

Júlio César Silva Araújo

Coloração Gulosa e Coloração Ponderada

Fortaleza

2008

Júlio César Silva Araújo

Coloração Gulosa e Coloração Ponderada

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para obtenção do título de mestre em Ciência da Computação pela Universidade Federal do Ceará.

Orientador:

Cláudia Linhares Sales

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PARGO - PARALELISMO, GRAFOS E OTIMIZAÇÃO

Fortaleza

2008

Dissertação de Mestrado sob o título *Coloração Gulosa e Coloração Ponderada*, defendida por Júlio César Silva Araújo e aprovada em 15 de maio de 2009, em Fortaleza, Ceará, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

Profa. Dra. Cláudia Linhares Sales
Orientador

Prof. Dr. Ricardo Cordeiro Corrêa
Universidade Federal do Ceará

Prof. Dra. Celia Picinin de Mello
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dra. Maria Aurora Morgana
Università di Roma "La Sapienza"

Resumo

Neste trabalho, estudamos os problemas de Coloração Gulosa e de Coloração Ponderada apresentando tanto resultados válidos para quaisquer grafos, como também para classes de grafos específicas. Exibimos uma revisão da bibliografia conhecida sobre esses problemas, destacando os resultados sobre a complexidade dos mesmos. Para o problema de Coloração Gulosa, mostramos um algoritmo de tempo polinomial que calcula o número guloso em uma nova classe de grafos que definimos: grafos P_4 -carregados estendidos gordos. Este resultado implica que o número guloso pode ser calculado em tempo polinomial para as seguintes classes de grafos: P_4 -reduzíveis, P_4 -reduzíveis estendidos, P_4 -esparços, P_4 -esparços estendidos, P_4 -extensíveis, P_4 -leves, P_4 -carregados, P_4 -carregados estendidos e P_4 -arrumados. Para o problema de Coloração Ponderada, demonstramos uma versão do Teorema de Hajós [27] e apresentamos uma formulação de programação inteira, baseada na Formulação Assimétrica de Representantes [5], que acreditamos ser a primeira proposta para esse problema. Também apresentamos um algoritmo polinomial para determinar o número cromático ponderado para uma subclasse dos grafos P_4 -esparços estendidos.

PALAVRAS-CHAVE: Coloração Gulosa, Coloração Ponderada, Grafos com poucos P_4 's, Decomposição Modular.

Abstract

In this work, we study the Greedy Coloring Problem and the Weighted Coloring Problem presenting valid results for any graph and also for some specific graph classes. We show a bibliographical review of these problems, highlighting the complexity results about them. For the Greedy Coloring Problem, we show a polynomial time algorithm that calculates the Grundy number in a new class of graphs that we define: the fat extend P_4 -laden graphs. This result implies that the Grundy number can be calculated in polynomial time for the following classes of graphs: P_4 -reducible, extended P_4 -reducible, P_4 -sparse, extended P_4 -sparse, P_4 -extendible, P_4 -lite, P_4 -laden, extended P_4 -laden and P_4 -tidy. For the Weighted Coloring Problem, we show a version of the Hajós' Theorem [27] and we present an integer programming formulation, based on the Asymmetries Representatives Formulation [5], that we believe to be the first proposed to this problem. We also give a polynomial time algorithm to determine the weighted chromatic number for a subclass of extended P_4 -sparse graphs.

KEYWORDS: Greedy Coloring, Weighted Coloring, Graphs with few P_4 's, Modular Decomposition.

Agradecimentos

É necessário registrar os meus sinceros agradecimentos à minha orientadora, professora Cláudia Linhares Sales. Ela foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho devido ao grande apoio que sempre me concedeu durante minha graduação e meu mestrado. Graças a ela eu também obtive, além muitos conhecimentos teóricos, muitas lições de vida que me serão úteis para enfrentar os desafios vindouros.

Agradeço a toda minha família que sempre me incentivou bastante. Especialmente, agradeço aos meus pais, que sempre se esforçaram para me oferecer a melhor educação possível. Todo o sucesso que eu obtive e que eu obtiver é também mérito deles.

Agradecimento muito especial também reservo à minha namorada, Ana Karolinnna Maia de Oliveira. Ela demonstrou seu amor por mim ao suportar os diversos momentos em que eu não lhe dei a atenção devida, por causa do tempo que dediquei ao mestrado. Além de sempre me apoiar nos momentos difíceis, ela ainda me ajudou bastante ao comentar e revisar esse texto.

Muitos amigos me ajudaram nesta caminhada. Aqueles que não posso deixar de citar são Guilherme Oliveira Mota e Leonardo Sampaio Rocha, que, além de terem compartilhado comigo diversos momentos bons e ruins neste período, me ajudaram bastante com discussões teóricas sobre o assunto do presente texto. Também agradeço aos amigos Ignasi Sau, pela sua contribuição nos resultados de Coloração Ponderada, e Vagner Pedrotti, por diversos comentários esclarecedores sobre as classes de grafos citadas no Capítulo 7.

Diversas outras pessoas foram importantes para a concretização deste sonho. Não posso citar todas, mas elas ficarão guardadas em minha memória.

Agradeço ainda ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelo financiamento da bolsa de estudos para a realização do presente trabalho.

Sumário

1	Introdução	p. 8
2	Terminologia	p. 11
2.1	Conceitos Básicos	p. 11
2.2	Classes de Grafos	p. 13
2.3	Decomposição Modular	p. 14
3	Coloração Gulosa	p. 16
3.1	Definição	p. 16
3.2	Complexidade	p. 17
3.3	Limites	p. 18
4	Coloração Ponderada	p. 22
4.1	Definição	p. 22
4.2	Complexidade	p. 23
4.3	Limites	p. 28
5	Resultados Gerais em Coloração Gulosa	p. 31
5.1	Número guloso de nós série e paralelo	p. 31
5.2	Número guloso em alguns nós de vizinhança	p. 32
5.2.1	P_5 , \bar{P}_5 e C_5	p. 32
5.2.2	Split	p. 43
5.2.3	Quase-aranhas	p. 44

6	Resultados Gerais em Coloração Ponderada	p. 47
6.1	Teorema de Hajós	p. 47
6.2	Formulação de Programação Inteira	p. 51
6.2.1	Formulação dos Representantes	p. 51
6.2.2	Formulação para Coloração Ponderada	p. 53
6.3	Decomposições Modulares	p. 54
6.3.1	Coloração Ponderada em nós série e paralelo	p. 54
6.3.2	Coloração Ponderada em aranhas	p. 57
7	Coloração Gulosa em P_4-carregados estendidos gordos	p. 66
7.1	Grafos P_4 -carregados estendidos	p. 66
7.2	Grafos P_4 -carregados estendidos gordos	p. 67
8	Coloração Ponderada em P_4-esparsos	p. 69
8.1	Algoritmo polinomial para subclasse de P_4 -esparsos estendidos	p. 69
8.2	Algoritmo 2-aproximativo para P_4 -esparsos	p. 70
9	Conclusões	p. 72
	Lista de Figuras	p. 73
	Lista de Tabelas	p. 74
	Índice Remissivo	p. 75
	Referências Bibliográficas	p. 77

1 Introdução

O problema de coloração de grafos [9] é certamente um dos mais estudados na área de Teoria de Grafos devido às suas várias aplicações, como, por exemplo, nos problemas de atribuição de frequências a antenas de rádio ou telefonia, de alocação de produtos químicos em armazéns e de alocação de registros em compiladores.

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma coloração é uma função $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ que associa a cada vértice do grafo um número inteiro representativo de uma cor. Dizemos que uma coloração é própria se, para cada par de vértices adjacentes u e v , i.e., $(u, v) \in E(G)$, temos $c(u) \neq c(v)$. Se uma coloração (própria) de um grafo G possui k cores, também podemos denotá-la por uma k -coloração de G .

Uma k -coloração própria de um grafo G pode também ser vista como uma partição $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ do conjunto de vértices de G em k conjuntos disjuntos onde cada conjunto S_i contém os vértices coloridos com a cor i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

No problema clássico de coloração de grafos, busca-se determinar a menor quantidade de cores para a qual o grafo admite uma coloração própria. Essa quantidade é chamada *número cromático*, ou $\chi(G)$.

Determinar o número cromático de um grafo qualquer é um problema *NP-Difícil* [36], mas em várias classes de grafos a determinação desse parâmetro pode ser feita em tempo polinomial.

Existem diversas variações deste problema. Nesta dissertação, tratamos de duas dessas variações: a Coloração Gulosa e a Coloração Ponderada.

