. Benson e Lowenthal consideraram o caso onde os vértices de Y podem ter mais de um vizinho [BL93]. Outro resultado bastante conhecido fornece

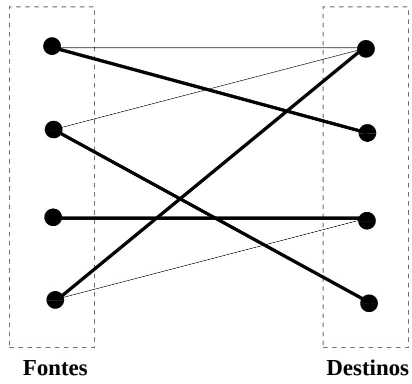

Figura 1.1: Rede de comunicação simples com um emparelhamento em destaque.

condições para a existência de um subconjunto de arestas em que os vértices de X são cobertos por uma certa quantidade dessas arestas (quantidade possivelmente diferente para cada vértice) e os vértices de Y são cobertos por no máximo uma aresta [HV50].

Propomos uma generalização que considera restrições no grau dos vértices nos dois conjuntos de vértices (X e Y) da partição do grafo bipartido. As condições dadas garantem a existência de um subconjunto de arestas M do grafo, de modo que cada vértice de X deve ser coberto por um número fixo de arestas de M (possivelmente diferente para cada vértice) e cada vértice de Y pode ser coberto por no máximo um certo número de arestas de M (possivelmente diferente para cada vértice). Chamamos este teorema de TFR_B.

O resultado citado no parágrafo anterior (TFR_B) se torna interessante quando observado sob o ponto de vista da teoria de fatores. Um fator de um grafo $G = (V,E)$ é simplesmente um subgrafo formado pelo mesmo conjunto de vértices de G, ou seja, um subgrafo gerador de G, porém, satisfazendo algumas restrições de grau nos vértices. Um tipo importante de fator conhecido como f-fator é um subgrafo de G tal que existe uma função $f : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ que determina o grau de cada vértice. Outro tipo importante de fator é conhecido por (g, f)-fator, que possui funções $g : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ e $f : V(G) \to \mathbb{Z}^+$, de modo que, a função f impõe um limite superior para o grau de cada vértice e a função g um limite inferior para o grau de cada vértice. Um ponto fundamental envolvendo fatores é a caracterização de sua existência em grafos arbitrários ou em certas classes de grafos.

O TFR_B é definido utilizando um tipo de fator, que pode ser visto como uma generalização de f-fatores e um caso particular de (g, f)-fatores. Chamamos esse novo tipo de fator de (g, f)-*fator restrito*, que é, basicamente, um (g, f)-fator tal que a função f é aplicada somente em um subconjunto de vértices, e a função g é aplicada somente no complemento desse subconjunto, isto é, alguns vértices possuem somente limite superior para o grau no fator e os outros vértices possuem somente limite inferior. O TFR_B, que é nosso principal resultado, fornece condições necessárias e suficientes para a existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos. É possível obter o TFR_B indiretamente através de um resultado de Folkman e Fulkerson (ver Página 38), mas uma importante contribuição do nosso trabalho é a técnica utilizada na demonstração deste teorema, que difere das técnicas normalmente utilizadas para se obter resultados sobre fatores. A demonstração dada é direta, no sentido que não utiliza nenhum resultado auxiliar em seu desenvolvimento, de modo que o leitor não precisa ser remetido a nenhuma outra fonte para entender o resultado. Outro ponto interessante é que nossa demonstração fornece uma boa intuição para o teorema.

Obtemos também alguns resultados adicionais sobre esses tipos de fatores. Consideramos o caso onde os limites inferiores para o grau dos vértices é o mesmo em todo subconjunto de vértices em questão e os limites superiores também são iguais. Foram investigadas também condições suficientes, mas não necessárias, para a existência de (g, f)-fatores restritos, e as condições obtidas são bem mais simples que as obtidas no TFR_B. Propomos ainda uma conjectura para garantir a existência desses fatores em grafos quaisquer, uma vez que o TFR_B se aplica somente a grafos bipartidos.

O trabalho é organizado como segue. No Capítulo 2, é feita uma breve revisão sobre alguns conceitos básicos de teoria de grafos que são utilizados ao longo do nosso trabalho. Nesse capítulo, também enunciamos e comentamos alguns resultados que tratam de emparelhamentos em grafos, além de algumas generalizações desses teoremas.

No Capítulo 3, introduzimos a teoria de fatores ao leitor. As definições e resultados mais importantes envolvendo teoria de fatores são mostrados, de modo que o leitor pode obter uma visão geral sobre fatores. Apresentamos também alguns casos particulares de fatores, a saber, f-fatores, (g, f)-fatores e fatores regulares. Os resultados e aspectos mais importantes acerca desses tipos de fatores são discutidos. Também reproduzimos a demonstração dos teoremas que caracterizam f-fatores e (g, f)-fatores.

No Capítulo 4, propomos um novo tipo de fator, chamado de (g, f)-fator restrito, que generaliza o conceito de f-fatores e é um caso particular de (g, f)-fatores. Enunciamos formalmente e demonstramos o TFR_B, que é uma caracterização para a existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos. A demonstração é feita de modo a fornecer ao leitor as intuições necessárias para a compreensão, sem abrir mão do rigor matemático.

Discutimos tal caracterização fornecida para existência desses fatores, relacionando com as caracterizações para os f-fatores e (g, f)-fatores.

No capítulo 5, são apresentados alguns teoremas sobre (g, f)-fatores restritos que utilizam o teorema apresentado no capítulo 4 em sua demonstração. Esses teoremas fornecem caracterizações de um caso particular dos (g, f)-fatores restritos, e condições suficientes, mas não necessárias, para a existência de (g, f)-fatores restritos. Por fim, propomos uma conjectura sobre como seria possível estender, para grafos quaisquer, a caracterização para a existência dos (g, f)-fatores restritos obtida no TFR_B.

2 Revisão dos Conceitos Básicos

Neste capítulo, revisamos alguns conceitos importantes relacionados com a teoria de grafos. O capítulo está dividido em duas seções. Primeiro, definimos os conceitos básicos que são necessários para a compreensão dos capítulos subsequentes. Feito isso, falamos um pouco sobre a teoria de emparelhamentos em grafos, enunciando e comentando alguns teoremas importantes sobre esse tema.

2.1 Definições

Um **grafo** $G = (V,E)$ é a estrutura composta por um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E, tal que uma aresta é um par não ordenado de vértices (i,j). Se existe uma aresta entre dois vértices i e j, dizemos que esses vértices são **vizinhos**. Dizemos que dois vértices i e j são adjacentes se $(i,j) \in E$. Analogamente, duas arestas são adjacentes se existe um vértice em comum entre elas, por exemplo, as arestas (i,j) e (j,k) são adjacentes. Dizemos que uma aresta e incide sobre um vértice x se $e = (x,i)$, para algum vértice i. Um **subgrafo** $H = (V',E')$ de G é um grafo tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Quando $V' = V$, dizemos que H é um **subgrafo gerador** de G.

Um grafo $G = (V,E)$ é dito bipartido quando podemos particionar seu conjunto de vértices V em dois subconjuntos disjuntos X e Y, tais que toda aresta do grafo conecta um vértice de X a um vértice de Y. Ou seja, não existem arestas entre um par de vértices de X ou entre um par de vértices de Y. Usualmente representamos um grafo bipartido por $G = (X,Y,E)$.

Dado um grafo $G = (V,E)$, se V' é um subconjunto de V e E' um subconjunto de E, denotamos por $G[V']$ o grafo obtido pela remoção em G de todos os vértices do conjunto $V \setminus V'$ e pela remoção das arestas que não incidem em vértices de V'. $G[E']$ é o grafo obtido pela remoção de todas as arestas do conjunto $E \setminus E'$ e pela remoção de todos os vértices tais que nenhuma aresta de E' incide sobre eles. Esse grafos são chamados, respectivamente, **grafo induzido por** V' e **grafo induzido por** E'. $G \setminus E'$ é o grafo obtido removendo as arestas de E' de G e $G \setminus V'$ indica o subgrafo obtido pela remoção de V' e das arestas que incidem sobre vértices de V'.

Um **caminho** entre os vértices i e j em um grafo é uma sequência de vértices distintos tal que o vértice i é o primeiro vértice da sequência, o vértice j é o último vértice da sequência e existe uma aresta entre qualquer vértice e seu sucessor na sequência. Uma **componente conexa** C de um grafo $G = (V,E)$ é um subgrafo induzido por um conjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que, para qualquer par de vértices i e j de V', existe um caminho entre i e j em C.

O **grau** de um vértice i no grafo G é definido como a quantidade de arestas incidentes a i, denotado por $d_G(i)$. Denotamos por $\delta(G)$ o menor dentre o grau de todos os vértices de G. Um grafo é dito **regular** se todos seus vértices possuem o mesmo grau. Mais especificamente, um grafo é dito **d-regular** se seus vértices possuem grau d. Dado um grafo $G = (V,E)$ e $X \subseteq V$, definimos a **vizinhança** de X, denotada por $N(X)$, como o conjunto de vértices adjacentes a algum vértice do conjunto X, isto é, $N(X) = \{i \in V \mid j \in X \ e \ \exists \ (i,j) \in \ E\}$. Um vértice é dito isolado se possui grau zero, i.e., não possui vizinhos.

Dizemos que uma aresta e **cobre** um vértice x, ou alternativamente, que x é coberto por e, se a aresta e incide sobre x. Um **emparelhamento** em um grafo $G = (V,E)$ é um subconjunto $E' \subseteq E$ tal que as arestas de E' são duas a duas não adjacentes. Um **emparelhamento perfeito** (também conhecido como **1-fator**) é um emparelhamento que cobre todos os vértices do grafo. Um emparelhamento M é dito **emparelhamento máximo** no grafo G quando não existe em G um emparelhamento com mais que $|M|$ arestas. Por fim, um **emparelhamento para um subconjunto** $X \subseteq V$ é um emparelhamento que cobre todos os vértices de X.

Dado um grafo $G = (V,E)$, denotamos o conjunto das arestas entre $S \subseteq V$ e $T \subseteq V$ por $E_G(S,T)$, i.e., $E_G(S,T) = \{(i,j) \mid i \in S, \ j \in T\}$. A quantidade de arestas em $E_G(S,T)$ é denotada por $e_G(S,T)$. Quando $T = S$, chamamos $E_G(S,T)$ simplesmente de $E_G(S)$ e sua cardinalidade de $e_G(S)$.

2.2 Emparelhamentos

Veremos agora alguns resultados importantes que tratam da existência de emparelhamentos em grafos.

Philip Hall demonstrou um teorema que fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de emparelhamentos que cobrem todos os vértices de X, onde X é uma das partições de um grafo bipartido [Hal35]. Essa condição diz respeito à vizinhança dos subconjuntos de X e estabelece que todo subconjunto de X com k vértices deve possuir no mínimo k vizinhos. Este teorema pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Hall [Hal35])**.** *Seja G um grafo bipartido com partição (X,Y). Existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de Y se e somente se,*

$$|N(A)| \geq |A| \qquad \textit{para todo } A \subseteq Y \tag{2.1}$$

Devido à sua importância, daremos aqui uma demonstração desse teorema.

Demonstração. Uma vez que existe um emparelhamento que cobre todos os vértices de Y, é fácil ver que a condição de Hall (2.1) é válida. Iremos mostrar a outra implicação utilizando indução em $|Y|$.

Se $|Y| = 1$ e $|N(Y)| \geq |Y|$, então um único vértice $y \in Y$ possui pelo menos um vizinho $x \in X$, de modo que a aresta (x,y) é um emparelhamento que cobre todos os vértices de Y. Suponha que o resultado seja válido quando $|Y| < n$ para algum inteiro n. Seja $G = (V,E)$ um grafo bipartido com partições X e Y, onde $|Y| = n$. Considere separadamente os casos onde existe $S \subset Y$ tal que $|N_G(S)| = |S|$ e quando não existe.

Considere primeiro o caso onde para todo $S \subset Y$, $|N_G(S)| > |S|$. Seja G^* o grafo obtido da remoção de uma aresta qualquer (x,y) e dos vértices $x \in X$ e $y \in Y$. Veremos agora que G^* possui um emparelhamento que cobre todos os vértices de $Y \setminus y$. Suponha que $S \subseteq Y \setminus y$, com isso, temos que $|N_{G^*}(S)| \geq |S|$, pois supomos $|N_G(S)| > |S|$ e só foi removida uma aresta. Pela hipótese indutiva, G^* possui um emparelhamento M^* que cobre todos os vértices de $Y \setminus y$. Claramente, $M^* \cup (x,y)$ é um emparelhamento para G que cobre todos os vértices de Y.

Considere agora que exista um subconjunto S de Y tal que $|N(S)| = |S|$. Seja $G' = G[(Y \setminus S) \cup (X \setminus N(S))]$ e T um subconjunto qualquer de $(Y \setminus S)$. Observando que T não possui interseção com S, temos que

$$|N_{G'}(T)| = |N_G(S \cup T)| - |N_G(S)|$$

Mas como $|S| = |N_G(S)|$,

$$\begin{aligned}|N_{G'}(T)| &= |N_G(S \cup T)| - |S| \\ &\geq |S \cup T| - |S| \\ &= |T|\end{aligned}$$

Portanto, pela hipótese indutiva, G' possui um emparelhamento M' que cobre todos os vértices de $(Y \setminus S)$. Claramente, pela hipótese indutiva, o grafo $G'' = G[S \cup N(S)]$ possui um emparelhamento M'' que cobre todos os vértices de S. Com isso, temos que $M' \cup M''$ é um emparelhamento para G que cobre todos os vértices de X.

□

Desde que foi demonstrado em 1935, esse teorema tem se mostrado bastante útil e é muito estudado até os dias de hoje. Veremos no capítulo 3 um estudo sobre a **teoria de fatores**, que generaliza a teoria dos emparelhamentos e um de seus principais alicerces é o Teorema 2.2.1 de Hall.

Frobenius observou, anos antes de Philip Hall ter demonstrado o Teorema 2.2.1 de Hall, um fato interessante sobre emparelhamentos perfeitos em grafos bipartidos, que pode ser observado no seguinte teorema, que é um caso particular do Teorema de Hall.

Teorema 2.2.2 ([Fro12])**.** *Seja G um grafo bipartido com partição (X,Y) de vértices. Existe um emparelhamento perfeito para G se e somente se*

- $|N(A)| \geq |A|$ *para todo* $A \subseteq Y$
- $|X| = |Y|$

Existem algumas generalizações interessantes do Teorema de Hall. William Tutte demonstrou um importante resultado para a teoria de emparelhamentos, onde mostra uma condição necessária e suficiente para a existência de um emparelhamento perfeito em um grafo qualquer [Tut47]. O Teorema de Tutte é definido da seguinte forma, onde $C_i(G)$ é o número de componentes de G que possuem uma quantidade ímpar de vértices:

Teorema 2.2.3 (Teorema de Tutte [Tut47])**.** *Seja $G = (V,E)$ um grafo qualquer. Existe um emparelhamento perfeito se e somente se*

$$C_i(G \backslash A) \leq |A| \qquad \textit{para todo } A \subseteq V$$

.

Clark Benson e Franklin Lowenthal demonstraram em 1993 uma outra generalização do Teorema de Hall, relaxando a exigência de se obter um emparelhamento.

Teorema 2.2.4 ([BL93]). *Seja G um grafo bipartido com partição (X,Y) de vértices e $c > 0$ um inteiro. Existe um conjunto de arestas $E' \subseteq E$ tal que, para todo $x \in X$, existem no máximo c arestas de E' incidentes a x e todos os vértices de Y são cobertos por E' se e somente se $\forall p \equiv 1$ mod c, $c \leq |X|$, cada subconjunto de X com p vértices possui pelo menos $\frac{p+c-1}{c}$ vizinhos.*

Observe que esse teorema generaliza a quantidade de arestas que *podem* incidir sobre os vértices de X. Uma outra generalização estabelece a quantidade de arestas que *devem* incidir sobre vértices de Y (No Teorema 2.2.1, essa quantidade é unitária para todos os vértices de Y).

Teorema 2.2.5 ([HV50]). *Seja G um grafo bipartido com partição X e Y de vértices e $g : Y \to \mathbb{Z}^+$ uma função. Existe um conjunto de arestas $E' \subseteq E$ tal que para todo $y \in Y$, existem exatamente $g(y)$ arestas de E' incidentes a y, e todos os vértices de X são extremos de no máximo uma aresta de E' se e somente se*

$$|N(A)| \geq \sum_{y \in A} g(y) \qquad \textit{para todo } A \subseteq Y$$

3 Teoria dos Fatores

Introduzimos agora o conceito de fator de um grafo. Na primeira seção fornecemos as definições essenciais sobre o tema e nas seções subsequentes fazemos um estudo sobre algumas generalizações dos fatores, discutindo os principais resultados existentes na literatura.

3.1 Definição

Fatores generalizam o conceito de emparelhamentos. Dado um grafo G, dizemos que H é um **fator** de G se é um subgrafo gerador de G, ou seja, H é obtido a partir da remoção de algumas arestas de G. Se H é d-regular, então dizemos que é um d-fator de G (A Figura 3.1 mostra exemplos de um grafo que contém um 1-fator e de um grafo que não contém um 1-fator). Podemos então dizer que estamos tratando da teoria dos subgrafos geradores. Existem muitos resultados relacionados à teoria de fatores, os mais antigos deles remontam a Petersen [Pet1891], Frobenius [Fro12], Hall [Hal35] e Tutte [Tut47].

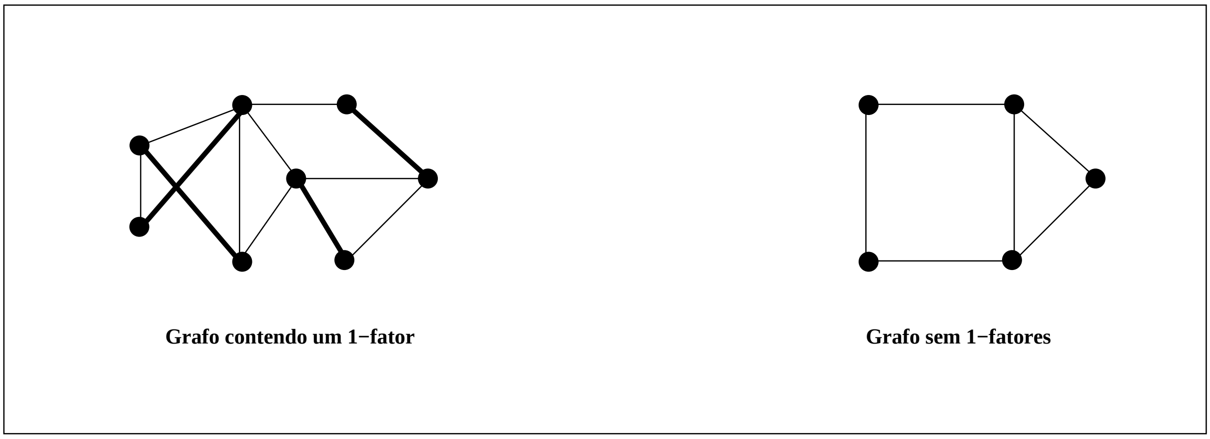

Figura 3.1: Exemplo de grafos que contém 1-fatores e grafos que não contém 1-fatores.

Um caso particular importante de d-fatores ocorre quando consideramos $d = 1$. Um **1-fator** de um grafo G é simplesmente um subgrafo H tal que suas arestas formam um

emparelhamento perfeito para G. Dessa forma, é fácil ver que o Teorema 2.2.2 de Frobenius fornece condições necessárias e suficientes para a existência de um 1-fator em grafos bipartidos e o Teorema 2.2.3 de Tutte fornece condições para a existência de 1-fatores em grafos quaisquer. Esses teoremas, juntamente com o teorema de Petersen [Pet1891], que estabelece que todo grafo 3-regular 2-conexo por arestas[1] possui um 1-fator, compõem a primeira fase de desenvolvimento da teoria de fatores.

Posteriormente surgiram diversas generalizações para o conceito de fator. Basicamente, as condições sobre o grau dos vértice de um fator podem ser relaxadas de diversas maneiras. Tratamos dessas generalizações nas próximas seções, onde definimos os diversos tipos de fatores existentes e apresentaremos os principais teoremas em cada caso. Para um estudo mais aprofundado sobre fatores, o leitor pode consultar o livro de Akiyama e Kano [AK07] ou um resumo dos resultados existentes feito por Plummer [Plu07].

3.2 f-Fatores

Um tipo natural de fatores a ser considerado é obtido quando permitimos que o grau dos vértices do fator possam ser diferentes. Formalmente, dado um grafo G e uma função $f : V(G) \to \mathbb{Z}^+$, dizemos que um subgrafo gerador H de G é um f-fator se temos $d_H(x) = f(x)$, para todo x em H. Na Figura 3.2, fornecemos um exemplo de um grafo e as arestas que definem um f-fator para esse grafo, onde os números próximos aos vértices representam o valor da função f aplicada a esse vértice.

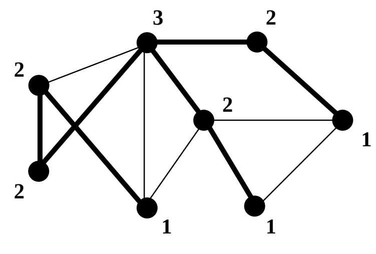

Figura 3.2: Grafo contendo f-fatores.

Um dos teoremas mais importantes que tratam de f-fatores foi proposto por Tutte

[1]Um grafo 2-conexo por arestas é um grafo conexo tal que se removermos qualquer aresta, o grafo permanece conexo.

e é conhecido como *Teorema do f-fator*. Podemos dizer que esse teorema forma a base para o estudo de f-fatores, uma vez que fornece condições necessárias e suficientes para a existência de f-fatores em um grafo. Devido à sua importância, apresentamos também a sua demonstração.

Teorema 3.2.1 (Teorema do f-fator [Tut52])**.** *Dados $G = (V,E)$ um grafo qualquer e uma função $f : V(G) \to \mathbb{Z}^+$, G possui um f-fator se, e somente se, para todos os subconjuntos disjuntos S e T de $V(G)$,*

$$\delta(S,T) = \sum_{x\in S} f(x) + \sum_{y\in T} (d_G(y) - f(y)) - e_G(S,T) - q(S,T) \geq 0 \tag{3.1}$$

onde $q(S,T)$ denota a quantidade de componentes C do subgrafo $G-(S\cup T)$ tal que

$$\sum_{x\in V(C)} f(x) + e_G(C,T) \equiv 1(mod\ 2) \tag{3.2}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$)

Dizemos que $C \in (G-(S\cup T))$ é uma *componente f-ímpar* se satisfaz à condição (3.2) acima.

Inicialmente, suponha que G possui um f-fator F. Devemos mostrar que a desigualdade (3.1) é válida, observando que podemos considerar o grafo G conexo, pois se a desigualdade (3.1) é satisfeita para cada componente conexa de G, então também é satisfeita para G.

Seja $S = T = \varnothing$. Dizemos que $q(S,T) = 0$. De fato, observe que a única componente conexa que poderia ser uma componente f-ímpar é o próprio grafo G, uma vez que G é conexo e $G-(S\cup T)$ é o próprio grafo G. Mas sabemos que:

$$\sum_{x\in V(G)} f(x) + e_G(G,\varnothing) = \sum_{x\in V(G)} d_F(x) = 2|E(F)| \equiv 0(mod\ 2)$$

Mas o fato acima contraria (3.2) para G, de onde concluímos que $q(\varnothing,\varnothing) = 0$. Com isso, temos que a desigualdade (3.1) é válida.

Seja agora $S\cup T \neq \varnothing$, onde S e T são conjuntos disjuntos de vértices de G. Seja $q(S,T) = k$ e $C_1, C_2, \ldots, C_k$ as componentes f-ímpares de $G-(S\cup T)$.

Temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in T}(d_G(x)-f(x)) &= \sum_{x\in T} d_{G-F}(x)\\ &\geq e_{G-F}(S,T)+\sum_{i=1}^{k} e_{G-F}(T,C_i)\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde a primeira desigualdade segue do seguinte fato:

$$d_G(x)-f(x)=d_G(x)-d_F(x)=d_{G-F}(x)$$

Observe também que:

$$\sum_{x\in S} f(x) \geq \sum_{x\in S} d_F(x) \geq e_F(S,T)+\sum_{i=1}^{k} e_F(S,C_i) \tag{3.4}$$

Substituindo as desigualdades (3.3) e (3.4) na definição de $\delta(S,T)$, temos:

$$\begin{aligned}\delta(S,T) \geq\ & e_{G-F}(S,T)+\sum_{i=1}^{k} e_{G-F}(T,C_i)\\ +\ & e_F(S,T)+\sum_{i=1}^{k} e_F(S,C_i)\\ -\ & e_G(S,T)-k\\ =\ & \sum_{i=1}^{k}(e_F(S,C_i)+e_{G-F}(T,C_i)-1)\end{aligned}$$

Para concluir o resultado, basta mostrar que:

$$e_F(S,C_i)+e_{G-F}(T,C_i)-1\geq 0, \qquad para\ 1\leq i\leq k$$

Se $e_{G-F}(T,C_i)\geq 1$, não há o que fazer. Portanto, podemos considerar $e_{G-F}(T,C_i)=0$, logo, $e_G(T,C_i)=e_F(T,C_i)$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in V(C_i)} f(x)+e_G(C_i,T) &= \sum_{x\in V(C_i)} d_F(x)+e_F(C_i,T)\\ &=(2e_F(C_i,C_i)+e_F(C_i,S)+e_F(C_i,T))+e_F(C_i,T)\\ &=2(e_F(C_i,C_i)+e_F(C_i,T))+e_F(C_i,S)\\ &\equiv e_F(C_i,S)(mod\ 2)\end{aligned}$$

Mas pela desigualdade (3.2) do Teorema, sabemos que:

$$\sum_{x\in V(C_i)} f(x) + e_G(C_i,T) \equiv 1 (mod\ 2)$$

Pelas duas relações apresentadas acima, podemos concluir que $e_F(C_i,S) \geq 1$, logo, $\delta(S,T) \geq 0$, como queríamos.

$(\Longleftarrow)$

Mais uma vez iremos supor que o grafo G é conexo. Demonstramos abaixo que, uma vez satisfeita a desigualdade (3.1), o grafo G possui um f-fator.

A idéia é construir um novo grafo G' a partir de G, de modo que existe um f-fator em G se, e somente se, existe um emparelhamento perfeito em G'. Feito isso, é preciso mostrar que G' possui um emparelhamento perfeito somente se a desigualdade (3.1) é satisfeita.

Comecemos pela construção de G'. Cada vértice $x \in V(G)$ some e dá lugar a $2d_G(x) - f(x)$ novos vértices. Considere um vértice $x \in V(G)$ qualquer e o conjunto $\{e_1(x)$, $e_2(x)$, $\ldots$, $e_{d_G(x)}(x)\}$ das arestas que incidem sobre x. Para cada $e_i(x)$ incidente a x, criamos um vértice $s_1(x)$ e chamamos esse conjunto de vértices de S_x. Restam ainda $d_G(x) - f(x)$ vértices a serem criados. Denotamos por $T_x = \{t_1(x), t_2(x), \ldots, t_p(x)\}$ esse conjunto de vértices, onde $p = d_G(x) - f(x)$.

Temos agora que definir as arestas do grafo G'. Seja x um vértice qualquer de G. Para cada vértice $s_i(x)$, com $1 \leq i \leq d_G(x)$, é criada uma aresta entre $s_i(x)$ e $s_j(y)$, onde $e_i(x) = (x,y)$ e $e_j(y) = (x,y)$, para $y \in V(G)$. Você pode visualizar esse conjunto de arestas como sendo o mesmo conjunto de arestas do grafo G, de modo que o denotamos também por $E(G)$. As outras arestas de G' formam um grafo bipartido completo com partições S_x e T_x, para todo vértice x de G.

Portanto, $G' = (V', E')$, tal que:

$$V' = \bigcup_{x\in V(G)} S_x \cup T_x$$

$$E' = E(G) \cup \{ \bigcup_{x\in V(G)} (v,w) \mid v \in S_x\ e\ w \in T_x\}$$

Um exemplo da construção de G' a partir de um grafo G pode ser visto na Figura 3.3.

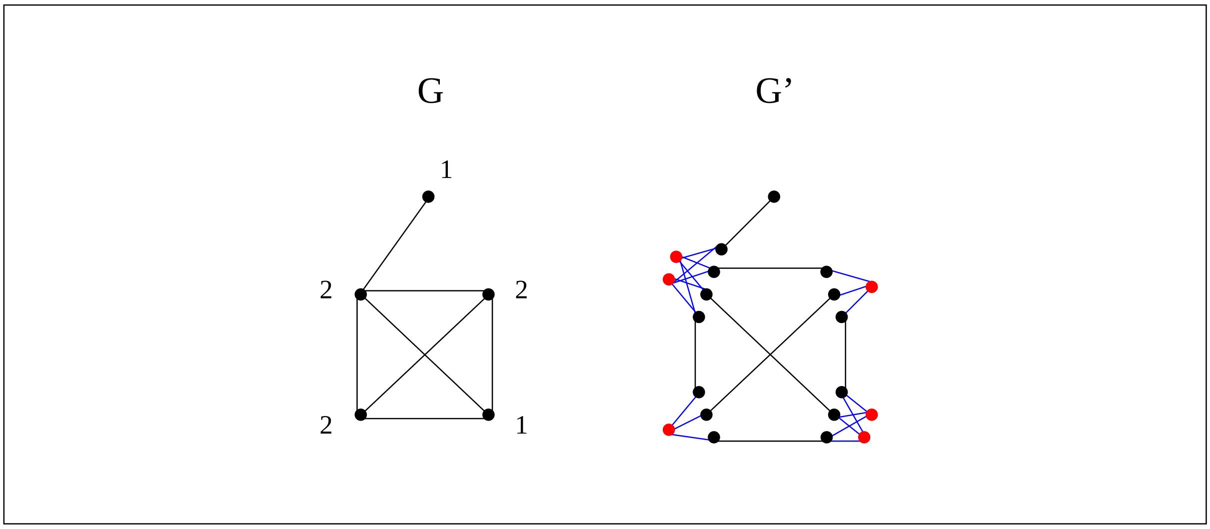

Figura 3.3: Exemplo da construção do grafo G' a partir de G (Os números ao lado dos vértices de G representam o valor de f aplicada a esses vértices).

Veremos agora que G possui um f-fator se, e somente se, G' possui um emparelhamento perfeito. Primeiro, suponha que G possui um f-fator F. As arestas de F formam um emparelhamento que cobre $f(x)$ vértices de S_x, para todo $x \in V(G)$. Resta emparelhar os $d_G(x) - f(x)$ vértices restantes de S_x (Chamamos esse conjunto de RS_x) e os vértices de T_x. Mas observe que $|T_x| = d_G(x) - f(x)$ e, mais ainda, S_x e T_x são as partições de um grafo bipartido completo. Logo, existe um emparelhamento perfeito para $RS_x \cup T_x$. Esse emparelhamento, juntamente com as arestas de F, formam um emparelhamento perfeito para G'. Suponha agora que G' possui um emparelhamento perfeito M. É fácil ver que $M \cap E(G)$ formam um f-fator para G.

Por fim, devemos mostrar que G' possui um emparelhamento perfeito somente se a desigualdade (3.1) é válida.

Suponha, por absurdo, que a desigualdade (3.1) é válida e G não possui um f-fator. Pelo que foi discutido acima, sabemos que G' não possui um emparelhamento perfeito. Com isso, pelo Teorema (2.2.3), existe um subconjunto $Y \subseteq V(G')$ tal que $C_i(G' - Y) > |Y|$, lembrando que $C_i(G' - Y)$ representa a quantidade de componentes conexas de $G' - Y$ que possuem um número ímpar de vértices. Seja X um conjunto minimal de vértices contido em Y, i.e., para qualquer subconjunto próprio W de X, temos que $C_i(G' - W) \leq |W|$ e $C_i(G' - X) > |X|$.

Para continuar a demonstração, precisamos observar alguns fatos:

Fato 1. *Se* $T_v \cap X \neq \varnothing$ *e* $T_v \nsubseteq X$*, então* $C_i((G' - X) \cup T_v) \geq C_i(G' - X) - 1$*, para todo*

$v \in V(G)$.

Fato 2. *Se algum vértice de T_v pertence a X, então T_v está contido em X, para todo $v \in V(G)$.*

Fato 3. *Se algum vértice de S_v pertence a X, então S_v está contido em X, para todo $v \in V(G)$.*

Fato 4. *Se S_v está contido em X, então T_v não está contido em X, e vice-versa. Isto é, $S_v \cup T_v \nsubseteq X$, para todo $v \in V(G)$.*

Sejam $X(S) = \{v \in V(G) \mid S_v \subseteq X\}$ e $X(T) = \{v \in V(G) \mid T_v \subseteq X\}$.

Fato 5. *A quantidade de vértices isolados de $G' - X$ pertencentes a $\bigcup_{v \in V(G)} S_v$ é igual a $e_G(X(S), X(T))$.*

Fato 6. *A quantidade de vértices isolados de $G' - X$ pertencentes a $\bigcup_{v \in V(G)} T_v$ é igual a $\sum_{x \in X(S)} (d(x) - f(x))$.*

Fato 7. $|X| - C_i(G' - X) = \delta(X(S), X(T))$

Obs.: $\delta(.,.)$ está definido em (3.1), na página 20.

Vamos às demonstrações dos fatos acima.

Demonstração - Fato 1. Sejam $\{v_1, \ldots, v_p\}$ os vértices de $T_v \cap X$. Se $S_v \setminus X = \varnothing$, então $\{v_1, \ldots, v_p\}$ não possuem vizinhos em $G' - X$ e, portanto, formam p componentes conexas ímpares e o fato está provado. Suponha agora que $S_v \setminus X \neq \varnothing$. Desta forma, todos os vértices de $(T_v \setminus X) \cup (S_v \setminus X)$ estão em uma mesma componente conexa, uma vez que T_v e S_v são as partições de um grafo bipartido completo. Portanto, adicionando $T_v \cap X$ a $G' - X$, não mais que uma única componente conexa ímpar pode vir a ter uma quantidade par de vértices após a adição de $T_v \cap X$. Concluimos então que $C_i((G' - X) \cup T_v) \geq C_i(G' - X) - 1$. □

Demonstração - Fato 2. Seja $T_v \cap X \neq \varnothing$. Suponha, por absurdo, que $T_v \nsubseteq X$. Pelo fato 1, temos que $C_i((G' - X) \cup T_v) \geq C_i(G' - X) - 1$, mas, sabemos que $C_i(G' - X) \geq |X| + 1$. Logo, $C_i((G' - X) \cup T_v) \geq C_i(G' - X) \geq |X| > |X \setminus T_v|$, um absurdo, pois X é minimal. □

Demonstração - Fato 3. Suponha, por absurdo, que $S_v \cap X \neq \varnothing$ e $S_v \nsubseteq X$. Sabemos que cada vértice de $S_v \cap X \neq \varnothing$ em G' é adjacente aos vértices de T_v e a algum vértice de S_w, onde $(v, w) \in E(G)$. Sabemos, pelo fato 2, que $T_v \subseteq X$ ou $T_v \cap X = \varnothing$.