O algoritmo guloso de coloração é um algoritmo executado sobre um grafo $G = (V, E)$ e uma ordem de $V(G)$, atribuindo uma cor i a um vértice v , se i é a menor cor tal que não existe nenhum vizinho de v previamente colorido com a cor i .

Não é difícil ver que a ordem dos vértices afeta profundamente a qualidade da sua resposta com respeito ao número cromático do grafo.

O número cromático guloso de um grafo $G = (V, E)$ é, portanto, o maior inteiro k tal que existe uma ordem de $V(G)$ que, quando passada como parâmetro para o algoritmo guloso, leva o algoritmo guloso a retornar uma coloração com k cores.

Como determinar o número cromático de um grafo é um problema *NP*-difícil, o algoritmo guloso é bastante utilizado na prática para gerar colorações próprias.

Para introduzirmos a variação que denominamos Coloração Ponderada e foi definida por Guan e Zhu [23], precisamos definir alguns conceitos.

Dado um grafo ponderado nos vértices $G = (V, E, w)$, $w : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, e uma k -coloração $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ própria de G , dizemos que o peso de uma classe de cor S_i , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, é igual ao maior valor de peso de um vértice nesta classe de cor, ou seja:

$$w(S_i) = \max_{v \in S_i} w(v)$$

O peso de uma coloração é definido como a soma dos pesos de suas classes de cores, ou seja, dada uma coloração $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ de G , temos:

$$w(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^k w(S_i)$$

No problema de Coloração Ponderada, busca-se determinar, dentre todas as possíveis colorações próprias de G , uma coloração cujo peso seja mínimo. A esse menor peso de uma coloração própria de um grafo ponderado nos vértices, damos o nome de *número cromático ponderado*, ou $\chi_p(G)$. Mais formalmente, temos:

$$\chi_p(G) = \min_{\mathcal{S} \text{ col. própria de } G} w(\mathcal{S})$$

Veja que $\chi_p(G) = \chi(G)$, se G é um grafo com pesos unitários. Isso implica que o problema de Coloração Ponderada generaliza o problema de Coloração de Grafos tradicional e, conseqüentemente, também é *NP*-Difícil.

Guan e Zhu [23] citam como aplicações práticas de Coloração Ponderada problemas de alocação dinâmica de memória (*Dynamic Storage Allocation*) e problemas com protocolo de controle de acesso de mídia em redes distribuídas de duplo canal (*Distributed Dual Bus Network Media Access Control Protocol*).

Nesta dissertação, mostramos que o Coloração Ponderada admite uma versão do Teorema

de Hajós [27, 1], apresentamos uma formulação de Programação Inteira para este problema que acreditamos ser a primeira na literatura, além de mostrarmos alguns resultados sobre como calcular o número cromático ponderado de um grafo a partir de sua decomposição modular. Em particular, como consequência destes últimos resultados, mostramos como determinar o número cromático ponderado em tempo polinomial para uma subclasse dos grafos P_4 -esparsos estendidos. Mostramos também um algoritmo 2-aproximativo para Coloração Ponderada em P_4 -esparsos.

Provamos também que o problema de Coloração Gulosa pode ser resolvido em tempo polinomial para os grafos P_4 -reduzíveis, P_4 -reduzíveis estendidos, P_4 -esparsos, P_4 -esparsos estendidos, P_4 -extensíveis, P_4 -leves, P_4 -carregados, P_4 -carregados estendidos e P_4 -arrumados apresentando um algoritmo de tempo polinomial que calcula o número guloso de uma nova classe de grafos que definimos. Tal classe é chamada P_4 -carregada estendida gorda e contém propriamente as classes anteriormente citadas.

Este documento está organizado como segue. O Capítulo 2, contém a terminologia necessária para a compreensão deste trabalho. Nos Capítulos 3 e 4, fazemos um resumo do estado da arte dos problemas. No Capítulos 5 e 6, apresentamos resultados gerais obtidos sobre Coloração Gulosa e Coloração Ponderada, como, por exemplo, a generalização do Teorema de Hajós citada previamente. No Capítulo 7 encontra-se uma aplicação dos resultados do Capítulo 5 sobre os grafos P_4 -carregados estendidos gordos. Já no Capítulo 8 utilizamos os resultados do Capítulo 6 sobre a classe P_4 -esparsa estendida, além de apresentarmos o algoritmo aproximativo para grafos P_4 -esparsos. Finalmente, fazemos uma avaliação do trabalho que foi desenvolvido no Capítulo 9.

2 Terminologia

2.1 Conceitos Básicos

Neste capítulo, introduzimos definições e notação que são necessárias para a compreensão do texto. Para mais definições, é indicada a leitura de [3].

Um *grafo* G é definido por um par não ordenado de conjuntos disjuntos (V, E) , tal que E é um subconjunto do conjunto de pares não ordenados de V . Todos os grafos deste trabalho são finitos, i.e., V e E são sempre finitos. O conjunto V ou $V(G)$, é o conjunto de elementos chamados *vértices* e E , ou $E(G)$, é o de *arestas*. Uma aresta $\{u, v\}$ une u e v e é denotada por uv ou (u, v) . Se $(u, v) \in E(G)$, dizemos que u e v são *adjacentes* e são *extremidades* da aresta (u, v) . Dizemos que uma *aresta incide em um vértice* se esse vértice é uma de suas extremidades. Dizemos que duas arestas são *adjacentes* se elas possuem uma extremidade em comum. Se uma aresta possui as duas extremidades iguais, então essa aresta é chamada *laço*. Se duas ou mais arestas possuem as mesmas extremidades u e v , com $u \neq v$, então elas são chamadas de *arestas múltiplas*. Um grafo sem laços e sem arestas múltiplas é chamado de *grafo simples*. A menos que seja dito o contrário, todos os grafos nesta dissertação são simples.

O *grau de um vértice* v , ou $d(v)$, é a quantidade de arestas que incidem nesse vértice. Ao menor (maior) grau de um vértice em um grafo G é dada a simbologia $\delta(G)$ (respectivamente, $\Delta(G)$). A *vizinhança* é o conjunto de vizinhos de um vértice v em um grafo $G = (V, E)$, denotada por $N_G(v) = \{u \mid (u, v) \in E(G)\}$. Quando falamos sobre a vizinhança de um vértice v cujo grafo se entende pelo contexto, podemos apenas denotar a vizinhança por $N(v)$. Mais ainda, a *vizinhança de um conjunto* $S \subseteq V$ em um grafo $G = (V, E)$ é a união das vizinhanças de todos os vértices nesse conjunto, ou seja, $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$.

Um *subgrafo* $H = (V, E)$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$. Dizemos que um subgrafo é *gerador* se $V(H) = V(G)$. Dado um subconjunto V' do conjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$, dizemos que o *subgrafo induzido* (em vértices) por $V' \subseteq V$, também denotado por $G[V']$, é um subgrafo $G' = (V, E)$ de G tal que se $(u, v) \in E(G)$ e

$u, v \in V(G') = V'$ então $(u, v) \in E(G')$. Um grafo G é *completo* se $\forall u, v \in V(G), (u, v) \in E(G)$. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Um grafo G é *vazio* se $E(G) = \emptyset$. Uma *clique* em um grafo G é um subconjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$ tal que $G[V']$ é completo. Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade da maior clique de G . Por outro lado, chamamos *conjunto estável*, ou *conjunto independente*, de um grafo G um subconjunto de vértices $V' \subseteq V(G)$ tal que $G[V']$ é vazio.

Um *caminho* $P = \langle v_1, e_1, \dots, v_{p-1}, e_{p-1}, v_p \rangle$ em um grafo é uma seqüência alternada de vértices e arestas que começa e termina em um vértice, todos os vértices são distintos e, para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$, $e_i = v_i v_{i+1}$. Dizemos que as *extremidades* de P são v_1 e v_p e que seus vértices *internos* são v_2, \dots, v_{p-1} , se eles existirem. O *comprimento* de um caminho é a quantidade de arestas nesse caminho. Um *ciclo* em um grafo é caminho cujas extremidades são iguais. Dizemos que um grafo G contém um P_n (C_n), se existem n vértices de G que induzem um caminho (ciclo) de comprimento $n-1$ (n). Particularmente, se o grafo for composto apenas de um caminho (ciclo) de tamanho n , também chamamos esse grafo de P_n (C_n). Uma *corda* em um ciclo é uma aresta entre qualquer par de vértices não adjacentes do ciclo. Um ciclo sem cordas de tamanho pelo menos 4 é chamado de *buraco*.