Seja $u \in S_v \cap X$. Se $T_v \subseteq X$, então u possui somente um vizinho em $G' - X$. Logo, neste caso:

$$C_i((G' - X) \cup u) \geq C_i(G' - X) - 1$$

Se $T_v \cap X = \varnothing$, então os vértices de $T_v \setminus X$ estão em uma mesma componente conexa, uma vez que $S_v \setminus X \neq \varnothing$ e T_v e S_v são as partições de um grafo bipartido completo. Com isso, temos (Ver Figura 3.4):

$$C_i((G' - X) \cup u) \geq C_i(G' - X) - 1$$

Pois, sejam C_w e C_v as componentes a que pertencem, respectivamente, S_w e $S_v \cup T_v$. Um das quatro alternativas ocorrem:

- Se $|C_w| \equiv |C_v| \equiv 0$ $(mod\ 2)$, então $|C_w| + |C_v| + 1 \equiv 1$ $(mod\ 2)$.
- Se $|C_w| \equiv 1$ $(mod\ 2)$ e $|C_v| \equiv 0$ $(mod\ 2)$, então $|C_w| + |C_v| + 1 \equiv 0$ $(mod\ 2)$.
- Se $|C_w| \equiv 0$ $(mod\ 2)$ e $|C_v| \equiv 1$ $(mod\ 2)$, então $|C_w| + |C_v| + 1 \equiv 0$ $(mod\ 2)$.
- Se $|C_w| \equiv |C_v| \equiv 1$ $(mod\ 2)$, então $|C_w| + |C_v| + 1 \equiv 1$ $(mod\ 2)$.

Portanto, a quantidade de componentes ímpares diminui no máximo de uma unidade ao incorporarmos o vértice u ao grafo $G' - X$.

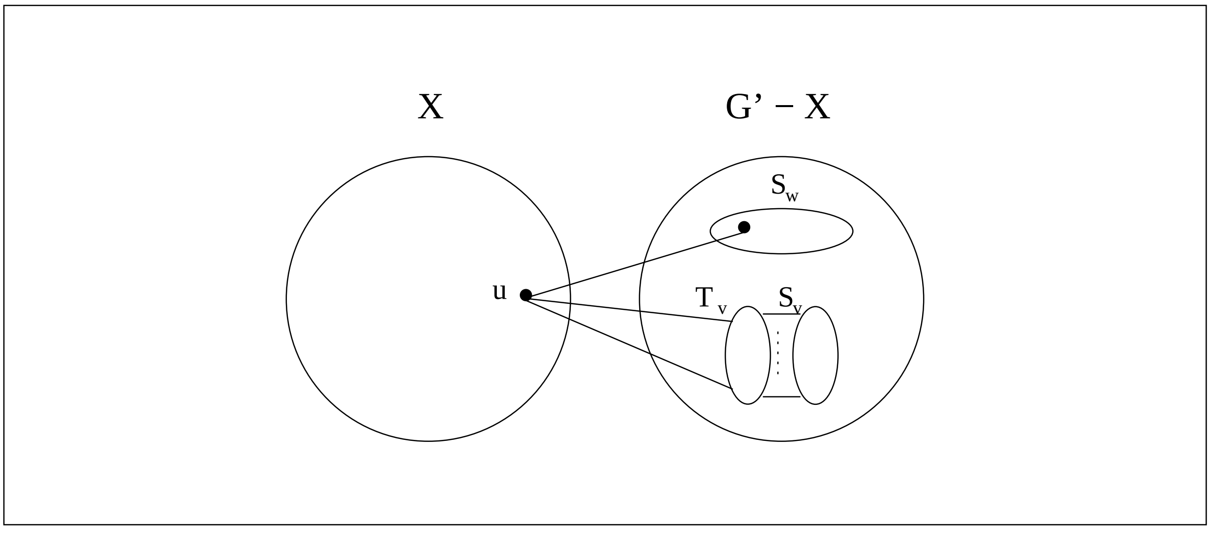

Figura 3.4: Ajuda a entender Fato 3

Portanto, podemos concluir que:

$$C_i((G' - X) \cup u) \geq C_i(G' - X) - 1 \geq |X| > |X \setminus u|$$

Mas isso é um absurdo, pois contradiz a minimalidade de X.

□

Demonstração - Fato 4. Seja $u \in S_v$. Suponha, por absurdo, que $S_v \cup T_v \subseteq X$. Dessa forma, u possui somente um vizinho em $G' - X$. Logo:

$$C_i((G' - X) \cup u) \geq C_i(G' - X) - 1 \geq |X| > |X \setminus u|$$

Mas isso é um absurdo, pois contradiz a minimalidade de X. □

Demonstração - Fato 5. Vamos mostrar que se $u \in S_v$ é um vértice isolado de $G' - X$, para algum $v \in V(G)$, então a aresta $(v,w) \in E(G)$ é uma aresta de $E_G(X(S), X(T))$ e vice-versa.

Seja $u \in S_v$ é um vértice isolado de $G' - X$, para algum $v \in V(G)$, onde $(v,w) \in E(G)$. Por ser um vértice isolado de $G' - X$, todos os vértices de T_v devem estar em X, pois existe uma aresta entre u e todos os vértices de T_v. Também, todos os vértices de S_w devem estar em X, pois, como $(v,w) \in E(G)$, algum vértice de S_w é adjacente a u, logo deve estar em X. Pelo fato 3, todos os vértices de S_w devem estar em X. Portanto, $S_w \subseteq X$ e $T_v \subseteq X$. Com isso, $v \in X(T)$ e $w \in X(S)$ e, portanto, $(v,w) \in E_G(X(S), X(T))$.

Se $(v,w) \in E_G(X(S), X(T))$, então $S_w \subseteq X$ e $T_v \subseteq X$. Com isso, v é um vértice isolado de $G' - X$ que pertence a $\bigcup_{v \in V(G)} S_v$. □

Demonstração - Fato 6. Seja $v \in V(G)$ tal que $T_v \neq \varnothing$. Se existe algum vértice em S_v que não pertence a X, então $u \in T_v$ não é isolado em $G' - X$. Se $S_v \subseteq X$, então existem $d_G(v) - f(v)$ vértices em T_v (ver construção de G') e todos são isolados em $G' - X$. Portanto, temos que a quantidade de vértices isolados em $G' - X$ pertencentes a $\bigcup_{v \in V(G)} T_v$ é igual a $\sum_{x \in X(S)} (d(x) - f(x))$. □

Demonstração - Fato 7. Seja C' uma componente conexa ímpar de $G' - X$ com pelo menos três vértices. Se existe em C' uma aresta conectando um vértice de S_x a um de T_x, então, pelos fatos 2 e 3, $(S_x \cup T_x) \cap X = \varnothing$ e pela construção de G', $S_x \cup T_x \subseteq C'$.

Seja C o grafo induzido pelo conjunto dos vértices x de G tal que $S_x \cup T_x$ são vértices de C'. Podemos descrever os vértices de C' da seguinte forma:

$$V(C') = \bigcup_{x \in V(C)} (S_x \cup T_x) \;\cup\; \bigcup_{x \in V(C)} (N_{G'}(S_x) \setminus (T_x \cup X))$$

Podemos ver que C é uma componente conexa de $G - (X(S) \cup X(T))$, uma vez que C' é uma componente conexa de $G' - X$. Portanto:

$$\begin{aligned}
|C'| &= \left| \bigcup_{x \in V(C)} (S_x \cup T_x) \right| \cup \left| \bigcup_{x \in V(C)} (N_{G'}(S_x) \setminus (T_x \cup X)) \right| \\
&= \sum_{x \in V(C)} (2d_G(x) - f(x)) + e_G(C, X(T)) \\
&\equiv \sum_{x \in V(C)} f(x) + e_G(C, X(T))
\end{aligned}$$

Mas sabemos que $|C'| \equiv 1 \ (mod\ 2)$, pois é uma componente conexa ímpar. Portanto:

$$\sum_{x \in V(C)} f(x) + e_G(C, X(T)) \equiv 1 \ (mod\ 2) \tag{3.5}$$

A relação acima, juntamente com a definição de $q(X(S), X(T))$ (ver enunciado do teorema), nos diz que a quantidade de componentes ímpares com pelo menos três vértices é igual a $q(X(S), X(T))$.

Sabemos que:

$$|X| = \sum_{x \in X(S)} d_G(x) + \sum_{x \in X(T)} (d_G(x) - f(x))$$

Os fatos 5 e 6, juntamente com a igualdade acima, fornecem a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
|X| - C_i(G' - X) &= \sum_{x \in X(S)} d_G(x) + \sum_{x \in X(T)} (d_G(x) - f(x)) - e_G(X(S), X(T)) \\
&\quad - \sum_{x \in X(S)} (d_G(x) - f(x)) - q(X(S), X(T)) \\
&= \sum_{x \in X(S)} f(x) + \sum_{x \in X(T)} (d_G(x) - f(x)) - e_G(X(S), X(T)) - q(X(S), X(T)) \\
&= \delta(X(S), X(T))
\end{aligned}$$

□

Não podemos esquecer que X é um conjunto tal que $C_i(G' - X) > |X|$. Temos então:

$$C_i(G' - X) - |X| > 0 \tag{3.6}$$

Mas, por (3.1), $\delta(X(S), X(T)) \geq 0$. Com isso e o fato 7, temos que $|X| - C_i(G' - X) \geq 0$, absurdo, pois contradiz (3.6). Portanto, a demonstração está concluída.

□

As condições que garantem a existência de f-fatores no Teorema do f-Fator não são tão simples, no sentido que muitos termos precisam ser analisados, tais como quantidade de componentes de subgrafos, quantidade de arestas entre subgrafos etc. Outra observação importante é que todos os pares possíveis de subconjuntos disjuntos de $V(G)$ precisam ser levados em consideração. Vejamos também que a demonstração faz uso do Teorema 2.2.3 de Tutte.

Quando consideramos grafos bipartidos, as condições para que G tenha um f-fator se tornam um pouco mais simples. O termo $q(S,T)$ não é mais necessário e agora, ao invés de considerarmos todos os pares possíveis S e T de subconjuntos disjuntos de $V(G)$, precisamos considerar somente os pares de subconjuntos disjuntos de $V(G)$ que encontram-se em partes diferentes. Esse teorema foi originalmente proposto por Folkman e Fulkerson.

Teorema 3.2.2 (Teorema do f-fator para grafos bipartidos [FF70])**.** *Dados um grafo bipartido $G = (V,E)$ com partição (X,Y) e uma função $f : V(G) \to \mathbb{Z}^+$, G possui um f-fator se, e somente se, para todos os subconjuntos disjuntos $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$,*

$$\sum_{x \in S} f(x) + \sum_{y \in T} (d_G(y) - f(y)) - e_G(S,T) \geq 0$$

e

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(y)$$

Demonstração para esse e diversos outros teoremas sobre f-fatores em grafos bipartidos podem ser vistos em [AK07].

A existência de f-fatores foi estudada em alguns tipos especiais de grafos, onde foram obtidas condições de existência de naturezas diferentes. Podemos destacar, por exemplo, o estudo de f-fatores em grafos bipartidos que contém um certo subconjunto de arestas e *exclui* outro subconjunto de arestas. Dizemos que um grafo G *exclui* um certo subconjunto de arestas D se $E(G) \cap D = \varnothing$. O teorema a seguir fornece uma condição interessante para existência de fatores em tais grafos.

Teorema 3.2.3 ([LZ04]). *Dados um grafo bipartido $G = (V,E)$ com partição (X,Y), uma função $f : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ com $\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f(y)$ e subconjuntos disjuntos de arestas C e D, G possui um f-fator contendo C e excluindo D se e somente se para todo $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$:*

$$(\sum_{x \in S} f(x) - \sum_{y \in T} f(y)) + e_G(X \setminus S, T) \geq |C \cap E_G(S, Y \setminus T)| + |D \cap E_G(T, X \setminus S)|$$

A condição acima nos diz que, para cada $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$, a diferença entre a soma de f aplicada aos vértices de S e a soma de f aplicada aos vértices de T, somada à quantidade de arestas incidentes a T que não incidem sobre S, deve ser maior ou igual à quantidade de arestas de C entre S e $Y \setminus T$ somado com a quantidade de arestas de D entre T e $X \setminus S$.

Em [LZ04] podem ser vistos alguns outros resultados que tratam sobre f-fatores em grafos bipartidos.

3.3 Fatores Regulares

Consideremos agora f-fatores em que a função f é constante, ou seja, para todo vértice x, $f(x) = k$, neste caso dizemos que H é um fator k-regular ou um k-fator. Esse fatores são conhecidos na literatura como **fatores regulares**. O principal resultado sobre fatores regulares foi obtido por Belck e Tutte.

Teorema 3.3.1 (Teorema do k-fator [Bel50] e [Tut52]). *Dados um grafo $G = (V,E)$ e um inteiro $k \geq 1$, G possui um k-fator se e somente se para todos os subconjuntos disjuntos S e T de $V(G)$,*

$$k|S| + \sum_{x \in T} d_{G-S}(x) - k|T| - q(S,T) \geq 0$$

onde $q(S,T)$ denota a quantidade de componentes C do subgrafo $G - (S \cup T)$ tal que

$$k|C| + e_G(C,T) \equiv 1(mod\ 2)$$

Quando se está interessado apenas em condições suficientes para a existência de fatores regulares, obtemos teoremas que fornecem condições simples que garantem essa existência. Para exemplificar, podemos citar os seguintes resultados:

Teorema 3.3.2 ([Kat87])**.** *Seja $G = (V,E)$ um grafo bipartido com partição (X,Y). Então, G possui um 2-fator se as seguintes condições são satisfeitas:*

- $|X| = |Y|$
- *para todo subconjunto $S \subset Y$ segue que:*

$$\begin{array}{ll} |N_G(S)| \geq \frac{3}{2}|S| & \quad se\ |S| < \left\lfloor \frac{2}{3}|Y| \right\rfloor\ e \\ N_G(S) = X & \quad caso\ contrário \end{array}$$

Observe que um 2-fator é um grafo formado somente por ciclos. Explicando de forma simples, o teorema acima nos diz que um grafo bipartido G com partição (X,Y) possui um subgrafo gerador formado somente por ciclos se a condição óbvia $|X| = |Y|$ é válida e, mais ainda, todo subconjunto próprio S de Y *expande*, no sentido que possui uma certa quantidade de vizinhos maior que sua quantidade de vértices, e S tem X como conjunto de vizinhos.

Outro teorema simples e interessante é enunciado abaixo:

Teorema 3.3.3 ([Wan99] e [LWY01])**.** *Seja $G = (V,E)$ um grafo bipartido com partição (X,Y). Então, G possui um 2-fator com exatamente k ciclos independentes se $|X| = |Y| = n > 2k$ e $\delta(G) \geq n/2 + 1$.*

No teorema acima, é suficiente para a existência de fatores formados por exatamente k ciclos independentes (onde $k < n/2$) que todo vértice de uma parte possua mais da metade dos vértices da outra parte como vizinhos.

Terminamos esta seção com um teorema de Katerinis e Tsikopoulos, onde foram fornecidas condições de existência de emparelhamentos perfeitos baseadas em cobertura de vértices e conectividade em vértices para grafos bipartidos que excluem um certo subconjunto de arestas. $\kappa(G)$ denota o menor número de vértices que, se removidos, tornam o grafo G desconexo, e $c(G)$ denota a cardinalidade da menor cobertura de vértices do grafo G, onde por cobertura de vértices entenda um conjunto de vértices S tal que todas as arestas do grafo incidem em S.

Teorema 3.3.4 ([KT96]). *Dados um grafo bipartido d-regular $G=(V,E)$ com partição (X,Y), uma função $f:V(G)\rightarrow\mathbb{Z}^+$ e um subconjunto de arestas D tal que $|D|=d+r, G-D$ tem um 1-fator (emparelhamento perfeito) se $\kappa(G)\geq c(G[D])+r+1$ e $\delta(G-D)\geq 1$.*

3.4 (g,f)-Fatores

Definimos agora uma generalização de f-fatores. Essa generalização surge da seguinte idéia: Por que não buscar caracterizações para fatores em que existe uma faixa de valores possíveis para os graus dos vértices, ao invés dos graus serem necessariamente iguais ao valor que a função f fornece aos vértices? Essa noção é formalizada considerando um par de funções $f,g:V(G)\rightarrow\mathbb{Z}^+$ com $g(x)\leq f(x)$, para todo $x\in V(G)$. Um subgrafo H é um (g,f)-fator de G se $g(x)\leq d_H(x)\leq f(x)$, para todo vértice x. A Figura 3.5 mostra um exemplo de um grafo e um (g,f)-fator desse grafo, onde os números próximos aos vértices representam, respectivamente, o valor de g e f aplicadas a esses vértices.

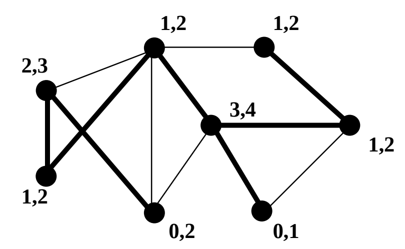

Figura 3.5: Grafo contendo (g,f)-fatores

Como no caso dos f-fatores, existe uma caracterização para a existência de (g,f)-fatores em um grafo G. A demonstração desse teorema faz uso do Teorema do f-Fator (Teorema 3.2.1) e a reproduzimos abaixo.

Teorema 3.4.1 (Teorema do (g,f)-fator [Lov72]). *Dados um grafo $G=(V,E)$ e funções $f,g:V(G)\rightarrow\mathbb{Z}^+$ com $g(x)\leq f(x)$, para todo $x\in V(G)$, G possui um (g,f)-fator se e somente se para todos os subconjuntos disjuntos S e T de $V(G)$,*

$$\delta^*(S,T) = \sum_{x\in S} f(x) + \sum_{y\in T}(d_G(y) - g(y)) - e_G(S,T) - q^*(S,T) \geq 0 \tag{3.7}$$

onde $q^*(S,T)$ *denota a quantidade de componentes* C *do subgrafo* $G-(S\cup T)$ *tais que*

$$\begin{aligned} &i)\ f(x) = g(x) \qquad \forall x \in V(C) \\ &ii) \sum_{x\in V(C)} f(x) + e_G(C,T) \equiv 1 (mod\ 2) \end{aligned}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$)

Dizemos que $C \in V(G-(S\cup T))$ é uma *componente* (g,f)*-ímpar* se satisfaz às condições (i) e (ii) acima.