Dizemos que dois vértices são *conectados* se existe um caminho entre eles. Um grafo G é dito *conexo* se para todo par de vértices de G existe pelo menos um caminho entre eles. Um subgrafo conexo maximal de G é chamado de *componente (conexa)* de G . Da mesma forma, dizemos que um (sub)grafo é *desconexo* se ele possui mais de uma componente conexa.

O *complemento de um grafo* $G = (V, E)$, denotado por \bar{G} , é um grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ e, para todo par de vértices $u, v \in V$, $u \neq v$, $(u, v) \in E(G)$ se, e somente se, $(u, v) \notin E(\bar{G})$.

Uma *partição* de um conjunto S é uma família de subconjuntos, também chamados *classes*, $\Sigma = \{S_i \mid i \in I\}$, tal que $S_i \subseteq S$, $\bigcup S_i = S$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$, para todos $i, j \in I$. Dizemos que um conjunto possui uma *r-partição* se $|\Sigma| = r$.

Dois grafos $G_1 = (V, E)$ e $G_2 = (V, E)$ são ditos *isomorfos* se existem bijeções $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ e $g : E(G_1) \rightarrow E(G_2)$ tais que $v \in V(G_1)$ é incidente a $e \in E(G_1)$ se, e somente se, $f(v)$ é incidente a $g(e)$. Observemos que se G_1 e G_2 forem simples, um isomorfismo pode ser representado apenas por uma função $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ e temos que $(u, v) \in E(G_1)$ se, e somente se, $(f(u), f(v)) \in E(G_2)$.

2.2 Classes de Grafos

A dissertação de mestrado de Vagner Pedrotti [47] apresenta um estudo detalhado sobre as diversas classes de grafos, que possuem restrições quanto à quantidade de P_4 's induzidos que podem possuir, apresentadas neste texto.

Um grafo G é dito *r-partido*, ou *r-particionado*, se existe uma r -partição do conjunto de vértices de G tal que toda aresta possui extremidades em classes diferentes da partição. Em particular, todo grafo 2-partido é também chamado de bipartido.

Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Um vértice em uma árvore é também chamado de *nó*. Observe que só existe um caminho entre qualquer par de nós em uma árvore, pois, caso contrário, haveria um ciclo na árvore. Definimos como *folhas* de uma árvore T todos os nós $v \in T$ tais que $d(v) \leq 1$. Os nós que não são folhas são chamados nós *internos*.

Podemos destacar um nó r , chamando-o de raiz, de uma árvore e chamá-la de *árvore enraizada* em r . Dada uma árvore $G = (V, E)$, enraizada em um nó r , para todo nó v , $v \in V$, os *descendentes* de v são todos os nós u que possuem v no caminho de u a r . Os *filhos* de v são seus descendentes que possuem distância unitária a v . Se u é filho de v , dizemos que v é *pai* de u . Se, em uma árvore enraizada, todos os nós possuem no máximo dois filhos, essa árvore é chamada de *binária*.

Um grafo $G = (V, E)$ é *split* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos disjuntos S e K tal que S é um conjunto estável e K é uma clique.

Um *grafo linha de um grafo* $G = (V, E)$, denotado por $L(G)$, é tal que, para cada aresta de $E(G)$, existe um vértice correspondente em $V(L(G))$ e se duas arestas são incidentes em G , ou seja, possuem uma extremidade em comum, os seus vértices correspondentes em $L(G)$ são adjacentes.

Um grafo é dito de *comparabilidade* se ele admite uma orientação transitiva de suas arestas.

Um grafo G é dito *planar* se existe uma representação gráfica de G em um plano sem cruzamentos de arestas, sendo cada vértice um ponto nessa representação e existe uma linha unindo dois pontos se os vértices correspondentes são adjacentes.

Um grafo G é dito de *intervalos* se G é um grafo de interseção de um conjunto de intervalos na reta real, ou seja, existe uma família $\mathcal{F} = \{R_1, \dots, R_k\}$ de intervalos da reta real tal que, para cada intervalo R_i , para $i \in \{1, \dots, k\}$, associa-se um vértice r_i e temos uma aresta (r_i, r_j) se $R_i \cap R_j \neq \emptyset$.

Um grafo é dito de *cordal* se não possui buracos como subgrafos induzidos.

Um grafo $G = (V, E)$ é dito *livre de P_n (C_n)* se nenhum subconjunto de V com n vértices induz um caminho (ciclo) de tamanho n .

A classe dos *cografos* (do inglês, *cographs*), também conhecidos como grafos livres de P_4 , é definida recursivamente como segue:

- O grafo trivial é um cografo;
- Se G é um cografo, então \bar{G} também o é;
- Se G_1, \dots, G_n são cografos, então o grafo $G = \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} G_i$ obtido pela união disjunta dos grafos G_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, é um cografo.

2.3 Decomposição Modular

Dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que $M \subseteq V$ é um *módulo* de G se para todo vértice $v \in V \setminus M$, v é adjacente a todo vértice de M ou v não é adjacente a nenhum vértice de M . Observemos que M é um módulo de G se, e somente se, M é um módulo de \bar{G} . Os *módulos triviais* de um grafo são: $V(G)$, o conjunto vazio e os conjuntos com apenas um vértice. Um grafo tal que qualquer módulo é trivial é chamado de *grafo primo*. Observe que se G é primo, então G e \bar{G} são grafos conexos e se $|V| > 2$, então $|V| \geq 4$. Se dois vértices possuem a mesma vizinhança, eles são chamados de *gêmeos*. Veja que quaisquer dois vértices que pertencem um mesmo módulo são gêmeos. Dizemos que um *módulo M é forte*, se para todo módulo $M' \neq M$, $M' \cap M = \emptyset$ ou $M \subseteq M'$ ou $M' \subseteq M$. Sejam M um módulo de G e H um módulo forte de G contido em M . Dizemos que H é um *submódulo maximal forte* de M se todo módulo forte de G que contém H também contém M .

Uma *partição de congruência* de um grafo G é uma partição $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ dos vértices de G tal que cada parte M_i é um módulo forte de G , para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Pela definição de módulo, não é difícil verificar que entre duas partes M_i e M_j , $i \neq j$, de uma partição de congruência de um grafo, ou existem todas as arestas entre os vértices de M_i e M_j , e nesse caso dizemos que M_i e M_j são adjacentes, ou não existe nenhuma.

Dados um grafo G e uma partição de congruência $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ de G , o *grafo quociente* G/\mathcal{M} (também conhecido como *grafo representativo* de \mathcal{M}) é tal que $V(G/\mathcal{M}) = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ e $E(G/\mathcal{M}) = \{\{m_i, m_j\} \mid M_i, M_j \in \mathcal{M}, i \neq j \text{ e } M_i \text{ e } M_j \text{ são adjacentes em } G\}$. Denota-se por *fatores* de \mathcal{M} os subgrafos induzidos por cada parte de \mathcal{M} .

Uma *decomposição modular* de um grafo G é uma decomposição de G que associa a esse grafo uma única árvore de decomposição denotada por $T(G)$. As folhas dessa árvore são os vértices de G e cada nó interno v dessa árvore representa um módulo forte de G formado pelo conjunto de folhas descendentes de v . Um nó interno possui um dos rótulos P , S ou N para representar um módulo paralelo, série ou vizinhança, respectivamente. Um *módulo paralelo* induz um grafo desconexo, um *módulo série* induz um grafo conexo cujo complemento é desconexo e um *módulo de vizinhança* induz um grafo conexo cujo complemento também é conexo.

O processo de construção de uma árvore de decomposição modular de um grafo G é tal que um nó que representa um módulo paralelo é decomposto em módulos que são componentes de G , um módulo série é decomposto em componentes de \bar{G} e um módulo de vizinhança é decomposto em seus submódulos maximais fortes. Como todo vértice de um nó de vizinhança está contido em apenas um submódulo maximal forte ([16, 4]) a árvore de decomposição modular é única.

Existem diversos algoritmos na literatura (por exemplo, [49]) que constroem a árvore de decomposição modular de um grafo em tempo linear.

A decomposição modular de um grafo torna-se ainda mais útil para algoritmos em grafos quando os nós de vizinhança do grafo a ser decomposto possuem uma estrutura conhecida. Dessa forma, para ajudar a caracterizar os nós de vizinhança de uma decomposição modular de um grafo G , foram introduzidas mais algumas notações.