Inicialmente, suponha que G possui um (g,f)-fator F. Devemos mostrar que a desigualdade (3.7) é válida, observando que podemos considerar o grafo G conexo (caso contrário, bastaria analisar suas componentes conexas separadamente).

Seja $S = T = \varnothing$. Dizemos que $q^*(S,T) = 0$. De fato, observe que a única componente conexa que poderia ser uma componente (g,f)-ímpar é o próprio grafo G, uma vez que G é conexo e $G-(S\cup T)$ é o próprio grafo G. Porém, se para algum vértice v, temos que $g(v) < f(v)$, então a condição (i) não é satisfeita para G e portanto, $q^*(S,T) = 0$. Se $g(v) = f(v)$ para todo vértice v de G, então

$$\sum_{x\in V(G)} f(x) + e_G(G,\varnothing) = \sum_{x\in V(G)} d_F(x) = 2|E(F)| \equiv 0 (mod\ 2)$$

Mas o fato acima contraria a condição (ii) para G, de onde concluímos que $q^*(S,T) = 0$. Com isso, temos que a desigualdade (3.7) é válida.

Seja agora $S\cup T \neq \varnothing$, onde S e T são conjuntos disjuntos de vértices de G. Seja $q^*(S,T) = k$ e $C_1, C_2, \ldots, C_k$ as componentes (g,f)-ímpares de $G-(S\cup T)$.

Temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{x\in T}(d_G(x) - g(x)) &\geq \sum_{x\in T} d_{G-F}(x) \\ &\geq e_{G-F}(S,T) + \sum_{i=1}^{k} e_{G-F}(T, C_i) \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde a primeira desigualdade segue do seguinte fato:

$$d_G(x) - g(x) \geq d_G(x) - d_F(x) = d_{G-F}(x)$$

Observe também que:

$$\sum_{x \in S} f(x) \geq \sum_{x \in S} d_F(x) \geq e_F(S,T) + \sum_{i=1}^{k} e_F(S,C_i) \tag{3.9}$$

Substituindo as desigualdades (3.8) e (3.9) em (3.7), temos:

$$\begin{aligned}
\delta^*(S,T) \geq\ & e_{G-F}(S,T) + \sum_{i=1}^{k} e_{G-F}(T,C_i) \\
+\ & e_F(S,T) + \sum_{i=1}^{k} e_F(S,C_i) \\
-\ & e_G(S,T) - k \\
=\ & \sum_{i=1}^{k} (e_F(S,C_i) + e_{G-F}(T,C_i) - 1)
\end{aligned}$$

Para concluir o resultado, basta mostrar que:

$$e_F(S,C_i) + e_{G-F}(T,C_i) - 1 \geq 0, \qquad para\ 1 \leq i \leq k$$

Se $e_{G-F}(T,C_i) \geq 1$, não tem o que fazer. Portanto, consideremos $e_{G-F}(T,C_i) = 0$, logo, $e_G(T,C_i) = e_F(T,C_i)$. Lembre-se que $g(x) = f(x) = d_F(x)$ para todo $x \in V(C_i)$. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in V(C_i)} f(x) + e_G(C_i,T) &= \sum_{x \in V(C_i)} d_F(x) + e_F(C_i,T) \\
&= (2e_F(C_i,C_i) + e_F(C_i,S) + e_F(C_i,T)) + e_F(C_i,T) \\
&= 2(e_F(C_i,C_i) + e_F(C_i,T)) + e_F(C_i,S) \\
&\equiv e_F(C_i,S) (mod\ 2)
\end{aligned}$$

Mas pela condição (ii) do Teorema, sabemos que:

$$\sum_{x \in V(C_i)} f(x) + e_G(C_i,T) \equiv 1 (mod\ 2)$$

Pelas duas desigualdades apresentadas acima, podemos concluir que $e_F(C_i,S) \geq 1$, logo, $\delta^*(S,T) \geq 0$, como queríamos.

($\Longleftarrow$)

Mais uma vez iremos supor que o grafo G é conexo. Demonstramos abaixo que, uma vez satisfeita a desigualdade (3.7), o grafo G possui um (g,f)-fator.

Vamos assumir que existe pelo menos um vértice x em G tal que $g(x) < f(x)$. De fato, suponha que $g(x) = f(x)$ para todo vértice x de G. Neste caso, não há o que demonstrar, pois um (g,f)-fator é um f-fator e, dessa forma, o resultado segue pelo Teorema do f-Fator (3.2.1).

A idéia da demonstração é transformar o grafo G em um novo grafo G', tal que G' possui um f'-fator se, e somente se, G possui um (g,f)-fator. Feito isso, é verificado que uma vez que a desigualdade (3.7) é válida, G' possui um f'-fator (Isto é feito utilizando o Teorema do f-Fator).

Vamos focar nossa atenção agora na construção do grafo G'. Simplesmente, adicionamos um vértice w ao conjunto de vértices de G e adicionamos $(f(x) - g(x))$ arestas entre x e w, para cada vértice x de G. Adicionalmente, acrescentamos M laços no vértice w. Na Figura 3.6 pode ser visto um exemplo da construção de G' a partir de um grafo G. M é definido adiante.

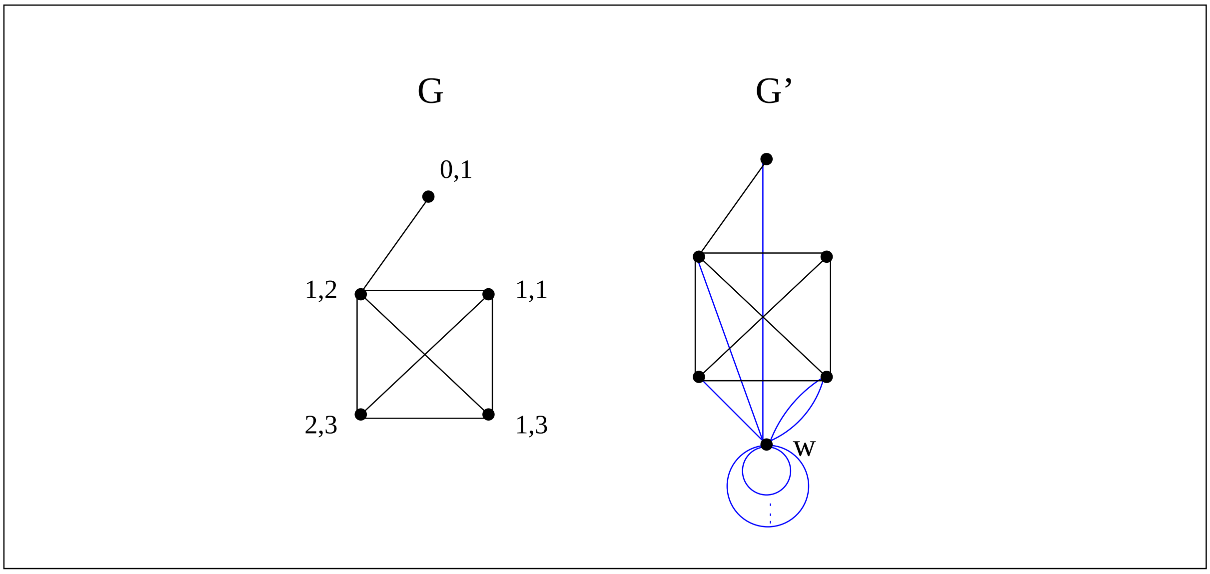

Figura 3.6: Exemplo da construção do grafo G' a partir de G (Os números ao lado dos vértice de G representam, respectivamente, o valor de g e f aplicadas a esses vértices).

Seja a função $f' : V(G') \to \mathbb{Z}^+$ definida como:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, se } x \in V(G) \\ M & \text{, se } x = w \end{cases}$$

Seja $M = \sum_{x \in V(G)} f(x) + 2N$, onde $2N$ é um inteiro suficientemente grande.

Vejamos agora que se G possui um (g,f)-fator, então G' possui um f'-fator. Seja F um (g,f)-fator de G. Adicionemos $f(x) - d_F(x)$ arestas entre x e w ao fator F para cada vértice x de G. Mais ainda, adicione $\left(\sum_{x \in V(G)} d_F(x)\right)/2 + N$ laços ao vértice w. Temos então que o grau de cada vértice x de G é $f(x)$ e o grau de w é:

$$\sum_{x \in V(G)} (f(x) - d_F(x)) + 2N + \sum_{x \in V(G)} d_F(x) = M$$

Portanto, o subgrafo construído é um f'-fator do grafo G.

Suponha agora que G' possui um f'-fator, que denotamos por F'. Seja $F = F' - \{w\}$. Observe que, para $x \in V(G)$:

$$\begin{aligned} d_F(x) &= d_{F'}(x) - e_{F'}(x,w) \\ &\geq d_{F'}(x) - e_{G'}(x,w) \\ &= f(x) - (f(x) - g(x)) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned} d_F(x) &\leq d_{F'}(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $g(x) \leq d_F(x) \leq f(x)$ para todo vértice x de G, e portanto, F é um (g,f)-fator para G.

Resta mostrar que quando a desigualdade (3.7) é válida, existe um f'-fator do grafo G'. Para tal, utilizaremos o Teorema do f-Fator (3.2.1). Observe que:

$$\begin{aligned}\sum_{x\in V(G')} f'(x) &= \sum_{x\in V(G)} f(x)+M \\ &= 2\left(\sum_{x\in V(G)} f(x)+N\right) \\ &\equiv 0\ (mod\ 2)\end{aligned}$$

A desigualdade acima, juntamente com o fato de G' ser um grafo conexo, nos diz que $q_{G'}(\varnothing,\varnothing)=0$ e, portanto, $\delta_{G'}(\varnothing,\varnothing)=0$ (Definições de $\delta_{G'}(.,.)$ e $q_{G'}(.,.)$ podem ser vistas no enunciado do Teorema do f-Fator (3.2.1)).

Seja agora $S\cup T\neq\varnothing$, onde S e T são conjuntos disjuntos de vértices de G'. Primeiramente, suponha que $w\in S$. Dessa forma, desde que M seja suficientemente grande, temos:

$$\delta_{G'}(S,T)=\sum_{x\in S\setminus\{w\}} f(x)+M+\sum_{x\in T}(d_{G'}(x)-f(x))-e_{G'}(S,T)-q_{G'}(S,T)\geq 0$$

Suponha agora que $w\in T$. Da mesma forma, se M for suficientemente grande, temos:

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T) &= \sum_{x\in S} f(x)+\sum_{x\in T}(d_{G'}(x)-f(x))-e_{G'}(S,T)-q_{G'}(S,T) \\ &= \sum_{x\in S} f(x)+\sum_{x\in T\setminus\{w\}}(d_{G'}(x)-f(x))+(d_{G'}(w)-f'(w))-e_{G'}(S,T)-q_{G'}(S,T) \\ &\geq \sum_{x\in S} f(x)+\sum_{x\in T\setminus\{w\}}(d_{G'}(x)-f(x))+2M-M-e_{G'}(S,T)-q_{G'}(S,T) \\ &= \sum_{x\in S} f(x)+\sum_{x\in T\setminus\{w\}}(d_{G'}(x)-f(x))+M-e_{G'}(S,T)-q_{G'}(S,T) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Dessa forma, se $w\in S\cup T$, então, pelo Teorema do f-Fator, temos que G' possui um f'-fator.

Consideremos então $w\notin S\cup T$. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T) &= \sum_{x\in S} f'(x)+\sum_{x\in T}(d_{G'}(x)-f'(x))-e_{G'}(S,T)-q_{G'}(S,T) \\ &= \sum_{x\in S} f(x)+\sum_{x\in T}(d_G(x)-g(x))-e_G(S,T)-q_{G'}(S,T)\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue pelo fato de que $d_{G'}(x) = d_G(x) + f'(x) - g(x)$, para todo $x \neq w$ (lembre-se que $f'(x) = f(x)$, para todos $x \neq w$).

Seja C uma componente f'-ímpar de $G' - (S \cup T)$ que não contém w. Como C é uma componente f'-ímpar, temos que $e_{G'}(C, w) = 0$ e, portanto, $g(x) = f(x)$, para todo vértice x de C. Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in V(C)} f'(x) + e_{G'}(C,T) &= \sum_{x \in V(C)} f(x) + e_G(C,T) \\ &= 1 \ (mod\ 2)\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue pela definição de componente f'-ímpar.

Portanto, mostramos que se C é uma componente f'-ímpar de $G' - (S \cup T)$, então C é uma componente (g, f)-ímpar de $G - (S \cup T)$. Dessa forma, podemos concluir que $q_{G'}(S,T) \leq q^*_G(S,T) + 1$, pois a componente conexa de $G - (S \cup T)$ que contém w pode ser uma componente f'-ímpar. Com isso,

$$\begin{aligned}\delta_{G'}(S,T) &\geq \sum_{x \in S} f(x) + \sum_{x \in T} (d_G(x) - g(x)) - e_G(S,T) - q_G(S,T) - 1 \\ &= \delta^*(S,T) - 1 \\ &\geq -1\end{aligned} \tag{3.10}$$

Faremos uso da seguinte equivalência que foi demonstrada por Tutte:

$$\delta_{G'}(S,T) \equiv \sum_{x \in V(G')} f'(x) \ (mod\ 2)$$

Mas como:

$$\begin{aligned}\sum_{x \in V(G')} f'(x) &= \sum_{x \in V(G)} f(x) + f'(w) \\ &= \sum_{x \in V(G)} f(x) + M \\ &= \sum_{x \in V(G)} f(x) + \sum_{x \in V(G)} f(x) + 2N \\ &= 2(\sum_{x \in V(G)} f(x) + N)\end{aligned}$$

Temos que:

$$\delta_{G'}(S,T) \equiv 0 \ (mod\ 2)$$

A equivalência acima juntamente com a desigualdade (3.10), nos diz que $\delta_{G'}(S,T) \geq 0$ e, portanto, G' possui um f'-fator (pelo Teorema do f-Fator). Portanto, podemos concluir que G possui um (g,f)-fator.

□

A caracterização do teorema anterior não é simples, uma vez que envolve muitos termos e muitos subconjuntos de vértices precisam ser levados em consideração. Observe também que foi utilizado, na demonstração, o teorema do f-fator (Teorema 3.2.1), que por sua vez faz uso do Teorema 2.2.3. Um caso particular que simplifica muito as coisas ocorre quando forçamos $g(x)$ a ser estritamente menor que $f(x)$ para todo $x \in V(G)$. Neste caso, as condições envolvidas se tornam mais simples, pois o termo $q^*(S,T)$ some da desigualdade (como $f(x) \neq g(x)$ para todo vértice x, então $q^*(S,T) = 0$, para todo S e T), como pode ser visto no seguinte resultado.

Teorema 3.4.2 (Teorema do (g,f)-fator com $g < f$)**.** *Dados um grafo $G = (V,E)$ e funções $f,g : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ com $g(x) < f(x)$, para todo $x \in V(G)$, G possui um (g,f)-fator se e somente se para todos os subconjuntos disjuntos S e T de $V(G)$,*

$$\sum_{x \in S} f(x) + \sum_{y \in T} (d_G(y) - g(y)) - e_G(S,T) \geq 0$$

No caso de analisarmos grafos bipartidos, as condições para a existência de (g,f)-fatores é essencialmente a mesma do teorema anterior. A única diferença é que a quantidade de pares de subconjuntos de vértices analisados é menor. O seguinte teorema foi obtido por Folkman e Fulkerson [[FF70]].

Teorema 3.4.3 (Teorema do (g,f)-fator para grafos bipartidos)**.** *Dados um grafo bipatido $G = (V,E)$ com partição (X,Y), e funções $f,g : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ com $g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in V(G)$, G tem um (g,f)-fator se e somente se para todos subconjuntos $S \subseteq X$ e $T \subseteq Y$,*

$$\sum_{x \in S} f(x) + \sum_{y \in T} (d_G(y) - g(y)) - e_G(S,T) \geq 0$$

e

$$\sum_{x \in T} f(x) + \sum_{y \in S} (d_G(y) - g(y)) - e_G(S,T) \geq 0$$

Outro importante teorema foi proposto por Las Vergnas, que considera (g,f)-fatores restringindo os valores que a função g pode assumir. Las Vergnas assumiu que $g(x) \leq 1$ para todo x.

Teorema 3.4.4 (Teorema do (g,f)-fator com $g \leq 1$ [Ver78])**.** *Dados um grafo $G = (V,E)$ e funções $f,g : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ com $g(x) \leq 1$ e $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in V(G)$, G tem um (g,f)-fator se e somente se para todo subconjunto $S \subset V(G)$,*

$$\bar{C}_i(g, G-S) \leq \sum_{x \in S} f(x)$$

onde $\bar{C}_i(g, G-S)$ denota a quantidade de componentes C de $G-S$ tais que vale uma das seguintes condições:

- *$C = \{x\}$ e $g(x) = 1$.*
- *$\mid C \mid$ é ímpar, $\mid C \mid > 2$ e $g(x) = f(x) = 1$, para todo $x \in V(C)$.*

Com isso, exibimos os mais importantes resultados conhecidos acerca de (g,f)-fatores.

3.5 $[a,b]$-Fatores

Definimos agora uma generalização para os fatores regulares. Dados um grafo $G = (V,E)$ e inteiros a e b tais que $1 \leq a \leq b$, dizemos que um subgrafo gerador H é um $[a,b]$-fator de G se $a \leq d_H(x) \leq b$, para todo vértice x. Note que se definirmos uma função f de modo que, para todo vértice x, $a \leq f(x) \leq b$, então H é um f-fator e, se $a = b$, temos que H é um fator regular de G. O seguinte teorema é consequência direta do Teorema 3.4.1:

Teorema 3.5.1 (Teorema do $[a,b]$-fator (Lovász))**.** *Sejam $G = (V,E)$ um grafo qualquer, e inteiros a, b tais que $1 \leq a < b$. Então, G tem um $[a,b]$-fator se, e somente se, para todos os subconjuntos disjuntos S e T de $V(G)$, com $S \cup T \neq \varnothing$,*

$$b|S| + \sum_{y \in T} d_{G-S}(y) - a|T| \geq 0$$

Observe que essa condição para a existência de $[a,b]$-fatores é bem mais simples que a dos (g,f)-fatores, uma vez que não existe mais o termo $q^*(S,T)$ (ver Teorema 3.4.1). De fato, como $a \neq b$, então $q^*(S,T) = 0$, quaisquer que sejam S e T. Para ser possível $q^*(S,T) \neq 0$, algum vértice x deveria ter $f(x) = g(x)$, no neste caso, $a = b$.

Se estamos interessados apenas em condições suficientes para a existência de $[a,b]$-fatores, é possível obter condições bem simples. Por exemplo, veja o seguinte teorema de Kano e Saito.

Teorema 3.5.2 ([KS83])**.** *Sejam m,n,a e b inteiros tais que $1 \leq m \leq n$ e $1 \leq a < b \leq n$, e G um $[m,n]$-grafo*[2]*. Se $\frac{a}{b} \leq \frac{m}{n}$, então G possui um $[a,b]$-fator.*

Observe que a condição dada é a melhor possível, no sentido de que existem $[m,n]$-grafos com $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$ que não possuem $[a,b]$-fatores. Para ver isto, basta investigar o grafo bipartido completo com m vértices em uma partição e n na outra. Aplicando o Teorema 3.5.1 às partições desse grafo, concluímos que ele não possui $[a,b]$-fatores.

Outro caminho para a investigação de existência de fatores é aberto quando consideramos grafos tais que todos os vizinhos não possuem grau muito diferente. Formalmente, dizemos que um grafo é **localmente k-quase regular** se $|d_G(x) - d_G(y)| \leq k$, para todo par de vértices adjacentes $x, y \in V(G)$.

Nessas condições, obtém-se o seguinte teorema provado por Joentgen e Volkmann.

Teorema 3.5.3 ([JV91])**.** *Sejam k,s e t inteiros tais que $1 \leq k,t$ e $0 \leq s$, e G um grafo localmente s-quase regular. Se valem as seguintes desigualdades:*

$$i)\ k \leq \delta(G)$$
$$ii)\ \frac{s}{\delta(G)} \leq \frac{t}{k}$$

então, G possui um $[k,k+t]$-fator.

Por fim, enunciamos um teorema que ilustra outros tipos de condições que podem ser impostas sobre o grafo. O grafo bipartido completo com um vértice em uma parte e três vértices na outra parte é chamado de *garra*. Dizemos que um grafo é *livre de garra* se não possui nenhum subgrafo induzido que é uma garra. Temos o seguinte teorema.

Teorema 3.5.4 ([LL98])**.** *Se G é um grafo 2-conexo livre de garra, então G possui um [2,3]-fator conexo.*

[2]Um $[m,n]$-grafo é um grafo onde o grau de todos os vértices é no mínimo m e no máximo n

4 Teorema do (g, f)-Fator Restrito Para Grafos Bipartidos (TFR_B)

Neste capítulo definimos um novo tipo de fator, que se enquadra entre os f-fatores e os (g, f)-fatores. Na seção 4.1, é dada a definição desse novo fator, bem como exemplos e teoremas relevantes e, na seção 4.2, é dado um teorema que fornece condições necessárias e suficientes para a existência desses fatores em grafos bipartidos.

4.1 (g, f)-Fatores Restritos para (X,Y)

Propomos uma nova classe de fatores que se enquadra entre os f-fatores e os (g, f)-fatores, podendo ser vista como uma generalização dos f-fatores e como um caso particular dos (g, f)-fatores. Considere um grafo bipartido $G = (V,E)$ com partição (X,Y) e funções $f : X \to \mathbb{Z}^+$ e $g : Y \to \mathbb{Z}^+$. Dizemos que G possui um (g, f)-*fator restrito para* (X,Y) se existe um subgrafo gerador H tal que $d_H(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ e $d_H(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$. A Figura 4.1 apresenta um exemplo desse novo tipo de fator, onde os números próximos aos vértices da parte X indicam o valor da função f aplicada a esses vértices e os números próximos aos vértices da parte Y indicam o valor da função g aplicada a esses vértices.

Comparando (g, f)-fatores restritos com f-fatores, podemos observar que, dado um grafo $G = (V,E)$, tomando $X = \varnothing$ e $Y = V(G)$, então um (g, f)-fator restrito para (X,Y) é também um g-fator de G. Com isso, podemos ver que, de fato, (g, f)-fatores restritos são generalizações de f-fatores.

(g, f)-fatores restritos são um caso particular dos (g, f)-fatores. Dados um grafo bipartido $G = (V,E)$ com partição (X,Y) e funções $f, g : X \to \mathbb{Z}^+$, defina as funções $f', g' : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ da seguinte forma:

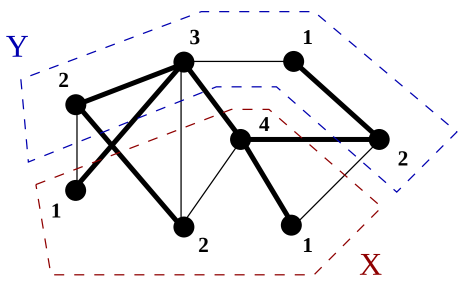

Figura 4.1: Grafo contendo (g,f)-fatores restritos.

$$g'(i) = \begin{cases} 0 & \text{, se } i \in X \\ g(i) & \text{, se } i \in Y \end{cases}$$

$$f'(i) = \begin{cases} f(i) & \text{, se } i \in X \\ g(i) & \text{, se } i \in Y \end{cases}$$

Então, se F é um (g,f)-fator restrito para (X,Y) em G, podemos dizer também que F é um (g',f')-fator para G.

Existem problemas interessantes relacionados com (g,f)-fatores restritos. Dessa forma, é importante se encontrar condições necessárias e suficientes para existência de tais fatores em grafos quaisquer, grafos bipartidos ou outra classe de grafos. Mais a frente neste capítulo, demonstramos um teorema que fornece condições que garantem a existência de (g,f)-fatores restritos, para o caso onde os grafos são bipartidos. No Capítulo 5, mostramos mais alguns resultados que obtemos sobre (g,f)-fatores restritos.

Naturalmente, definimos um novo tipo de fator chamado **$[a,b]$-fator restrito**. É um caso particular de (g,f)-fatores restritos, em que as funções envolvidas são constantes. Sejam um grafo $G = (V,E)$ e subconjuntos X e $Y = G - X$ de $V(G)$. Dizemos que um subgrafo H é um $[a,b]$-fator restrito para (X,Y), se H é um (g,f)-fator restrito para (X,Y), tal que $f(x) = a$ para todo $x \in X$ e $g(y) = b$ para todo $y \in Y$. Isto é, $d_H(x) \leq a$ para todo $x \in X$ e $d_H(y) = b$ para todo $y \in Y$.

Existem alguns teoremas que tratam de $[a,b]$-fatores restritos em grafos bipartidos, pois alguns autores investigaram a existência desses fatores sob a visão de generalização de fatores regulares. O teorema a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de $[a,b]$-fatores restritos em grafos bipartidos.

Teorema 4.1.1 (Ver capítulo 2 de [AK07]). *Sejam $a \geq 2$ e $b \geq 2$ inteiros e G um grafo bipartido com partição (X,Y). Então G possui um subgrafo gerador H tal que*

$$\begin{aligned} d_H(x) &\leq a \qquad \textit{para todo } x \in X, \ \textit{e} \\ d_H(y) &= b \qquad \textit{para todo } y \in Y \end{aligned}$$

se, e somente se,

$$a|T| + e_G(S, N(S) - T) - b|S| \geq 0$$

para todos os subconjuntos $S \subseteq Y$ e $T \subseteq X$.

O teorema acima pode ser enunciado no contexto de $[a,b]$-fatores restritos como:

Teorema 4.1.1 *Sejam $a \geq 2$ e $b \geq 2$ inteiros e G um grafo bipartido com partição (X,Y). Então G possui um $[a,b]$-fator restrito para (X,Y) H se e somente se*

$$a|T| + e_G(S, N(S) - T) - b|S| \geq 0$$

para todos os subconjuntos $S \subseteq Y$ e $T \subseteq X$.

Enomoto, Ota e Kano demonstraram um resultado que fornece uma condição suficiente, mas não necessária para a existência de $[a,b]$-fatores restritos, que é mais simples que a fornecida pelo Teorema 4.1.1. Porém, esse resultado só garante a existência de $[a,b]$-fatores restritos em grafos bipartidos que satisfazem certas restrições na quantidade de elementos das partes e na quantidade de vizinhos de certos subconjuntos de vértices.

Teorema 4.1.2 ([EOK88]). *Sejam $a \geq 2$ e $b \geq 2$ inteiros e $\lambda = b - 1 + (1/a)$. Seja G um grafo bipartido com partição (X,Y). Suponha que G satisfaça às seguintes condições:*

(i) $b|Y| \leq a|X|$ e $|X| \geq a$.
(ii) para cada $S \subseteq Y$,

$$\begin{aligned} |N_G(S)| &\geq \lambda|S|, \qquad \textit{se } |S| < \left\lfloor \frac{|X|}{\lambda} \right\rfloor \\ N_G(S) &= X, \qquad \textit{caso contrário.} \end{aligned}$$

Então, G possui um subgrafo gerador H tal que

$$d_H(x) \le a \quad \textit{para todo } x \in X$$

$$d_H(y) = b \quad \textit{para todo} y \in Y$$

Mostramos na próxima seção e no capítulo seguinte, alguns resultados que obtemos sobre (g, f)-fatores restritos.

4.2 Teorema do (g, f)-Fator Restrito Para Grafos Bipartidos (TFR_B)

Apresentamos agora o resultado principal deste trabalho, chamado de *Teorema do (g, f)-fator restrito para grafos bipartidos* (TFR_B) que generaliza a condição de Hall para a existência de um emparelhamento que cobre todos os vértices de um dos lados da partição em um grafo bipartido, considerando agora a existência de (g, f)-fatores restritos. Fornecemos condições necessárias e suficientes para a existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos. A demonstração dada é direta (totalmente independente de outros resultados), de modo que o leitor não precisa ser remetido a nenhum outro trabalho para verificar a validade do teorema. Na demonstração do Teorema 3.4.1 (Teorema do (g, f)-fator), é utilizado o Teorema 3.2.1 (Teorema do f-fator), que por sua vez faz uso do Teorema 2.2.3 de Tutte.

É importante ressaltar que é possível obter o TFR_B indiretamente, através de algumas manipulações realizadas no Teorema 3.4.3. Porém, a demonstração do Teorema 3.4.3 faz uso do Teorema 3.4.1 e do Teorema 3.4.2, o que torna difícil obter uma intuição de como as coisas funcionam. Como exemplo do esforço para obtenção de demonstrações que não dependam de outros resultados em teoria de fatores, podemos citar a demonstração feita em [AK07] para o Teorema 3.4.2. Essa demonstração utiliza, dentre outras coisas, uma análise dos caminhos alternantes do grafo.

Claramente o Teorema de Hall, a generalização do Teorema de Hall proposta por Benson e Lowenthal e o Teorema 2.2.5 (apresentados no capítulo 2) são casos particulares do TFR_B. Seja G um grafo bipartido com partições X e Y e funções $f : X \to \mathbb{Z}^+$ e $g : Y \to \mathbb{Z}^+$. Por exemplo, em um (g, f)-fator restrito para (X, Y) em G, para ver que o Teorema de Hall é um caso particular do TFR_B, basta tomar $f(i) = 1$ para todo vértice i de X e $g(j) = 1$ para todo vértice j de Y.

Sejam um grafo G bipartido com partição (X, Y) e $f : X \to \mathbb{Z}^+$ e $g : Y \to \mathbb{Z}^+$ funções. Para facilitar o entendimento do problema de conseguir condições que garantam a existência de (g,f)-fatores restritos, uma boa idéia é imaginar que, uma a uma, arestas são escolhidas para, aos poucos, compor o conjunto de arestas do (g,f)-fator restrito. Imagine que cada vértice $y \in Y$ precisa contribuir com arestas incidentes a ele até que $g(y)$ dessas arestas sejam escolhidas. Isso deve ser feito sem que mais que $f(x)$ arestas incidentes a x sejam escolhidas, para todo vértice $x \in X$. Veja os vértices x de X como elementos que querem ajudar na formação do (g,f)-fator restrito, porém, eles só podem contribuir com no máximo $f(x)$ arestas que incidem sobre eles.

Introduzimos agora algumas definições que são utilizadas no enunciado e demonstração do teorema. Para toda fórmula descrita abaixo, A representa o conjunto de arestas que já foram selecionadas para fazer parte do (g,f)-fator restrito, podendo ser **omitido** quando $A = \varnothing$. Dado um vértice i, defina $A(i)$ como o conjunto de arestas de A incidentes a i.

Para as definições abaixo, considere $G = (V,E)$ um grafo bipartido com partição (X,Y) e funções $f : X \to \mathbb{Z}^+$ e $g : Y \to \mathbb{Z}^+$.

- **Precisão (Necessidade) de $y \in Y$**
  - $P_A^g(y) = g(y) - A(y)$
  - Quantidade de arestas incidentes a y que precisam ser adicionadas a A para que y tenha $g(y)$ arestas incidentes a A (O termo g de $P_A^g(y)$ pode ser omitido quando não houver prejuízo para o entendimento).
- **Ajuda de $x \in X$**
  - $H_A^f(x) = f(x) - A(x)$
  - Quantidade de arestas incidentes a x que podem ser adicionadas a A sem que mais que $f(x)$ arestas de A incidam sobre x (O termo f de $H_A^f(x)$ pode ser omitido quando não houver prejuízo para o entendimento).
- **Precisão de $T \subseteq Y$**
  - $P_A(T) = \sum_{y \in T} P_A(y),$
- **Indicadora de $y \in Y$**
  - $I_A^g(y) = \begin{cases} 1 & \text{, se } P_A^g(y) \geq 1 \\ 0 & \text{, c.c.} \end{cases}$
  - Função que indica se A possui $g(y)$ arestas que incidem sobre y ou não.

- **Ajuda de $x \in X$ para $U \subseteq Y$**
  - $H_A(x,U) = \min \left\{ \sum_{y \in U \cap N(x)} i_A(y),\ H_A(x) \right\}$
  - Quantidade de arestas com que x pode, de fato, *ajudar* U.

- **Ajuda de $J \subseteq X$ para $U \subseteq Y$**
  - $H_A(J,U) = \sum_{x \in J} H_A(x,U)$

- **Subconjunto saturado $U \subseteq Y$**
  - Subconjunto $U \subseteq Y$ tal que $H_A(N(U),U) = P_A(U)$

- **Subconjunto saturado minimal $U \subseteq Y$**
  - Subconjunto $U \subseteq Y$ tal que $H_A(N(U),U) = P_A(U)$ e para todo $T \subset U$, $H_A(N(T),T) > P_A(T)$,
  - Subconjunto saturado de vértices em que todo subconjunto próprio desses vértices não é saturado.

- **Aresta candidata**
  - Aresta (x,y) tal que $H_A(x) \geq 1$ e $P_A(y) \geq 1$

Teorema 4.2.1 (Teorema do (g,f)-fator restrito para grafos bipartidos)**.** *Dados $G = (V,E)$ um grafo bipartido com partição (X,Y) e funções $f : X \to \mathbb{Z}^+$ e $g : Y \to \mathbb{Z}^+$, G possui um (g,f)-fator restrito para (X,Y) se e somente se*

$$H(N(U),U) \geq P(U), \qquad \textit{para todo } U \subseteq Y \tag{4.1}$$

Basicamente, a desigualdade (4.1) diz que todo subconjunto U de vértices de Y possui vizinhos que podem *ajudá-los* com as $P(U)$ arestas necessárias para a existência de um (g,f)-fator restrito. A discussão realizada na página 44, que mostra uma maneira simples de como pensar sobre o problema, ajuda a entender melhor o que foi dito.

Demonstração.

($\Longrightarrow$)

Suponha que G possua um (g,f)-fator restrito para (X,Y) e seja U um subconjunto qualquer de Y. A quantidade de arestas de X que incidem nos vértices de U é no máximo $H(N(U),U)$ e exatamente igual a $P(U)$. Portanto,

$$H(N(U),U) \geq P(U), \qquad \text{para todo } U \subseteq Y$$

$(\Longleftarrow)$

Sejam $f: X \to \mathbb{Z}^+$ e $g: Y \to \mathbb{Z}^+$, tal que (4.1) seja válida. Considerando $P(Y) = 1$, tome y como sendo o único vértice de Y tal que $g(y) = 1$. Observe que a função g aplicada a todos os outros vértices de Y retorna valor zero, uma vez que $P(Y) = 1$. Sabemos, por (4.1), que $\sum_{x \in N(y)} H(x,y) \geq 1$, logo existe um vértice $x \in N(y)$ tal que $H(x,y) = 1$. Portanto, $G^* = (V(G),(x,y))$ é um subgrafo gerador de G tal que todo vértice $x \in X$ possui grau no máximo $f(x)$ e todo vértice $y \in Y$ possui grau exatamente igual a $g(y)$, logo G^* é um (g,f)-fator restrito para (X,Y) em G.