Seja h um nó interno de $T(G)$. Denote por $M(h)$ o módulo que h representa, ou seja, o módulo formado pelo conjunto de folhas descendentes de h em $T(G)$. Denote por $V(h) = \{h_1, \dots, h_k\}$ o conjunto de filhos de h em $T(G)$. Denotamos por $G(h)$ o grafo quociente do subgrafo induzido pelo módulo $M(h)$ cuja partição de congruência é formada pelos módulos $M(h_1), \dots, M(h_k)$. Desse modo, o conjunto de vértices de $G(h)$ é $V(h)$ e existe uma aresta entre dois vértices $h_i, h_j \in V(h)$ se, e somente se, $M(h_i)$ e $M(h_j)$ são adjacentes. Denotamos por fatores de h os subgrafos induzidos pelos módulos $M(h_1), \dots, M(h_k)$. É fácil verificar que se h representa um módulo paralelo (respectivamente, série e vizinhança), $G(h)$ será um grafo sem arestas (respectivamente, completo e primo). Por último, denote por $\pi(G)$ o conjunto de grafos quocientes dos nós de vizinhança da decomposição modular de um grafo G .

3 *Coloração Gulosa*

Neste capítulo, apresentamos uma revisão da literatura sobre esse problema. Destacamos alguns resultados de complexidade, além de apresentarmos diversos limites conhecidos sobre o número guloso de certas classes de grafos e de produtos de grafos.

3.1 Definição

Para definirmos formalmente o problema de Coloração Gulosa, observemos o Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Algoritmo Guloso de Coloração

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e ordem $\theta = v_1, v_2, \dots, v_n$ sobre $V(G)$

Saída: Coloração própria c de G

1 **para todo** $i = 1, \dots, n$ **faça**

2 $c(v_i) = k$, tal que $k \in \{1, \dots, n\}$ é a menor cor não utilizada em $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.

3 Retorne c .

O Algoritmo 1, também conhecido por algoritmo guloso de coloração, é uma forma muito intuitiva de se colorir um grafo, pois atribui-se a cada vértice a menor cor que não foi já atribuída à sua vizinhança.

O problema de Coloração Gulosa consiste em determinar, dentre todas as possíveis ordenações θ sobre $V(G)$, a maior quantidade de cores que o Algoritmo 1 utiliza. Denotamos essa quantidade por número guloso de G , ou $\Gamma(G)$. Na literatura, também encontramos referências ao número guloso como número cromático *first-fit* ou número de Grundy.

Como o Algoritmo 1 produz colorações próprias de um grafo G , temos que $\chi(G) \leq \Gamma(G)$. Observe que a cor i só é atribuída a um vértice v se existem vértices na vizinhança de v com todas as cores menores que i . Dessa forma, podemos concluir que $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$, sendo $\Delta(G)$ o maior grau de um vértice de G .

3.2 Complexidade

O problema de Coloração Gulosa foi estudado pela primeira vez na década de 30 [22], mas acredita-se que os primeiros autores a tratarem desse problema como um problema em Teoria de Grafos foram Christen e Selkow [7].

Não se pode falar desse problema sem citar o problema de Coloração *On-line*. Dada uma ordenação $\theta = v_1, \dots, v_n$ dos vértices de um grafo G , um algoritmo de Coloração *On-line* atribui cores aos vértices de G seguindo a ordem θ , ou seja, ao atribuir a cor de um vértice v_i o algoritmo só possui informação sobre os vértices $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ que já foram coloridos. O algoritmo também não pode alterar a cor de um vértice já colorido. Entre todos os algoritmos *on-line* que colore um grafo G , existe aquele que no seu pior desempenho atribui a G o menor número de cores. Esse número é chamado número cromático *on-line*.

O algoritmo guloso pode ser visto como um algoritmo de Coloração *On-line*. A versão de Coloração *On-line* que utiliza o algoritmo guloso é chamada Coloração *First-Fit*, denotada por FF . Denota-se por $FF(G)$, o comportamento do pior caso da coloração FF em um grafo G . Um objeto de estudo da coloração FF é a determinação de limites para $FF(G)$. Entretanto, observe que $FF(G) = \Gamma(G)$. Entretanto, a Coloração Gulosa pode ser considerada uma coloração *off-line*, pois para atingir seu objetivo precisamos de toda a informação do grafo, uma vez que todas as ordens dos vértices do grafo devem ser analisadas.

Existem diversos resultados na literatura sobre Coloração *On-line* e ao leitor interessado é indicada a leitura dos seguintes trabalhos [38, 39, 24, 25, 28].

Dada uma ordenação $\theta = v_1, \dots, v_n$ dos vértices de um grafo G , uma *coloração própria parcimoniosa* de G atribui cores aos vértices de G de tal forma que a cor do vértice v_i deve ser igual a uma das cores usadas nos vértices v_1, \dots, v_{i-1} , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, a menos que o vértice v_i possua vizinhos com cada uma das cores atribuídas aos vértices v_1, \dots, v_{i-1} . Nesse caso é atribuída uma nova cor a v_i .

A pior quantidade de cores que uma coloração própria parcimoniosa atribui a um grafo G , dentre todas as possíveis ordenações de $V(G)$ é denotada por *número ocromático* de G . A determinação do número *ocromático* foi um problema proposto e estudado por Simmons [48]. Erdős et al. demonstraram que $\Gamma(G)$ é igual ao número *ocromático* de G , para todo grafo G .

Por vários anos a determinação da complexidade de Coloração Gulosa foi um problema em aberto, mas, em 1997, Goyal e Vishvanathan demonstraram que determinar se o número guloso de um grafo é superior ou igual a k , para algum $k \in \mathbb{N}$, é um problema *NP-completo* [20].

Foi demonstrado que este problema também é *NP*-completo para complementos de grafos bipartidos [52] e que:

Teorema 3.1 ([52]) *Para um grafo qualquer $G = (V, E)$ e um inteiro r , determinar se $\Gamma(G) \leq \chi(G) + r$ é um problema *coNP*-completo.*

Na mesma linha de raciocínio do resultado anterior, Asté et al. [2] demonstraram também que são problemas *coNP*-completos determinar se $\Gamma(G) \leq c \times \chi(G)$ e se $\Gamma(G) \leq c \times \omega(G)$, para alguma constante c e para algum grafo G .

Por outro lado, existem alguns resultados polinomiais sobre o número guloso. Um resultado polinomial bem conhecido é que determinar o número guloso de um cografo é um problema polinomial [24]. Outra classe de grafos cuja determinação do número guloso pode ser feita em tempo polinomial é a dos hipercubos. Tal resultado foi demonstrado por Jensen e Toft [35]. Existem também algoritmos polinomiais para calcular o número guloso em árvores [30] e em k -árvores parciais (grafos com largura em árvore no máximo k) [50, 42]. Zaker [53] recentemente demonstrou que, dados um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k , existe um algoritmo de complexidade $\mathcal{O}(n^{2^{k-1}})$ para determinar se $\Gamma(G) \geq k$.

A seguir, veja um resumo dos resultados de complexidade de Coloração Gulosa na Tabela 3.1:

Tabela 3.1: Resumo - Complexidade

Classe	Complexidade
Caso geral	<i>NP</i> -Completo [20]
Grafos com largura em árvore limitada ¹	Polinomial [50, 42]
Árvores	Polinomial [30]
Cografos	Polinomial [24]
Hipercubos	Polinomial [35]
Complementos de bipartidos	<i>NP</i> -completo [52]

3.3 Limites

Existe amplo estudo de limites sobre o número guloso de um grafo. Exibiremos nesta seção alguns deles, indicando ainda outros que podem ser encontrados na literatura.

O primeiro fato importante a ser observado é que o número guloso pode ser arbitrariamente grande, mesmo para grafos de número cromático trivialmente determinável. Por exemplo, para

¹Grafos com largura em árvore limitada são exatamente as k -árvores parciais.

árvores, que são uma subclasse dos grafos bipartidos, o número cromático guloso pode ser tão grande quanto desejarmos. Uma árvore binomial possui a seguinte definição:

Definição 3.1 A árvore binomial B_k , de ordem k , é definida como segue:

$$B_k = \begin{cases} \text{um vértice,} & \text{se } k = 0 \\ \text{uma árvore com raiz } r \text{ cujos filhos são } B_0, \dots, B_{k-1}, & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

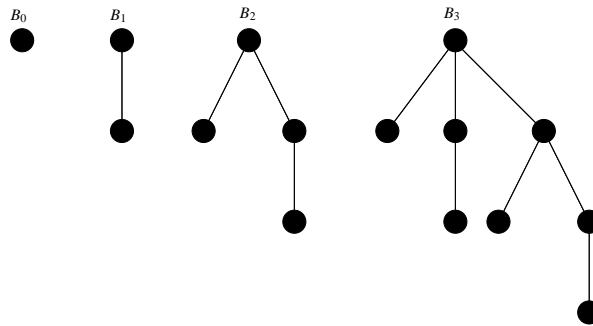


Figura 3.1: Árvores binomiais.