Seja $P(Y) = k+1$ para o grafo G e suponha que a desigualdade (4.1) é válida, isto é, $\sum_{w \in N(U)} H(w,U) \geq \sum_{z \in U} g(z)$ em G, para todo $U \subseteq Y$. Dizemos que existe uma aresta $(x,y) \in E(G)$ tal que $\sum_{w \in N(U)} H_{(x,y)}(w,U) \geq \sum_{z \in U} P_{(x,y)}(z)$ em G , para todo $U \subseteq Y$ (Demonstramos esse fato mais adiante, ver Lema 1). Seja G' o grafo obtido da remoção da aresta (x,y) de G e as funções $f': X \to \mathbb{Z}^+$ e $g': Y \to \mathbb{Z}^+$, tais que $f'(i) = f(i)$ para todo $i \neq x$ e $f'(x) = f(x) - 1$ e, mais ainda, $g'(j) = g(j)$ para todo $j \neq y$ e $g'(y) = g(y) - 1$, temos então que $\sum_{x \in N(U)} H^{f'}(x,U) \geq \sum_{y \in U} g'(y)$ em G', para todo $U \subseteq Y$, com $P(Y) = k$ em G'.

Aplicando o raciocínio do parágrafo anterior repetidamente, obtemos um subgrafo G^* formado pelos vértices de G e pelas arestas que foram removidas durante todo o procedimento. Portanto, como vimos anteriormente que o resultado é válido quando $P(Y) = 1$, G^* é um (g,f)-fator restrito para (X,Y) em G. $\square$

Resta mostrarmos um fato que foi utilizado acima. Enunciamos e demonstramos este resultado agora e o chamamos de *Lema da adição de arestas*.

4.2.1 Lema da Adição de Arestas

Lema 1 (Lema da adição de arestas)**.** *dados um grafo bipartido $G = (V,E)$ com partição (X,Y) e funções $f : X \rightarrow \mathbb{Z}^+$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{Z}^+$, Se*

$$H(N(U),U) \geq P(U) \qquad \textit{para todo } U \subseteq Y \tag{4.2}$$

onde $P(U) \geq 1$, então existe uma aresta candidata (x,y), com $x \in X$ e $y \in Y$, tal que

$$H_{(x,y)}(N(U),U) \geq P_{(x,y)}(U) \qquad \textit{para todo } U \subseteq Y \tag{4.3}$$

Demonstração. Precisamos inicialmente fazer algumas observações para facilitar o entendimento da demonstração. Quando dissermos que um vértice x pode *ajudar* com k arestas ou pode fornecer k arestas a um certo subconjunto de vértices U, entenda que $H(x,U) = k$. Quando dissermos que um vértice y *necessita* de k arestas, entenda que $P(y) = k$. Dizemos que uma aresta (x,y) é **selecionada** se a estamos levando em consideração para análise de *ajudas* e *necessidades*, isto é, estamos analisando $H_{(x,y)}(w,U)$ ao invés de $H(w,U)$ e $P_{(x,y)}(U)$ ao invés de $P(U)$.

Mostramos o teorema para o caso onde existe um subconjunto de vértices de Y que é *saturado*, que é o caso extremo. Uma vez demonstrado o teorema para este caso, o caso onde não há subconjuntos saturados é trivial. Suponha então que exista um subconjunto saturado. Logo existe um subconjunto saturado minimal S.

Seja (x,y) uma **aresta candidata** qualquer onde $y \in S$. Suponha por contradição que a desigualdade (4.3) não é válida para um certo subconjunto $U \subseteq Y$, isto é:

$$H_{(x,y)}(N(U),U) < P_{(x,y)}(U) \tag{4.4}$$

Analisaremos dois casos particulares. Consideremos separadamente os casos $y \in U$ e $y \notin U$.

Caso 1: $y \notin U$

A princípio este caso pode parecer um pouco complicado, pois como $y \notin U$, selecionando a aresta (x,y), o conjunto U continua necessitando da mesma quantidade de arestas que antes da seleção de (x,y), isto é, $P(U) = P_{(x,y)}U$. Mas pode ser que x não possa fornecer todas as arestas que podia antes da seleção de (x,y), tornando o teorema falso no caso de U ser saturado (veja a Figura 4.2 para um melhor entendimento). Porém, mostramos que não é possível que, neste caso, U seja saturado.

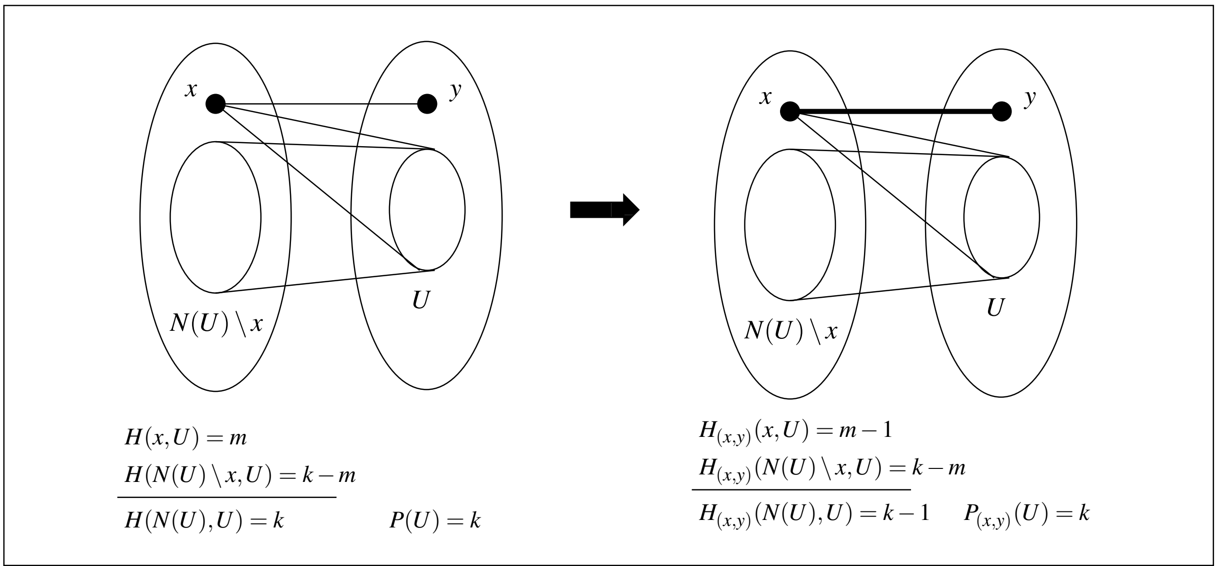

Figura 4.2: Ilustrando que se U for saturado, então a desigualdade (4.4) poderia ser válida e não existiria nenhuma contradição.

Considere $x \in N(U)$, pois caso contrário não teríamos o que provar, uma vez que a ajuda que $N(U)$ poderia oferecer a U seria a mesma de antes da seleção de (x,y). Se $x \in N(U)$, existe um caso que é bem fácil, é o caso onde, após a seleção de (x,y), x pode ajudar U com a mesma quantidade de arestas que antes, isto é, $H_{(x,y)}(x,U) = H(x,U)$, mas sabemos que $P_{(x,y)}(U) = P(U)$, portanto podemos concluir que, como a desigualdade (4.2) é válida, também é válida:

$$H_{(x,y)}(N(U),U) \geq P_{(x,y)}(U)$$

contrariando (4.4).

Resta analisarmos o que acontece quando x deixa de poder ajudar U com a mesma quantidade de arestas que podia antes da seleção de (x,y). Observe que como só uma aresta incidente a x foi selecionada, essa quantidade diminui no máximo de uma unidade. Portanto, temos que:

$$H_{(x,y)}(x,U) = H(x,U) - 1 \tag{4.5}$$

Felizmente, U não pode ser saturado em G (Esse fato é mostrado no Lema 2). Logo,

$$H(N(U),U) > P(U) \tag{4.6}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
H_{(x,y)}(N(U),U) &= H_{(x,y)}(N(U)\setminus\{x\},U) + H_{(x,y)}(x,U)\\
&= H_{(x,y)}(N(U)\setminus\{x\},U) + H(x,U) - 1\\
&= H(N(U)\setminus\{x\},U) + H(x,U) - 1\\
&= H(N(U),U) - 1\\
&> P(U) - 1\\
&= P_{(x,y)}(U) - 1
\end{aligned}$$

Vejamos a idéia dos cálculos realizados acima. Na primeira igualdade apenas dividimos $N(U)$ em dois conjunto disjuntos. A segunda segue de (4.5). Na terceira observamos que como $y \notin U$, a ajuda que $(N(U)\setminus x)$ pode oferecer a U não é afetada após a seleção de (x,y). A quarta igualdade segue pelo fato de $N(U) = (N(U)\setminus x)\cup x$. A desigualdade seguinte segue de (4.6) e, por fim, temos que $P_{(x,y)}(U) = P(U)$, pois $y \notin U$.

Podemos concluir que como $H_{(x,y)}(N(U),U) > P_{(x,y)}(U) - 1$, então $H_{(x,y)}(N(U),U) \geq P_{(x,y)}(U)$, contrariando a desigualdade (4.4).

Caso 2: $y \in U$

Vamos analisar separadamente o que pode ocorrer quando y necessita de mais de uma aresta ($P(y) > 1$) ou quando só precisa de uma aresta ($P(y) = 1$). O caso onde só uma aresta é necessária é o que traz alguma dificuldade. De fato, ao selecionar (x,y), temos que y não necessita de mais nenhuma aresta e dessa forma os vértices de X que podiam ajudar y agora não podem mais e, com isso, poderia ser que a desigualdade (4.2) não continuasse válida após a seleção de (x,y). Seja $P(y) > 1$, o fato de y continuar necessitando de ajuda faz com que $H_{(x,y)}(N(U)\setminus\{x\},U) = H(N(U)\setminus\{x\},U)$, isto é, excetuando x, os vizinhos de U continuam podendo ajudar U com a mesma quantidade de arestas que antes. Observe ainda que x pode ajudar com no máximo uma unidade a menos do que ajudava antes. Logo, como U necessita somente de uma aresta a menos que antes, a desigualdade (4.4) é falsa.

Seja $P(y) = 1$. Utilizaremos o seguinte fato:

Fato 8. *Se $y \in U \cap S$ e x não é vizinho de $U\setminus\{y\}$, então uma das seguintes assertivas é válida:*
(i) $H_{(x,y)}(x, U\setminus\{y\}) > H(x, U\setminus\{y\}) - 1$
(ii) $U\setminus\{y\}$ *não é saturado em* G.

Demonstração. Temos dois casos a analisar, $x \in N(U \setminus \{y\})$ e $x \notin N(U \setminus \{y\})$. Se $x \notin N(U \setminus \{y\})$, então $H_{(x,y)}(x, U \setminus \{y\}) = H(x, U \setminus \{y\}) = 0$, logo, (i) é válida. Se $x \in N(U \setminus y)$, vamos aplicar o *Lema do saturado proibido* (Lema 2). Observe que, nesse caso, além de $x \in N(U \setminus \{y\})$, temos que $y \notin (U \setminus \{y\})$, $y \in S$, a desigualdade (4.2) é válida, x pode ajudar $U \setminus \{y\}$ com uma aresta a menos que antes da seleção de (x, y) (pois caso contrário não há o que fazer) e S é saturado minimal, utilizando o *Lema do saturado proibido* que será enunciado a seguir, temos que $U \setminus \{y\}$ não pode ser saturado em G.

Sabemos que □

$$
\begin{aligned}
H_{(x,y)}(N(U),U) &= H_{(x,y)}(N(U) \setminus x, U) + H_{(x,y)}(x,U) && (1)\\
&= H_{(x,y)}(N(U) \setminus x, U \setminus \{y\}) + H_{(x,y)}(x, U \setminus \{y\}) && (2)\\
&\geq H(N(U) \setminus \{x\}, U \setminus y) + H(x, U \setminus \{y\}) - 1 && (3)\\
&= H(N(U), U \setminus \{y\}) - 1 && (4)\\
&\geq H(N(U \setminus \{y\}), U \setminus \{y\}) - 1 && (5)\\
&\geq P(U \setminus \{y\}) - 1 = P(U) - P(y) - 1 && (6)\\
&= P(U) - 2 && (7)\\
&= P_{(x,y)}(U) - 1 && (8)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Na primeira igualdade somente dividimos $N(U)$ em conjuntos disjuntos. Para a segunda, utilizamos o fato de $P_{(x,y)}(y) = 0$. A desigualdade seguinte segue do fato de x poder ajudar U com pelo menos uma aresta a menos da quantidade que podia ajudar antes da seleção de (x, y). Em seguida, utilizamos o fato de $N(U) = (N(U) \setminus \{x\}) \cup x$. A próxima desigualdade é válida, pois $N(U \setminus \{y\}) \subseteq N(U)$. Utilizamos então a a desigualdade (4.2). Por fim vimos que U precisa, após a seleção de (x, y), exatamente de uma aresta a menos.

Dado o Fato 8, se (i) é válida, então a desigualdade na linha (3) de (4.7) seria estritamente maior, ao invés de maior ou igual. Se (ii) é válida, temos uma relação estritamente maior, ao invés de maior ou igual na linha (6) de (4.7). Portanto, temos que:

$$H_{(x,y)}(N(U),U) > P_{(x,y)}(U) - 1$$

Logo,

$$H_{(x,y)}(N(U),U) \geq P_{(x,y)}(U)$$

Mas isso é uma contradição, pela desigualdade (4.4).

□

A demonstração do *Lema da adição de arestas* só foi possível devido ao lema que enunciamos a seguir.

4.2.2 Lema do Saturado Proibido

Lema 2 (Lema do saturado proibido)**.** *Se as seguintes condições são válidas:*

(i) $S \subseteq Y$ *é saturado minimal.*
(ii) *A desigualdade (4.2) é válida.*
(iii) $x \in N(U)$ *e* $y \in S \backslash U$ *para um certo* $U \subseteq Y$*.*
(iv) $H_{(x,y)}(x,U) = H(x,U) - 1$*.*

Então U *não é saturado em* G*.*

Demonstração. Suponha que as quatro condições são válidas. Consideremos $U \setminus S \neq \varnothing$, pois caso contrário, teríamos que o conjunto U seria propriamente contido em S (veja que $y \notin U$ e $y \in S$) e da minimalidade de S segue que U não seria saturado. Estamos considerando $P(y) > 0$ para todo $y \in Y$.

Observe que, como $H_{(x,y)}(x,U) = H(x,U) - 1$, podemos garantir o seguinte:

Fato 9. $H(x, U \cup S) = H(x,U)$

Demonstração. Suponha por contradição que $H(x,U \cup S) > H(x,U)$, então selecionar (x,y) não faria com que a ajuda de x para U diminuísse, pois se $H(x,U \cup S) > H(x,U)$,

$$\sum_{y \in U \cap N(x)} i(y) < f(x)$$

de onde podemos concluir que,

$$\begin{aligned} H(x,U) &= \min\{\sum_{y \in U \cap N(x)} i(y),\ f(x)\} \\ &= \sum_{y \in U \cap N(x)} i(y) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
H_{(x,y)}(x,U) &= \min\{\sum_{y\in U\cap N(x)} i(y),\ f(x)-1\} \\
&= \sum_{y\in U\cap N(x)} i(y)
\end{aligned}
$$

Com isso, temos que $H_{(x,y)}(x,U) = H(x,U)$, contrariando a hipótese de que $H_{(x,y)}(x,U) = H(x,U)-1$. $\square$

Suponha por contradição que U é *saturado*. Logo,

$$
H(N(U),U) = P(U) \tag{4.8}
$$

Feita essa suposição, veremos abaixo que é impossível que o conjunto $U\cup S$ satisfaça a desigualdade (4.2). Analisemos então o conjunto $U\cup S$:

Consideremos separadamente os casos em que $U\cap S = \varnothing$ e $U\cap S \neq \varnothing$.

Caso $U\cap S = \varnothing$,

$$
\begin{aligned}
H(N(U\cup S),U\cup S) = \quad & H(N(U)\setminus N(S),U\cup S) + H([N(U)\cap N(S)]\setminus x, U\cup S) \\
& + H(x,U\cup S) + H(N(S)\setminus N(U),U\cup S) \\
\\
\leq \quad & H(N(U)\setminus N(S),U) + H(x,U) + H([N(U)\cap N(S)]\setminus x, U) \\
& + H(N(S)\setminus N(U),S) + H([N(U)\cap N(S)]\setminus x, S) \\
& - H([N(U)\cap N(S)]\setminus x, U\cap S) \\
\\
= \quad & H(N(U),U) \\
& + H(N(S)\setminus N(U),S) + H([N(U)\cap N(S)]\setminus x, S) \\
& - H([N(U)\cap N(S)]\setminus x, U\cap S)
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Vamos entender o que foi feito nos cálculos acima. Na primeira igualdade apenas dividimos $N(U\cup S)$ em conjuntos disjuntos. Na desigualdade que vem logo abaixo observamos que $H(N(U)\setminus N(S),U\cup S) = H(N(U)\setminus N(S),U)$, $H(N(S)\setminus N(U),U\cup S) = H(N(S)\setminus N(U),S)$, utilizamos o Fato 9 e o que chamamos de **Corolário da União** aplicado em $H([N(U)\cap N(S)]\setminus x, U\cup S)$. Esse corolário diz que $\forall\ W\subseteq X,\ H(W,U\cup S) \leq H(W,U) + H(W,S) - H(W,U\cap S)$. Mostraremos esse corolário mais adiante. Finalmente, para a última igualdade, basta observar que $N(U) = (N(U) \setminus N(S)) \cup x \cup ([N(U) \cap N(S)] \setminus x)$.