Considere uma árvore binomial B_k e uma ordem θ sobre os vértices de B_k tal que os primeiros elementos da ordem são as folhas $\{f_1, \dots, f_x\}$ de B_k , depois, nesta ordem θ , estão as folhas de $B_k - \{f_1, \dots, f_x\}$, e assim sucessivamente. Veja que ao aplicarmos o algoritmo guloso usando essa ordem θ , o algoritmo utilizará $k + 1$ cores.

Ainda sobre grafos bipartidos, apesar de Coloração Gulosa ser um problema *NP*-completo para complementos de grafos bipartidos, o seguinte limite foi obtido:

Teorema 3.2 ([52, 24]) Se G é o complemento de um grafo bipartido, então $\Gamma(G) \leq 3\omega(G)/2$.

Em [24] foi demonstrado que se G é o complemento de um grafo cordal, então $\Gamma(G) \leq 2\omega(G) + 1$ e que se G é um grafo *split* $G = (S \cup K, E)$, então $\Gamma(G) \leq 1 + |K|$. Para grafos de intervalos, que são uma subclasse dos grafos cordais, é bastante conhecido o seguinte fato:

Proposição 3.1 ([37]) Se G é um grafo de intervalos, então $\Gamma(G) \leq 40\omega(G)$.

Esse limite foi melhorado recentemente para $8\omega(G)$ [45].

Nikolopoulos e Papadopoulos [46] demonstraram que o número guloso em grafos de permutação, que são grafos perfeitos, não pode ser limitado por $\omega(G)$. Isso ocorre porque para um grafo de permutação G e um n suficientemente grande, a seguinte desigualdade é válida:

$$\Gamma(G) \geq \frac{(\chi^2 + \chi) + k(\chi^2 - \chi)}{2}$$

Gyárfás e Lehel [26] foram os primeiros a conseguir determinar um limite superior para o número guloso de grafos livres de P_5 . Entretanto, um melhor limite superior para essa classe de grafos foi encontrado por Kierstead et al.:

Teorema 3.3 ([40]) *Se G é um grafo livre de P_5 , então $\Gamma(G) \leq \frac{4^{\omega(G)} - 1}{3}$.*

A desigualdade $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$ é conhecida como a desigualdade (aditiva) de Nordhaus-Gaddum e é válida para qualquer grafo G com n vértices.

Zaker [53] encontrou desigualdades similares à de Nordhaus-Gaddum com relação ao número guloso para algumas classes de grafos e propôs a seguinte conjectura:

Conjectura 3.1 *Para qualquer grafo G com n vértices, a seguinte desigualdade é válida:*

$$\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq n + 2$$

Recentemente, foi demonstrado que essa conjectura é válida para grafos bipartidos e grafos com até 8 vértices, mas que em geral não é válida:

Proposição 3.2 ([15]) *Se G é um grafo qualquer com $|V(G)| = n \geq 3$, então:*

$$\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{5n+2}{4} \rfloor, & \text{se } n \geq 10 \\ n + 3, & \text{se } n = 9 \\ n + 2, & \text{se } n \leq 8 \end{cases}$$

Eles também mostram exemplos para os quais $\Gamma(G) + \Gamma(\bar{G}) = \lfloor \frac{5n+2}{4} \rfloor$, ou seja, esse limite é o melhor possível.

Definição 3.2 *Dados grafos G e H , denotamos por produto lexicográfico $G[H]$ o grafo cujo conjunto de vértices é formado pelos elementos de $V(G) \times V(H)$ e cujo conjunto de arestas é o seguinte:*

$$E(G[H]) = \{(a,x)(b,y) \mid ab \in E(G), \text{ ou } a = b \text{ e } xy \in E(H)\}$$

Geller e Stahl [17] obtiveram alguns resultados com respeito ao número cromático de um grafo $G[H]$ obtido pelo produto lexicográfico de G por H . Asté et al. [2] demonstraram alguns resultados similares sobre o número guloso de produtos de grafos.

Pela definição do produto lexicográfico de G por H , o grafo $G[H]$ pode ser visto como se cada vértice de G fosse substituído por uma cópia de H . Dessa forma, denote por $H(x)$ o subgrafo induzido de $G[H]$ pelos vértices $\{x\} \times V(H)$. Observe que $H(x)$ é isomorfo a H . Os seguintes resultados foram obtidos:

Proposição 3.3 ([2]) *Sejam G e H grafos disjuntos. Em uma coloração gulosa de $G[H]$, no máximo $\Gamma(H)$ cores aparecem em cada $H(x)$, para todo $x \in V(G)$.*

Demonstração: Considere uma coloração gulosa de um grafo $G[H]$ e sejam n_1, \dots, n_p as p cores que aparecem em uma cópia $H(x)$ de H . Denote por S_i , $1 \leq i \leq p$, o conjunto estável formado pelos vértices em $H(x)$ coloridos com a cor n_i . Seja u um vértice de S_i . Observe que u possui pelo menos um vizinho $v_j \in H(x)$ colorido com a cor n_j , para todo $j < i$, pois, caso contrário, uma vez que u recebeu a cor n_i , ele deve possuir um vizinho w em $V(G) \setminus V(H(x))$ com a cor n_j e tal vizinho w também seria vizinho de um vértice de $H(x)$ com a cor n_j , pois a vizinhança de u e v_j em $V(G[H]) \setminus V(H(x))$ é a mesma. Logo, $p \leq \Gamma(H(x)) \leq \Gamma(H)$. \square

A proposição anterior também nos mostra que uma coloração gulosa para um grafo $G[H]$ induz uma coloração gulosa em $H(x)$, para todo $x \in V(G)$.

Outro resultado similar aos de Geller e Stahl é o seguinte:

Proposição 3.4 ([2]) *Se H é um grafo tal que $\Gamma(H) = k$, então, para todo grafo G , $\Gamma(G[H]) = \Gamma(G[K_k])$.*

Outro resultado interessante demonstrado em [2] é que se $\Gamma(G) = \Delta(G) + 1$ ou G é uma árvore, então $\Gamma(G[H]) = \Gamma(G) \times \Gamma(H)$, sendo H um grafo qualquer disjunto de G .

Além disso, a seguinte desigualdade geral foi encontrada:

Teorema 3.4 ([2]) *Sejam G e H grafos disjuntos. Então:*

$$\Gamma(G) \times \Gamma(H) \leq \Gamma(G[H]) \leq 2^{\Gamma(G)-1} (\Gamma(H) - 1) + \Gamma(G) - 1.$$

4 Coloração Ponderada

Apresentamos, neste capítulo, o estado da arte deste problema. Os resultados mostram que mesmo quando restrito a diversas classes de grafos simples, esse problema ainda é *NP*-difícil. Exibimos ainda alguns limites sobre a quantidade de cores de uma coloração ponderada ótima, além de alguns resultados de aproximabilidade.

4.1 Definição

O problema de Coloração Ponderada foi definido por Guan e Zhu [23] e consiste em determinar, dentre todas as possíveis colorações próprias \mathcal{S} de um grafo ponderado $G = (V, E, w)$, aquela que possui o menor peso. O peso de uma coloração $w(\mathcal{S})$ é a soma dos pesos de suas classes de cores e o peso de uma classe de cor é o maior peso de um vértice que pertence àquela classe. A esse menor peso de uma coloração é dada a nomenclatura número cromático ponderado, denotado por $\chi_p(G)$.

Conforme comentamos no Capítulo 1, $\chi_p(G) = \chi(G)$ se G é um grafo com pesos unitários. Por essa observação, podemos concluir que Coloração Ponderada é um problema *NP*-difícil no caso geral.

Para determinar $\chi_p(G)$, devemos observar que, quanto menos classes de cores tivermos, menos parcelas teremos para somar ao calcularmos o peso de uma coloração. Entretanto, observe na Figura 4.1, que nem sempre uma coloração ponderada ótima usa $\chi(G)$ cores.



Figura 4.1: Coloração ponderada ótima pode usar mais que $\chi(G)$ cores.

Devemos observar que colocar os vértices mais pesados em uma mesma classe de cor pode

reduzir o peso da coloração, uma vez que somaremos apenas o mais pesado. Por exemplo, veja a Figura 4.1.