Continuando o desenvolvimento de (4.9):

$$\begin{aligned}
H(N(U \cup S), U \cup S) \leq \;& H(N(U), U) \\
& + \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{S}) + H(N(S) \setminus N(U), S) + H([N(U) \cap N(S)] \setminus x, S) \\
& - H([N(U) \cap N(S)] \setminus x, U \cap S) - \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{S}) \\
= \;& H(N(U), U) \\
& + H(N(S), S) \\
& - H(x, S) \\
\leq \;& P(U) + P(S) - 1 \\
< \;& P(U \cup S)
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade segue de (4.9) e pelo fato de $H(x,S) - H(x,S) = 0$. Como $U \cap S = \varnothing$, temos que $H([N(U) \cap N(S)] \setminus x, U \cap S) = 0$ e, portanto, a próxima igualdade segue. A terceira relação é verificada, pois U e S são saturados e $H(x,S) \geq 1$. Por fim, basta observar que dado $U \cap S = \varnothing$, temos $P(U \cup S) = P(U) + P(S)$.

Suponha agora que $U \cap S \neq \varnothing$. Neste caso, utilizando o Corolário da União, que é consequência de um resultado mostrado na próxima seção, temos o seguinte.

$$\begin{aligned}
H(N(U \cup S), U \cup S) &\leq H(N(U \cup S), U) + H(N(U \cup S), S) - H(N(U \cup S), U \cap S) \\
&= H(N(U), U) + H(N(S), S) - H(N(U \cap S), U \cap S) \\
&< P(U) + P(S) - P(U \cap S) \\
&= P(U \cup S)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

□

A primeira desigualdade segue pelo Corolário da União, qu eserá mostrado a seguir. A segunda relação segue da observação que somente os vizinhos de um dado subconjunto podem o ajudar. Para a terceira relação, veja que U e S são saturados e $U \cap S$ está propriamente contido em S, que é saturado minimal, de onde podemos concluir que

$H(N(U\cap S)) > P(U\cap S)$.

Com esses cálculos mostramos que $H(N(U\cup S), U\cup S) < P(U\cup S)$, mas isso é um absurdo, pois contradiz a validade da desigualdade (4.2).

4.2.3 Lema da União

Teorema 4.2.2 (Lema da união). $\forall x\in X,\ H(x,U\cup S)\leq H(x,U)+H(x,S)-H(x,U\cap S)$

Demonstração. Sabemos que $H(x,U\cup S)=\min\{\sum_{y\in(U\cup S)\cap N(x)} i(y),\ f(x)\}$. Portanto,

$$H(x,U\cup S)\leq \sum_{y\in(U\cup S)\cap N(x)} i(y) \tag{4.11}$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1: $\begin{cases} H(x,U)=f(x) \\ \quad ou \\ H(x,S)=f(x) \end{cases}$

Neste caso temos que $H(x,U\cup S)=f(x)$, pois $H(x,U\cup S)\geq H(x,U)$ e $H(x,U\cup S)\geq H(x,S)$ uma vez que $U\subseteq U\cup S$ e $S\subseteq U\cup S$, mas também é verdade que $H(x,U\cup S)\leq f(x)$. Suponha sem perda de generalidade que $f(x)=H(x,U)$, então temos que

$$\begin{aligned} H(x,U\cup S) &= f(x) \\ &= H(x,U) \\ &\leq H(x,U)+H(x,S)-H(x,U\cap S) \end{aligned}$$

uma vez que $H(x,S)-H(x,U\cap S)\geq 0$.

Caso 2: $\begin{cases} H(x,U)=\sum_{y\in U\cap N(x)} i(y)=\sum_{y\in(U\setminus S)\cap N(x)} i(y)+\sum_{y\in(U\cap S)\cap N(x)} i(y) \\ \quad e \\ H(x,S)=\sum_{y\in S\cap N(x)} i(y)=\sum_{y\in(S\setminus U)\cap N(x)} i(y)+\sum_{y\in(U\cap S)\cap N(x)} i(y) \end{cases}$

Por (4.11), temos que

$$\begin{aligned} H(x,U\cup S) &\leq \sum_{y\in(U\cup S)\cap N(x)} i(y) \\ &= \sum_{y\in(U\setminus S)\cap N(x)} i(y) + \sum_{y\in(S\setminus U)\cap N(x)} i(y) + \sum_{y\in(U\cap S)\cap N(x)} i(y) \end{aligned}$$

Somando com $\sum_{y\in(U\cap S)\cap N(x)} i(y) - \sum_{y\in(U\cap S)\cap N(x)} i(y)$, temos:

$$H(x,U\cup S) \leq H(x,U) + H(x,S) - \sum_{y\in(U\cap S)\cap N(x)} i(y)$$

Mas como $H(x,U) = \sum_{y\in U\cap N(x)} i(y)$, então $H(x,U\cap S) = \sum_{y\in(U\cap S)\cap N(x)} i(y)$, uma vez que $(U\cap S)\subseteq U$. Com isso,

$$H(x,U\cup S) \leq H(x,U) + H(x,S) - H(x,U\cap S)$$

□

Teorema 4.2.3 (Corolário da União). $\forall A\subseteq X,\ H(A,U\cup S) \leq H(A,U) + H(A,S) - H(A,U\cap S)$

Demonstração. A demonstração é simples. Sabemos que, para um subconjunto $A\subseteq X$ qualquer,

$$H(A,U\cup S) = \sum_{x\in A} H(x,U\cup S)$$

Aplicando o *Lema da União* temos que

$$\begin{aligned} H(A,U\cup S) &\leq \sum_{x\in A} H(x,U) + \sum_{x\in A} H(x,S) - \sum_{x\in A} H(x,U\cap S) \\ &= H(A,U) + H(A,S) - H(A,U\cap S) \end{aligned}$$

□

Com isso, encerramos a demonstração do Teorema do (g, f)-fator restrito para grafos bipartidos.

A técnica utilizada na demonstração difere das técnicas normalmente utilizadas para demonstrar teoremas sobre fatores, podendo assim ser útil em demonstrações futuras sobre teoremas que tratam de fatores, ou até mesmo conseguir caracterizações mais simples para os fatores existentes.

Um aspecto interessante é que a demonstração é direta, no sentido que não depende de outros resultados, além de que os conceitos utilizados são todos simples.

Um último ponto importante a ser citado é que as condições fornecidas pelo nosso teorema são intuitivas e simples de entender, diferentemente das condições obtidas nos Teoremas 3.2.2 e 3.4.3.

5 Aplicações do TFR_B

Neste capítulo apresentamos alguns resultados adicionais que obtemos para (g,f)-fatores restritos, além de alguns resultados sobre $[a,b]$-fatores restritos em grafos bipartidos, onde o TFR_B (Teorema 4.2.1) é de fundamental importância nas demonstrações.

Primeiramente, enunciamos um teorema que fornece uma condição necessária e suficiente para que um grafo bipartido possua um $[a,b]$-fator restrito. Mais ainda, as condições obtidas são semelhantes às dadas no Teorema 4.1.1, porém, mais simples de entender.

Conseguir condições simples, mesmo que somente suficientes, para a existência de f-fatores e (g,f)-fatores é algo que é estudado desde o princípio da teoria de fatores. Muitos autores conseguiram obter diversas condições desse tipo considerando certas classes de grafos, algumas restrições no grau dos vértices, restrições nas funções f e g em questão etc (Resultados desses tipos podem ser vistos nos capítulos anteriores). Nesse sentido, estudamos condições suficientes para a existência de (g,f)-fatores restritos em grafos bipartidos, impondo restrições nos possíveis valores que as funções f e g podem assumir. Mostramos também nesse capítulo, dois resultados desse tipo que utilizam o Teorema 4.2.1 (TFR_B) em sua demonstração.

Por fim, mostramos uma conjectura sobre como deve ser uma condição necessária e suficiente para a existência de (g,f)-fatores restritos em grafos quaisquer.

5.1 Teorema do $[a,b]$-Fator Restrito Para Grafos Bipartidos

Enunciamos agora um resultado semelhante ao Teorema 4.1.1. Porém, com algumas melhorias em relação a simplicidade da condição de existência e da generalidade dos grafos em questão, como foi citado no início deste capítulo. Outro ponto interessante é que a demonstração que demos para este teorema é muito simples e, assim como os outros teoremas que são apresentados neste capítulo, faz uso do Teorema do (g,f)-Fator Restrito

Para Grafos Bipartidos (ver página 46).

Teorema 5.1.1 (Teorema do $[a,b]$-fator restrito para grafos bipartidos)**.** *Sejam a e b inteiros não-negativos com $a < b$ e G um grafo bipartido com partição (X,Y). Então, G possui um subgrafo gerador H tal que*

$$
\begin{aligned}
d_H(x) &\leq a \quad \forall x \in X, \ e \\
d_H(y) &= b \quad \forall y \in Y
\end{aligned}
$$

se e somente se

$$\phi(S) = e_G(S, N(S)_a^-) \geq b|S| - a|N(S)_a^+|, \qquad \text{para todo } S \subseteq Y$$

onde $N(S)_a^+$ e $N(S)_a^-$ representam, respectivamente, o conjunto dos vizinhos de S que possuem no mínimo a vizinhos em S e os que possuem menos que a vizinhos em S.

Demonstração. Estamos considerando $b > 0$, pois o resultado é trivial para $b = 0$. Pelo TFR_B, existe um (g,f)-fator restrito com $f(x) = a$, para todo $x \in X$ e $g(x) = b$, para todo $y \in Y$ se e somente se, para qualquer $S \subseteq Y$,

$$H(N(S),S) - P(S) \geq 0$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
H(N(S),S) - P(S) &= \sum_{x \in N(S)} H(x,S) - \sum_{y \in S} b \\
&= \sum_{x \in N(S)} \min\{ \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y), \ a\} - b|S|
\end{aligned}
$$

Dividindo $N(S)$ nos conjuntos disjuntos $N(S)_a^+$ e $N(S)_a^-$, temos que

$$H(N(S),S) - P(S) = \sum_{x \in N(S)_a^+} \min\{ \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y), \ a\} + \sum_{x \in N(S)_a^-} \min\{ \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y), \ a\} - b|S|$$

Pela definição de $N(S)_a^+$, $|N(x) \cap S| \geq a$, para todo $x \in N(S)_a^+$. Com isso, obtemos

$$H(N(S),S) - P(S) = a|N(S)_a^+| + \sum_{x \in N(S)_a^-} \min\{ \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y),\ a\} - b|S| \geq 0$$

Agora observe a definição de $N(S)_a^-$. Temos que $|N(x) \cap S| < a$, para todo $x \in N(S)_a^-$. Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} H(N(S),S) - P(S) &= a|N(S)_a^+| + \sum_{x \in N(S)_a^-} |N(x) \cap S| - b|S| \\ &= a|N(S)_a^+| + e_G(S, N(S)_a^-) - b|S| \end{aligned}$$

Assim, a demonstração do teorema está concluída. □

Vamos mostrar agora que a condição dada no teorema acima ($\phi(S) \geq 0$, para todo $S \subseteq Y$) é equivalente à condição do Teorema 4.1.1 ($\phi^*(T,S) \geq 0$, para todos $S \subseteq Y$ *e* $T \subseteq X$). Vamos primeiro relembrar o que representam os termos $\phi(S)$ e $\phi^*(T,S)$:

$$\begin{aligned} &\phi(S) = a|N(S)_a^+| + e_G(S, N(S)_a^-) - b|S| \geq 0 && \text{para todo } S \subseteq Y. \\ &\phi^*(T,S) = a|T| + e_G(S, N(S) - T) - b|S| \geq 0 && \text{para todos } S \subseteq Y \ e \ T \subseteq X. \end{aligned}$$

Claramente, dado um $S \subseteq Y$ qualquer, $\phi^*(T,S) \geq 0$ implica $\phi(S) \geq 0$. Para ver isso, basta fazer $T = N(S)_a^+$.

Veremos agora a outra implicação. Sejam $S \subseteq Y$ e $T \subseteq X$ subconjuntos quaisquer. Defina T_a^+ e T_a^-, respectivamente, como o conjunto dos vértices de T que possuem no mínimo a vizinhos em S e os que possuem menos que a vizinhos em S. Defina $(N(S) - T)_a^+$ e $(N(S) - T)_a^-$ da mesma forma.

Suponha agora que $\phi(S) \geq 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
0 &\le a|N(S)_a^+| + e_G(S, N(S)^-) - b|S| \\
&= a|N(S)_a^+| + \sum_{x \in N(S)_a^-} |N(x) \cap S| - b|S| \\
&\le a|T_a^+| + a|(N(S)-T)_a^+| + \sum_{x \in T^-} |N(x) \cap S| + \sum_{x \in (N(S)-T)_a^-} |N(x) \cap S| - b|S| \\
&\le a|T_a^+| + a|T_a^-| + a|(N(S)-T)_a^+| + \sum_{x \in (N(S)-T)_a^-} |N(x) \cap S| - b|S| \\
&\le a|T_a^+| + a|T_a^-| + \sum_{x \in (N(S)-T)_a^+} |N(x) \cap S| + \sum_{x \in (N(S)-T)_a^-} |N(x) \cap S| - b|S| \\
&= a|T| + \sum_{x \in (N(S)-T)} |N(x) \cap S| - b|S| \\
&= a|T| + e_G(S, N(S)-T) - b|S| \\
&= \phi^*(T, S)
\end{aligned}
$$

Portanto, as duas condições são realmente equivalentes.

Comparando nosso resultado com o obtido no Teorema 4.1.1, podemos observar algumas melhorias. O Teorema 4.1.1 requer uma análise de todo subconjunto de Y e para cada um desses subconjuntos, é necessário analisar todos os subconjuntos possíveis de X. As condições que fornecemos, mesmo sendo equivalentes às fornecidas no Teorema 4.1.1, implicam na análise somente dos subconjuntos de Y. Outro ponto importante é que foi observado que a restrição imposta pelo Teorema 4.1.1 nos valores de a e b ($a, b \ge 2$) é desnecessária.

5.2 Condições Suficientes Para Obtenção de (g, f)-Fatores Restritos

Muitas vezes é desejável simplesmente que a partir da validade de uma certa condição, possamos garantir a existência de (g, f)-fatores restritos. Resultados desse tipo se tornam mais interessantes quando tais condições são simples. Mostramos abaixo alguns resultados que obtemos.

O seguinte teorema considera fatores em que existem limites superiores para os possíveis valores que a função g em questão pode assumir, onde o grafo considerado é bipartido.

Teorema 5.2.1. *Seja G um grafo bipartido com partições X e Y, sem vértices isolados e funções $f : X \to \mathbb{Z}_*^+$ e $g : Y \to \mathbb{Z}_*^+$. Então G possui um (g, f)-fator restrito para (X, Y) se*

$$g(y) \leq \frac{d_G(y)}{\max_{x \in X} d_G(x)}, \qquad \textit{para todo } y \in Y$$

Demonstração. Dado um subconjunto qualquer $S \subseteq Y$, defina $N(S)^{f+}$ e $N(S)^{f-}$, respectivamente, como o conjunto dos vizinhos x de S que possuem no mínimo $f(x)$ vizinhos em S e os que possuem menos que $f(x)$ vizinhos em S e não menos que um. Sabemos que para todo $S \subseteq Y$:

$$\begin{aligned} H(N(S),S) - P(S) &= \sum_{x \in N(S)} \min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} - \sum_{y \in S} g(y) \\ &= \sum_{x \in N(S)^{f+}} \min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} + \sum_{x \in N(S)^{f-}} \min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} - \sum_{y \in S} g(y) \\ &= \sum_{x \in N(S)^{f+}} f(x) + \sum_{x \in N(S)^{f-}} |N(x) \cap S| + \sum_{y \in S} -g(y) \end{aligned} \tag{5.1}$$

A primeira igualdade segue das definições de *ajuda* e *precisão* que podem ser vistas na página 45. Dividindo $N(S)$ nos conjuntos disjuntos $N(S)^{f+}$ e $N(S)^{f-}$, obtemos a segunda igualdade. Por fim, basta verificar que as seguintes igualdades são verdadeiras:

$$\begin{aligned} &\min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} = f(x), && \text{para todo } x \in N(S)^{f+} \\ &\min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} = \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y) = |N(x) \cap S|, && \text{para todo } x \in N(S)^{f-} \end{aligned}$$

É simples de ver que a primeira das igualdades acima é válida. Para a segunda, basta observar que, como $g(y) \geq 1$ para todo $y \in Y$, então $i(y) = 1$, e portanto $\sum_{y \in N(x) \cap S} i(y) = |N(x) \cap S|$.