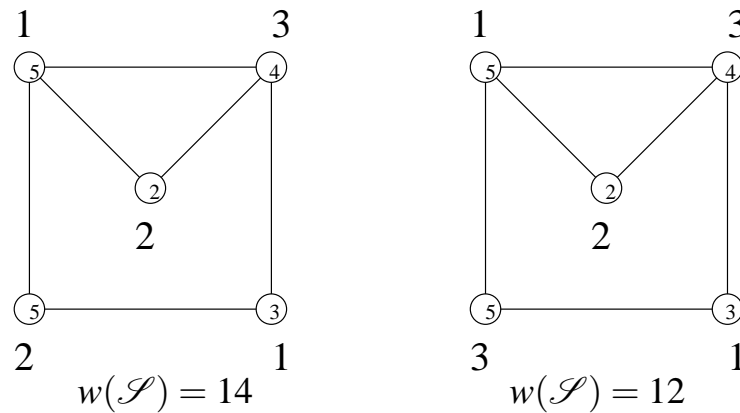


Figura 4.2: Colocar vértices pesados em uma mesma classe de cor pode reduzir o peso.

Podemos, então, perceber que os pesos são essenciais para determinarmos $\chi_p(G)$. Sendo assim, mesmo quando estudamos classes particulares de grafos, temos apenas informações adicionais sobre a estrutura do grafo, mas não sobre os pesos dos vértices do grafo. Isto torna o problema particularmente difícil, mesmo para classes de grafos simples.

4.2 Complexidade

Para os seguintes resultados de complexidade, com relação aqueles sobre classes de grafos nas quais Coloração Ponderada é *NP*-completo, estaremos nos referindo à versão de decisão deste problema, no qual busca-se determinar se existe, ou não, uma coloração própria \mathcal{S} de um grafo ponderado $G = (V, E, w)$, tal que $w(\mathcal{S}) \leq q$, para algum $q \in \mathbb{R}_+$ dado como entrada do problema.

Como comentado no Capítulo 1, o problema de Coloração Ponderada é *NP*-difícil, uma vez que Coloração de Grafos é o caso particular de Coloração Ponderada no qual os vértices têm pesos unitários. Usando o mesmo argumento, como o problema de Coloração de Grafos não pode ser aproximado com fator n^ε , para algum $\varepsilon > 0$, a menos que $P = NP$ [43], Coloração Ponderada também não pode. Por outro lado, sabemos que o problema de Coloração Ponderada pode ser aproximadamente resolvido em tempo polinomial com um fator de aproximação padrão $O(n/\log n)$ [12].

Coloração Ponderada em grafos bipartidos é *NP*-completo, uma vez que foi provado que este problema é *NP*-completo mesmo se o grafo é bipartido com $\Delta(G) \leq 14$ [12] e que é *NP*-

completo mesmo se o grafo é bipartido e livre de P_8 [11]. Entretanto sabe-se calcular uma coloração ponderada ótima em tempo polinomial para grafos bipartidos com 2 diferentes pesos nos vértices [12] e para grafos bipartidos livres de P_5 [11]. Além disso, é conhecido um algoritmo $\frac{8}{7}$ -aproximativo para grafos bipartidos [11] e que, a menos que $P = NP$, não existe algoritmo aproximativo com fator $\frac{8}{7} - \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, para esta classe de grafos [12].

Uma vez que podemos obter uma orientação transitiva das arestas de um grafo bipartido orientando todas as arestas de uma partição para outra, todo grafo bipartido é de comparabilidade e, dessa forma, concluímos que Coloração Ponderada é NP -completo para grafos de comparabilidade.

O problema de Coloração Ponderada em grafos linha de bipartidos é NP -completo [12] e possui um algoritmo aproximativo com fator de aproximação ρ_Δ , tal que Δ é o maior grau de um vértice, $\rho_1 = \rho_2 = 1$ e:

$$\rho_\Delta = \frac{\Delta}{\sum_{j=1}^{\Delta} \prod_{l=j}^{\Delta-1} (1 - \rho_l/\Delta)}$$

Entretanto, para qualquer $\Delta \geq 3$, $\varepsilon > 0$, o problema de Coloração Ponderada não pode ser aproximado com o seguinte fator, a menos que $P = NP$, em grafos linha de bipartidos regulares de grau Δ :

$$1 + \frac{2}{\Delta} - \frac{2}{\Delta + 1} - \varepsilon$$

Além dos resultados polinomiais citados anteriormente para grafos bipartidos também serem válidos para árvores, é conhecido um esquema de aproximação de tempo polinomial para k -árvores parciais [14], em particular, para árvores. Uma k -árvore é definida recursivamente como segue: uma k -árvore com $k + 1$ vértices consiste de uma clique com $k + 1$ vértices e dada uma k -árvore com n vértices, $n > k$, constrói-se uma k -árvore com $n + 1$ vértices adicionando um novo vértice v a essa k -árvore, fazendo-o adjacente a uma clique de tamanho k dessa k -árvore. Uma k -árvore parcial é um subgrafo de uma k -árvore. A complexidade deste problema para k -árvores parciais continua em aberto.

Sabemos que os cografos, também conhecidos como grafos livres de P_4 , não possuem ciclos ímpares de tamanho maior que 3, uma vez que tal ciclo induziria um P_4 . Logo, todo cografo que não possui triângulos é bipartido. Apesar desse fato, Coloração Ponderada em cografos é

polinomial.

Para mostrarmos que o problema de Coloração Ponderada pode ser resolvido em tempo polinomial para cografos, devemos introduzir mais alguns resultados.

Um grafo G é perfeito se, e somente se, para todo subgrafo $H \subseteq G$, $\omega(H) = \chi(H)$. Chudnovsky et al. [8] provaram que G é perfeito se, e somente se, G não possui buracos ímpares nem seus complementos. Logo, todo cografo é perfeito. Além disso, a seguinte caracterização para cografos foi demonstrada em [10]:

Proposição 4.1 *Um grafo G é um cografo se, e somente se, para todos os subgrafos induzidos G' de G , o algoritmo guloso quando aplicado em qualquer ordem θ dos vértices de G' obtém uma coloração com $\chi(G')$ cores.*

De posse deste resultado, e da suposição que podemos fazer que o grafo dado como entrada possui pesos estritamente maiores que zero, pois eles nunca influenciam no peso de uma coloração, Demange et al. [12] puderam obter os seguintes resultados:

Lema 4.1 *Se $G = (V, E, w)$ é um cografo ponderado, então todas as colorações ponderadas ótimas $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ de G satisfazem $k = \chi(G)$.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, uma coloração ponderada ótima $\mathcal{S}' = (S'_1, \dots, S'_{k'})$ de $G = (V, E, w)$ tal que $k' > \chi(G)$. Sem perda de generalidade, suponha $w(S'_1) \geq \dots \geq w(S'_{k'})$. Crie uma ordem θ dos vértices de G colocando, nesta ordem, primeiramente os vértices de S'_1 , depois os de S'_2 e assim sucessivamente. Seja $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ a k -coloração obtida pela aplicação do algoritmo guloso à ordem θ . Observe que, para todo vértice $v \in S'_j$, $v \in S_i$, para algum $i \leq j$. Uma vez que $w(S'_i) \geq w(S'_j)$, temos que $w(S'_i \cup \{v\}) = w(S'_i) \geq w(S_i)$. Como $k < k'$, $S_{k+1} = \dots = S_{k'} = \emptyset$ e cada classe de cor $S'_i \neq \emptyset$, para todo $i = 1, \dots, k'$, temos $w(\mathcal{S}) < w(\mathcal{S}')$. Absurdo, pois \mathcal{S}' era uma coloração ótima. \square

Vale ressaltar que o lema anterior é também consequência do Teorema 4.1 demonstrado por Guan e Zhu [23].

Proposição 4.2 *Seja $G = (V, E, w)$ um cografo ponderado. Então, uma coloração $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ construída pelo algoritmo guloso, baseada em qualquer ordem θ tal que $u < v$ (ou seja, u antes de v em θ) implica $w(u) \geq w(v)$, é ótima.*

Demonstração: Sejam $t_1 > \dots > t_r$ os r diferentes valores de pesos dos vértices de G . Seja $G(s)$ o grafo induzido pelos vértices com peso maior ou igual a t_s , i.e., $G(s) = G[\{v | w(v) \geq t_s\}]$.

Observe que $w(S_i) \geq \max\{t_s \mid \omega(G(s)) \geq i\}$, ou seja, temos $\omega(G(s))$ classes de cores com peso pelo menos t_s , uma vez que teremos uma clique de tamanho $\omega(G(s))$ contendo vértices com peso superior ou igual a t_s .