Agora, multiplicaremos todos os termos de cada um dos somatórios de (5.1) por $\frac{d_G(z)}{d_G(z)}$, onde z é o vértice em questão. Com isso, temos que

$$H(N(S),S) - P(S) = \sum_{x \in N(S)^{f+}} d_G(x) \left(\frac{f(x)}{d_G(x)} \right) + \sum_{x \in N(S)^{f-}} d_G(x) \left(\frac{|N(x) \cap S|}{d_G(x)} \right) + \sum_{y \in S} d_G(y) \left(\frac{-g(y)}{d_G(y)} \right)$$

Observe que, para todo $x \in N(S)^{f+}$, temos $f(x) \geq 1$ e para todo $x \in N(S)^{f-}$, temos

$|N(x) \cap S| \geq 1$, portanto:

$$\begin{aligned}
H(N(S),S) - P(S) &\geq \sum_{x \in N(S)^{f+}} d_G(x)\left(\frac{1}{d_G(x)}\right) + \sum_{x \in N(S)^{f-}} d_G(x)\left(\frac{1}{d_G(x)}\right) + \sum_{y \in S} d_G(y)\left(\frac{-g(y)}{d_G(y)}\right) \\
&= \sum_{x \in N(S)} d_G(x)\left(\frac{1}{d_G(x)}\right) + \sum_{y \in S} d_G(y)\left(\frac{-g(y)}{d_G(y)}\right) \\
&\geq \sum_{x \in N(S)} d_{G[x \cup S]}(x)\left(\frac{1}{d_G(x)}\right) + \sum_{y \in S} d_G(y)\left(\frac{-g(y)}{d_G(y)}\right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Observe a desigualdade (5.2) de um modo diferente. Imagine que as arestas incidentes a S no grafo G possuam pesos. Defina o peso de um aresta (x,y) com $x \in N(S)$ e $y \in S$ como sendo $\left(\frac{1}{d_G(x)} - \frac{g(y)}{d_G(y)}\right)$. Temos que a desigualdade (5.2) encontrada acima é maior ou igual que a *soma dos pesos das arestas que estão entre* S *e* $N(S)$, portanto:

$$H(N(S),S) - P(S) \geq \sum_{(x,y) \in E(G[N(S) \cup S])} \left(\frac{1}{d_G(x)} - \frac{g(y)}{d_G(y)}\right) \tag{5.3}$$

Sabemos pelo enunciado do teorema que:

$$g(y) \leq \frac{d_G(y)}{\max_{x \in X} d_G(x)} \qquad \forall y \in Y$$

Dessa forma, para qualquer $x \in X$:

$$\frac{g(y)}{d_G(y)} \leq \frac{1}{d_G(x)} \qquad \forall y \in Y$$

e assim, por (5.3):

$$H(N(S),S) - P(S) \geq 0$$

Portanto, pelo TFR_B (Teorema 4.2.1), existe um (g,f)-fator restrito para (X,Y) em G. $\square$

Existe um teorema com características semelhantes às do teorema demonstrado acima para (g,f)-fatores em grafos gerais, obtido por Egawa e Kano [KE96]. Porém, tal teorema não pode ser aplicado a (g,f)-fatores restritos por razão de uma condição imposta sobre as funções f e g. Enunciaremos agora esse teorema e mostraremos que ele realmente não se aplica a (g, f)-fatores restritos.

Teorema 5.2.2 ([KE96]). *Seja G um grafo conexo, funções $f, g : V(G) \to \mathbb{Z}$ tais que $g(v) \leq d_G(v)$, $f(v) \geq 0$ e $g(v) < f(v)$ para todo $v \in V(G)$. Então, G possui um (g, f)-fator se para quaisquer vértices x e y de G,*

$$\frac{g(x)}{d_G(x)} \leq \frac{f(y)}{d_G(y)}$$

Lembre que se H é um (g, f)-fator restrito para (X, Y) em um grafo G, então H é um (g', f')-fator para G, onde as funções $f', g' : V(G) \to \mathbb{Z}^+$ são definidas da seguinte forma:

$$g'(i) = \begin{cases} 0 & \text{, se } i \in X \\ g(i) & \text{, se } i \in Y \end{cases}$$

$$f'(i) = \begin{cases} f(i) & \text{, se } i \in X \\ g(i) & \text{, se } i \in Y \end{cases}$$

Observe que os valores de $g'(y)$ e $f'(y)$ são iguais, para todo vértice y de Y. Veja também que o Teorema 5.2.2 só á válido quando $g'(y)$ é estritamente menor que $f'(y)$ para todo $y \in Y$. Podemos então concluir que, de fato, tal teorema não é válido quando queremos garantir a existência de (g, f)-fatores restritos.

A condição fornecida pelo Teorema 5.2.1 para garantir a existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos impõe restrições na função g, de modo que os valores que ela pode fornecer a um certo vértice $y \in Y$, dependem do grau dos vértices de X e também do grau do próprio y. Nós obtemos um outro resultado que nos dá condições suficientes para a existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos, onde os valores que a função f pode fornecer a um certo $x \in X$ depende somente do grau de x e de um certo inteiro k, e os valores que g pode fornecer a um certo $y \in Y$ depende somente do grau de y e de um certo inteiro l.

Teorema 5.2.3. *Seja G um grafo bipartido com partições X e Y, funções $f : X \to \mathbb{Z}^+$ e $g : Y \to \mathbb{Z}^+_*$, e inteiros positivos k e l tais que $l \geq k$. Então, G possui um (g, f)-fator restrito para (X, Y) se*

$$f(x) \geq \frac{d_G(x)}{k} \qquad \forall x \in X$$

$$g(y) \leq \frac{d_G(y)}{l} \qquad \forall y \in Y$$

Demonstração. O começo da demonstração é semelhante a do Teorema 5.2.1. Dado um subconjunto qualquer $S \subseteq Y$, temos:

$$\begin{aligned}
H(N(S),S) - P(S) &= \sum_{x \in N(S)} \min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} - \sum_{y \in S} g(y) \\
&= \sum_{x \in N(S)^{f+}} \min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} + \sum_{x \in N(S)^{f-}} \min\{f(x), \sum_{y \in N(x) \cap S} i(y)\} - \sum_{y \in S} g(y) \\
&= \sum_{x \in N(S)^{f+}} f(x) + \sum_{x \in N(S)^{f-}} |N(x) \cap S| - \sum_{y \in S} g(y)
\end{aligned}$$

Utilizando as condições fornecidas no enunciado do teorema, temos:

$$\begin{aligned}
H(N(S),S) - P(S) &\geq \frac{1}{k} \sum_{x \in N(S)^{f+}} d_G(x) + \sum_{x \in N(S)^{f-}} |N(x) \cap S| - \frac{1}{l} \sum_{y \in S} d_G(y) \\
&\geq \frac{1}{k} \sum_{x \in N(S)^{f+}} |N(x) \cap S| + \frac{1}{k} \sum_{x \in N(S)^{f-}} |N(x) \cap S| - \frac{1}{l} \sum_{y \in S} d_G(y) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{x \in N(S)} |N(x) \cap S| - \frac{1}{l} \sum_{y \in S} d_G(y) \\
&= \frac{e_G(S,N(S))}{k} - \frac{e_G(S,N(S))}{l} \\
&= \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{l}\right) e_G(S,N(S))
\end{aligned}$$

Mas como $l \geq k$ e $e_G(S,N(S)) \geq 0$, temos:

$$H(N(S),S) - P(S) \geq 0$$

Portanto, pelo TFR_B (Teorema 4.2.1), existe um (g,f)-fator restrito para (X,Y) em G.

□

Observe que as condições fornecidas pelos Teoremas 5.2.1 e 5.2.3 são bem mais simples que as condições dadas no Teorema 4.2.1 (TFR_B).

5.3 Teorema Geral do (g,f)-Fator Restrito

No Teorema 4.2.1 (TFR_B) fornecemos uma caracterização para a existência de (g,f)-fatores restritos quando existe a restrição do grafo ser bipartido. Mas e se o grafo em questão não for bipartido? Tanto f-fatores quanto (g,f)-fatores possuem caracterizações para sua existência em grafos quaisquer. Seria interessante obter condições para a existência de (g,f)-fatores restritos em grafos quaisquer, e melhor ainda seria obter condições simples, uma vez que para existência de f-fatores e (g,f)-fatores é necessário analisar desigualdades que envolvem termos complicados e requerem a análise de todos os pares possíveis de subconjunto de vértices (ver Teoremas 3.2.1 e 3.4.1).

Antes de enunciar o que pensamos ser um teorema que caracteriza a existência de (g,f)-fatores restritos em um grafo qualquer $G=(V,E)$, deixe-nos estender a definição de ajuda para os vértices de Y e fazer mais algumas poucas definições.

$$H(y,U) = \min\left\{\sum_{z\in U\cap N(y)} i(z),\ P(y)\right\}, \qquad y\in Y$$

$$H(J,U) = \sum_{y\in J} H(y,U) \qquad J\subseteq Y \text{ e } U\subseteq Y$$

Dados $S\subseteq V$ e $g: S\to\mathbb{Z}^+$, defina $e_{max}(S)$ como $|E'|$, onde $E'\subseteq E$ é o conjunto de arestas contidas em $G[S]$ tal que cada $v\in S$ incide, no máximo, sobre $g(v)$ arestas de E' e, mais ainda, não existe conjunto maior que E' com essas características. Uma última definição:

$$T(N(U),U) = H(N(U)\cap X,U) + H(N(U)\cap(Y\setminus U),U) + 2e_{max}(U),\ U\subseteq Y \qquad (5.4)$$

Imagine que os vértices de Y necessitam que seus vizinhos *forneçam* arestas para eles. Um vértice $y\in Y$ precisa que seus vizinhos *forneçam* $g(y)$ arestas a ele, para, desta forma, ser possível existir um (g,f)-fator restrito. Com esse raciocínio em mente, fica fácil entender o que significa a definição fornecida para $T(N(U),U)$. É simplesmente a quantidade de arestas que os vértices de U podem *receber* como ajuda, para formar o (g,f)-fator restrito, de seus vizinhos. Existem três termos em (5.4), o primeiro deles representa a ajuda que os vizinhos de U em X podem fornecer a U, o segundo representa a ajuda que os vizinhos de U que estão em $Y\setminus U$ podem fornecer e o terceiro representa a *ajuda* que o próprio U pode fornecer a si mesmo, uma vez que cada aresta contida em U selecionada para fazer parte de um (g,f)-fator restrito, ajuda dois vértices de U.

A Figura 5.1 mostra um exemplo que ajuda no entendimento da definição de $T(N(U),U)$, onde os números próximos aos vértices da partição X indicam o valor da função f aplicada a esses vértices e os próximos aos vértices da partição Y indicam o valor da função

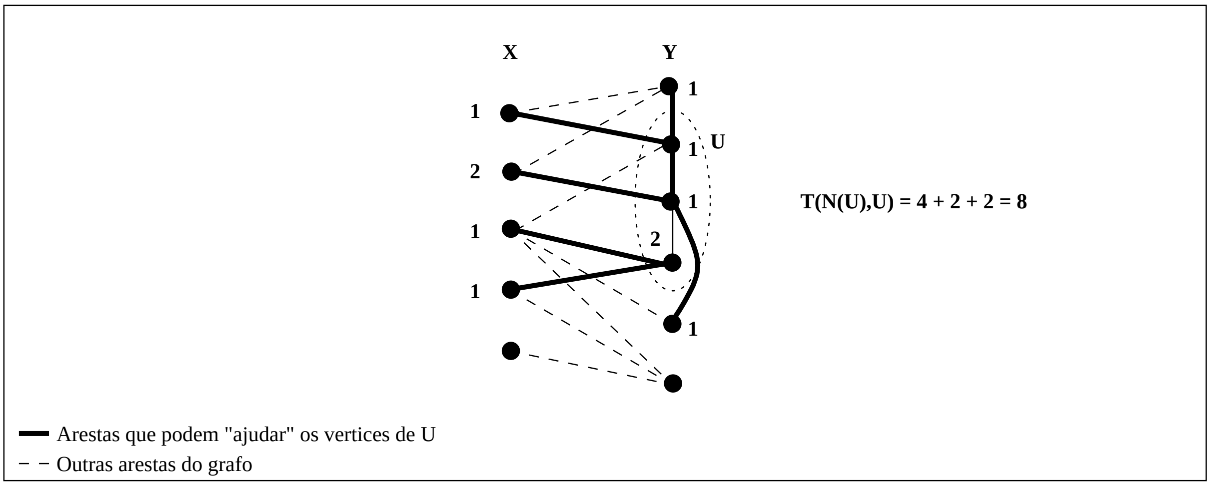

Figura 5.1: Definição de $T(N(U),U)$

g aplicada a esses vértices.

A conjectura abaixo nos dá, o que podem vir a se confirmar, condições necessárias e suficientes para a existência de (g,f)-fatores restritos em um grafo qualquer.

Conjectura 1 (Conjectura do (g,f)-fator restrito)**.** *Dados $G=(V,E)$ um grafo e funções $f,g:V(G)\rightarrow\mathbb{Z}^{+}$. Então, G possui um (g,f)-fator restrito para (X,Y) se, e somente se, para todo $U\subseteq Y$,*

$$T(N(U),U)\geq P(U) \tag{5.5}$$

Conclusão

Neste trabalho fizemos um estudo sobre os diversos tipos de fatores existentes na literatura (f-fatores, (g, f)-fatores, fatores regulares etc.), apresentando e discutindo suas definições e enunciando diversos resultados sobre eles. Para cada tipo de fator, mostramos teoremas que fornecem condições que garantem sua existência. Muitas dessas condições são complicadas, de modo que, buscar condições mais simples para garantir essa existência é um trabalho interessante.

Propomos um novo tipo de fator chamado de (g, f)-*fator restrito*, que podemos enquadrar entre os f-fatores e os (g, f)-fatores, sendo uma generalização do primeiro e um caso particular do segundo. Um dos principais resultados obtidos nesse trabalho é a obtenção de condições necessárias e suficientes para a existência desse fator em grafos bipartidos. As condições de existência encontradas têm uma característica interessante, que é a necessidade de se analisar todo subconjunto de somente uma das partições do grafo bipartido. Na caracterização da existência de f-fatores e (g, f)-fatores, é necessária a análise de todos os pares possíveis de subconjuntos de vértices, sendo um desses subconjuntos composto por vértices de uma partição e o outro, composto por vértices da outra partição do grafo bipartido. Embora o Teorema 4.2.1 possa ser obtido indiretamente através do Teorema 3.4.3, demos uma demonstração direta que faz uso de técnicas diferentes das normalmente utilizadas, além de nossa demonstração fornecer uma boa intuição sobre o resultado.

Encontramos alguns outros resultados sobre (g, f)-fatores restritos. As demonstrações desses novos resultados são bem simples, e utilizam o teorema que propomos para garantir a existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos. Além disso, conjecturamos que é possível extender a caracterização da existência de (g, f)-fatores restritos em grafos bipartidos para grafos quaisquer.

Esperamos que os resultados aqui encontrados sirvam de base para trabalhos futuros sobre (g, f)-fatores restritos. Acreditamos também que as técnicas utilizadas na demonstração do Teorema do (g, f)-Fator Restrito Para Grafos Bipartidos (Teorema 4.2.1) podem ser utilizadas para a obtenção de condições para a existência de f-fatores e (g, f)-

fatores mais simples que as condições fornecidas pelos teoremas existentes.

Referências Bibliográficas

[ADH98] Armen S. Asratian, Tristan M. J. Denley, and Roland Haggkvist. *Bipartite graphs and their applications.* Cambridge University Press, 1998.

[AK07] Jin Akiyama and Mikio Kano. Factors and factorizations of graphs. *on the web*, 2007.

[Bel50] H. B. Belck. Reguläre faktoren von graphen. *J. Reine Angew. Math.*, 188:228–252, 1950.

[BL93] Clark Benson and Franklin Lowenthal. The marriage lemma for polygamists. *JSTOR Mathematics Magazine*, pages 238–242, 1993.

[EOK88] H. Enomoto, K. Ota, and M. Kano. A sufficient condition for a bipartite graph to have a k-factor. *J. Graph Theory*, 12:141–151, 1988.

[FF70] Folkman and Fulkerson. Flows in infinite graghs. *J. Combin. Theory*, 8:30–44, 1970.

[Fro12] G. Frobenius. Über matrizen aus nicht negativen elementen. *S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin)*, pages 456–477, 1912.

[Hal35] Philip Hall. On representatives of subsets. *Journal of London Mathematical Society*, pages 26–30, 1935.

[HV50] P. R. Halmos and H. E. Vaughan. The marriage problem. *Amer. J. Math.*, 72:214–215, 1950.

[JV91] A. Joentgen and L. Volkman. Factors of locally almost regular graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 23:121–122, 1991.

[Kat87] P. Katerinis. Two sufficient conditions for a 2-factor in a bipartite graph. *J. Graph Theory*, 11:1–6, 1987.

[KE96] Mikio Kano and Y. Egawa. Sufficient conditions for graphs to have (g, f)-factors. *Graph theory and combinatorics (Manila, 1991). Discrete Math.*, 151:87–90, 1996.

[KS83] M. Kano and A. Saito. [a,b]-factors of graphs. *Discrete Math*, 47:113–116, 1983.

[KT96] P. Katerinis and N. Tsikopoulos. Perfect matching in regular bipartite graphs. *Graphs Combin.*, 12:327–331, 1996.

[LL98] G. Li and Z. Liu. On connected factor in $k_{1,3}$-free graphs. *Acta Math. Appl. Sinica*, 14:43–47, 1998.

[Lov70] László Lovász. Subgraphs with prescribed valencies. *J. Combin. Theory*, 8:391–416, 1970.

[Lov72] László Lovász. The factorization of graphs ii. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 23:223–246, 1972.

[LP86] L. Lovász and Michael D. Plummer. *Matching Theory (North-Holland mathematics studies)*. Elsevier Science Ltd, 1986.

[LWY01] X. Li, B. Wei, and F. Yang. A degree condition of 2-factors in bipartite graphs. *Discrete Applied Math.*, 113:311–318, 2001.

[LZ04] G. Liu and W. Zang. f-factors in bipartite (mf)-graphs. *Discrete Applied Math.*, 136:45–54, 2004.

[Pet91] J. Petersen. Die theorie der regulären graphen. *Acta Math.*, 15:193–220, 1891.

[Pip90] N. Pippenger. Communication networks. In J.van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science: Volume A: Algorithms and Complexity*, pages 805–833. Elsevier, Amsterdam, 1990.

[Plu07] Michael D. Plummer. Graph factors and factorization: 1985-2003: A survey. *Discrete Mathematics*, 307(7-8):791–821, 2007.

[Tut47] W. T. Tutte. The factorization of linear graphs. *Journal of London Mathematical Society*, pages 107–11, 1947.

[Tut52] W. T. Tutte. The factors of graphs. *Can. J. Math.*, 4:314–328, 1952.

[Tut78] W. T. Tutte. The subgraph problem. *Advances in Graph Theory (Cambridge Comb. Conf., Trinity College, Cambridge, 1977), Ann. Discr. Math.*, 3:289–295, 1978.

[Ver78] Las Vergnas. An extension of tutte's 1-factor theorem. *Discrete Math.*, 23:241–255, 1978.

[Wan99] H. Wang. On 2-factors of a bipartite graphs. *J. Graph Theory*, 31:101–106, 1999.