Desta forma, se considerarmos que $w(S_1) \geq \dots \geq w(S_k)$, então os primeiros $\omega(G(1))$ conjuntos S_i da seqüência (S_1, \dots, S_k) tem peso $w(S_i) = t_1$; observe também que os primeiros $\omega(G(2))$ conjuntos terão peso superior ou igual a t_2 e, de forma geral, os primeiros $\omega(G(s))$ conjuntos terão peso superior ou igual t_s .

Suponha, agora, uma coloração $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ obtida pelo algoritmo guloso sobre uma ordem de vértices tal que $w(v_1) \geq \dots \geq w(v_n)$. Seja v_l o vértice mais pesado a receber a cor S_i , ou seja, $w(S_i) = w(v_l)$. Observe que o subgrafo $G[\{v_1, \dots, v_l\}]$ é um cografo para o qual o algoritmo guloso produz uma coloração com o número mínimo de cores. Logo, $\chi(G[\{v_1, \dots, v_l\}]) = i = \omega[\{v_1, \dots, v_l\}]$, pois G é perfeito. Concluimos, então, que \mathcal{S} satisfaz $w(S_i) = \max\{t_s \mid \omega(G(s)) \geq i\}$ e, então, \mathcal{S} é uma coloração ótima. \square

Outra classe de grafos relacionada aos grafos bipartidos é a dos grafos *split*. Dizemos que um grafo é bipartido se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos estáveis disjuntos. Um grafo é dito *split* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto estável e uma clique. Assim como no caso dos grafos bipartidos, Coloração Ponderada em grafos *split* também é *NP*-completo. Para exibirmos a demonstração desse resultado, considere a seguinte definição:

Definição 4.1 *Dados um grafo $G = (V, E)$, uma coloração c de G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, dizemos que uma cor x ocorre em S se, e somente se, existe algum vértice $v \in S$ tal que $c(v) = x$.*

Proposição 4.3 [12] *Coloração ponderada é fortemente NP-completo para grafos split.*

Demonstração: A redução se dará a partir do problema de cobertura mínima de um conjunto. Mais formalmente, dados um conjunto $\bar{S} = (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_k)$, uma família de subconjuntos $\mathcal{C} = \{C_i \mid C_i \subseteq \bar{S} \text{ e } i \in I\}$ e um inteiro positivo q , existe uma subfamília $\mathcal{C}' = \{C'_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\bigcup_{j \in J} C'_j = \bar{S}$ e $|J| \leq q$?

Iremos construir um grafo ponderado *split* $G = (S \cup K, E, w)$ da seguinte forma:

- Para cada elemento $\bar{s}_i \in \bar{S}$, associa-se um vértice s_i no conjunto estável S com peso $|I| + 1$;
- Para cada subconjunto $C_i \in \mathcal{C}$, associa-se um vértice c_i na clique K com peso $|I|$;

- Se $\bar{s}_i \notin C_i$, associa-se uma aresta entre s_i e c_i .

Dada esta construção do grafo *split*, temos:

Observação 4.1 *Existe uma subfamília $\mathcal{C}' = \{C'_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\bigcup_{j \in J} C'_j = S$ e $|J| \leq q$ se, e somente se, existe uma coloração c de G tal que $w(c) \leq |I|^2 + q$.*

Se existe uma subfamília $\mathcal{C}' = \{C'_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\bigcup_{j \in J} C'_j = S$ e $|J| \leq q$, então exibiremos uma coloração c tal que $w(c) \leq |I|^2 + q$ da seguinte forma:

- Atribuamos uma coloração qualquer à clique;
- Se o elemento \bar{s}_i é coberto pelo conjunto C_i , atribuamos a cor de c_i ao vértice s_i .

Observe primeiro que se \bar{s}_i é coberto pelo conjunto C_i , $\bar{s}_i \in C_i$, conseqüentemente, $(s_i, c_j) \notin E(G)$ e, portanto, a coloração é própria. Uma vez que no máximo q subconjuntos foram escolhidos para cobrir o conjunto \bar{S} , no máximo q cores serão utilizadas para colorir o estável S . Portanto, $w(c) \leq |I|^2 + q$.

Por outro lado, se existe uma coloração c de G tal que $w(c) \leq |I|^2 + q$ então:

- Não existe uma cor com apenas vértices de S , pois, neste caso, $w(c) \geq |I|^2 + |I| + 1 > |I|^2 + q$;
- Não existem $p > q$ cores de K utilizadas em S , pois teríamos $w(c) = |I|^2 + p > |I|^2 + q$.

Desta forma, no máximo q cores de K ocorrem em S e, então, se escolhermos os conjuntos C_i correspondentes aos vértices de K cujas cores ocorrem em S , veremos que esses conjuntos formarão uma cobertura de \bar{S} , pois cada vértice de S foi colorido com alguma cor e será coberto pelo conjunto que recebeu a mesma cor em K . \square

Para grafos *split* é conhecido um esquema de aproximação de tempo polinomial [11].

Um grafo $G = (V, E)$ é dito P_4 -carregado se para todo $S \subseteq V$ tal que $|S| \leq 6$, se $G[S]$ possui mais de 2 P_4 's distintos, então $G[S]$ é um grafo *split*.

Um fato que não encontramos na literatura, mas é simples de se verificar é que todo grafo *split* é P_4 -carregado. Logo, uma vez que Coloração Ponderada em grafos *split* é NP -completo, também o será em grafos P_4 -carregados.

Outra conseqüência deste problema ser NP -completo para grafos *split*, é que ele também o será para grafos cordais e para grafos livres de P_5 . Para os grafos de intervalos, que são uma

subclasse dos grafos cordais, este problema ainda é *NP*-completo [14]. Coloração Ponderada ainda é *NP*-completo mesmo se G é um grafo planar sem triângulos e com $\Delta(G) \leq 4$ [11].

Para o caso geral foi demonstrado que se G é um grafo com largura em árvore limitada, então uma coloração ponderada de peso mínimo que utiliza r cores, para alguma constante r , pode ser calculada em tempo polinomial, caso exista uma r -coloração própria de G [23].

Agora consideremos qualquer classe de grafos \mathcal{G} e um grafo $G \in \mathcal{G}$ e suponha que Coloração Ponderada é *NP*-completo para todo $G \in \mathcal{G}$. Então:

Proposição 4.4 ([12]) *Seja \mathcal{G} uma classe qualquer de grafos ponderados nos vértices. Se o problema de Coloração Ponderada em \mathcal{G} é *NP*-completo então, a menos que $P = NP$, para todo $c \in \mathbb{N}$, $c \geq 1$, nenhum algoritmo de tempo polinomial pode calcular uma solução de Coloração Ponderada em \mathcal{G} tal que a diferença entre o seu valor e o ótimo seja limitada superiormente por c . Além disso, se o problema de Coloração Ponderada é fortemente *NP*-completo, então, a menos que $P = NP$, Coloração Ponderada em \mathcal{G} não pode ser resolvida nem por um esquema de aproximação padrão, nem por um esquema de aproximação diferencial de tempo completamente polinomial.*

Sabemos também que para os grafos que admitem uma k -coloração própria, existe um algoritmo aproximativo para o problema de Coloração Ponderada com fator $k^3/(3k^2 - 3k + 1)$ [14] e, se para tais grafos o problema de Coloração por Listas [51, 13] for polinomial, então para esses grafos existe um esquema de aproximação de tempo polinomial [14].

Veja o resumo dos resultados de complexidade deste capítulo na Tabela 4.2.

4.3 Limites

Como o valor do número cromático ponderado depende dos pesos do grafo dado como entrada e como, no caso geral, os pesos podem assumir qualquer valor real não negativo, não são conhecidos bons limites para $\chi_p(G)$. Trivialmente, se denotarmos por k o maior peso de um vértice em um grafo G , podemos observar que $\chi_p(G) \leq kn$, tal que $n = |V(G)|$. Com essa suposição concluímos também que $\chi_p(G) \leq k\chi(G)$, pois existe uma coloração própria com $\chi(G)$ cores e o peso de cada classe de cor é no máximo k .

Existem alguns limites com relação à quantidade de cores de uma coloração ponderada ótima. O limitante inferior para a quantidade de cores de uma coloração ponderada ótima é,

Classe de grafos	Complexidade	Aproximações
Caso geral	NP -Completo	$O(n/\log n)$ [12]
Com largura em árvore limitada	Polinomial para r cores ¹ [23]	PTAS [14]
Cografos	Polinomial [12]	-
Bipartidos com 2 pesos diferentes	Polinomial [12]	-
Bipartidos livres de P_5	Polinomial [11]	-
Bipartidos G tal que $\Delta(G) \leq 14$	NP -Completo [12]	8/7-aprox. [11]
Bipartidos livres de P_8	NP -Completo [11]	8/7-aprox. [11]
Linha de bipartidos	NP -Completo [12]	$\frac{\Delta}{\sum_{j=1}^{\Delta} \prod_{l=j}^{\Delta-1} (1-\rho_l/\Delta)}$ [12]
De comparabilidade	NP -Completo ²	?
<i>Split</i>	NP -Completo [12]	PTAS [11]
Livres de P_5	NP -Completo ³	?
Cordais	NP -Completo ³	?
P_4 -carregados	NP -Completo ³	?
De intervalos	NP -Completo [14]	?
Planares G , sem triângulos e $\Delta(G) \leq 4$	NP -Completo [11]	?

Tabela 4.1: Resumo - Complexidade

obviamente, o número cromático, mas vale ressaltar que há casos para os quais esse número pode ser estritamente superior ao número cromático, como no exemplo da Figura 4.1.

Para limites superiores, Guan e Zhu demonstraram que:

Teorema 4.1 [23] *A maior quantidade de cores utilizada em uma coloração ponderada ótima de um grafo G é igual a $\Gamma(G)$.*

Ainda sobre limites superiores para a quantidade de cores de uma coloração ponderada ótima de um grafo ponderado, Demange et al. [12] demonstraram que:

Proposição 4.5 *Sempre pode-se construir, a partir de uma coloração própria \mathcal{S}' qualquer, uma k -coloração $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ tal que $w(\mathcal{S}) \leq w(\mathcal{S}')$ e $k \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração: Suponha uma coloração $\mathcal{S}' = (S'_1, \dots, S'_{k'})$ qualquer de um grafo $G = (V, E)$ e, sem perda de generalidade, que $w(S'_1) \geq \dots \geq w(S'_{k'})$. Defina $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ como sendo a coloração obtida pela aplicação do algoritmo guloso ao grafo G e a uma ordem θ de $V(G)$ tal que os primeiros vértices de θ são os vértices de S'_1 , depois, nessa ordem vêm os vértices de S'_2 e, assim, sucessivamente. Se $v \in S'_i$, então $v \in S_j$ para algum $j \leq i$, o que implica $k \leq k'$

¹É conhecido algoritmo polinomial para determinar uma coloração de menor peso que usa r cores, para algum número inteiro r dado como entrada.

²Todo grafo bipartido é de comparabilidade.

³Consequência da complexidade de Coloração Ponderada em grafos *split*.

e $w(\mathcal{S}) \leq w(\mathcal{S}')$. Observe também que se houvesse algum vértice v em uma classe de cor $k + 1 = \Delta(G) + 2$, uma vez que cada S_i é um conjunto estável maximal, significaria que v possuiria $\Delta(G) + 1$ vizinhos, o que é uma contradição. Logo, $k \leq \Delta(G) + 1$. \square

Podemos observar que em toda coloração ponderada ótima $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ de um grafo G qualquer, tal que $w(S_1) \geq \dots \geq w(S_k)$, pode ser transformada em uma coloração tal que todo vértice de S_i possui pelo menos um vizinho em S_j , para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$ com $j > i$. Em outras palavras, pode-se assumir sempre que \mathcal{S} é uma coloração gulosa. Esse fato já havia sido utilizado por Guan e Zhu na demonstração do Teorema 4.1 e é uma ferramenta importante para demonstrações sobre colorações ponderadas ótimas que utilizamos.

Uma outra consequência desse resultado é que se G é o grafo linha de um grafo H , i.e., $G = L(H)$, então pode-se construir, a partir de uma coloração própria \mathcal{S}' qualquer, uma k -coloração $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ para G tal que $k \leq 2\Delta(H) - 1$.

Outro fato interessante que eles observaram foi que se, em uma coloração ponderada ótima $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ de um grafo G , existirem $\chi(G) = q$ classes de cores S_i, \dots, S_{i+q} de mesmo peso, então essas classes de cores devem ser as mais leves, ou seja, $i = k - q$.

Proposição 4.6 *Se $G = (V, E, w)$ é um grafo ponderado com r pesos diferentes e $q = \chi(G)$ é seu número cromático, então toda k -coloração ponderada ótima $\mathcal{S}^* = (S_1^*, \dots, S_k^*)$ satisfaz: $w(S_i^*) > w(S_{i+q-1}^*)$, para todo $i \leq k - q$. Em particular, $k \leq 1 + r(q - 1)$ e existem exemplos que satisfazem este limite na igualdade.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que existe um índice $i \in \{1, \dots, k - q\}$, tal que $w(S_i^*) = \dots = w(S_{i+q-1}^*)$. Observe que para $G' \subseteq G$, $\chi(G') \leq \chi(G)$. Seja G' o subgrafo induzido por $S_i^* \cup \dots \cup S_{i+q-1}^*$. Como $\chi(G) = q$, podemos atribuir uma coloração a G' com no máximo q cores, obtendo uma coloração própria \mathcal{S} para G com peso estritamente inferior a \mathcal{S}^* . Para tanto, vejamos os detalhes:

$$\begin{aligned} w(\mathcal{S}^*) &= w(S_1^*) + \dots + w(S_k^*) \\ &= w(S_1^*) + \dots + w(S_{i-1}^*) + qw(S_i^*) + w(S_{i+q}^*) + \dots + w(S_k^*) \\ &> w(S_1^*) + \dots + w(S_{i-1}^*) + qw(S_i^*) \\ &\geq w(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

\square

5 *Resultados Gerais em Coloração Gulosa*

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados sobre como determinar o número guloso de grafos cuja árvore de decomposição modular é bem caracterizada. A estratégia utilizada é de, a partir do número guloso das folhas da árvore de decomposição modular, calcular o número guloso dos nós internos através de uma busca em pós-ordem. Para tanto, na Seção 5.1 apresentamos resultados conhecidos na literatura sobre o cálculo do número guloso em nós série e paralelo e na Seção 5.2 como tal cálculo pode ser feito em alguns nós de vizinhança.

5.1 Número guloso de nós série e paralelo

A determinação do número guloso em nós série e paralelo a partir do número guloso de seus filhos é um fato bastante conhecido na literatura, pois A. Gyárfás e J. Lehel [24] demonstraram como calcular o número guloso de um cografo em tempo polinomial utilizando sua árvore de decomposição modular.

Como não existem nós de vizinhança em uma árvore de decomposição modular de um cografo, o algoritmo polinomial que A. Gyárfás e J. Lehel demonstraram usa as seguintes proposições para calcular o número guloso de um cografo G , percorrendo a sua árvore de decomposição modular em pós-ordem.

Proposição 5.1 *Seja v um nó interno da árvore de decomposição modular $T(G)$ de um grafo G que representa um módulo paralelo e sejam $\{v_1, \dots, v_k\}$ seus filhos. Então $\Gamma(G[M(v)]) = \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \Gamma(G[M(v_i)])$.*

Proposição 5.2 *Seja v um nó interno da árvore de decomposição modular $T(G)$ de um grafo G que representa um módulo série e sejam $\{v_1, \dots, v_k\}$ seus filhos. Então $\Gamma(G[M(v)]) = \sum_{i \in \{1, \dots, k\}} \Gamma(G[M(v_i)])$.*

Como esses resultados são válidos para quaisquer grafos, para encontrarmos algoritmos polinomiais para calcular o número guloso de um determinado grafo cuja decomposição modular é bem determinada, apenas é necessário determinar como calcular o número guloso dos seus nós de vizinhança em tempo polinomial a partir do número guloso de seus filhos, ou seja, de seus fatores.

5.2 Número guloso em alguns nós de vizinhança

Nesta seção, apresentamos algoritmos de tempo polinomial para calcular o número guloso de alguns nós de vizinhança em função do número guloso de seus fatores. Esses resultados são válidos para quaisquer classes de grafos cujas decomposições modulares possuam tais nós de vizinhança.

5.2.1 P_5 , \bar{P}_5 e C_5

Veja que P_5 , \bar{P}_5 e C_5 são grafos primos. Existem classes de grafos, como algumas apresentadas no Capítulo 7, cuja decomposição modular pode possuir nós de vizinhança v tais que o grafo quociente $G(v)$ é isomorfo a um desses grafos.

Um nó de vizinhança cujos fatores não são necessariamente grafos triviais denotamos por nó gordo. Denote por C_5^* , por P_5^* e por \bar{P}_5^* os nós gordos ilustrados na Figura 5.2.1. Apresentamos a seguir como calcular o número guloso desses nós, baseado no número guloso de seus fatores.

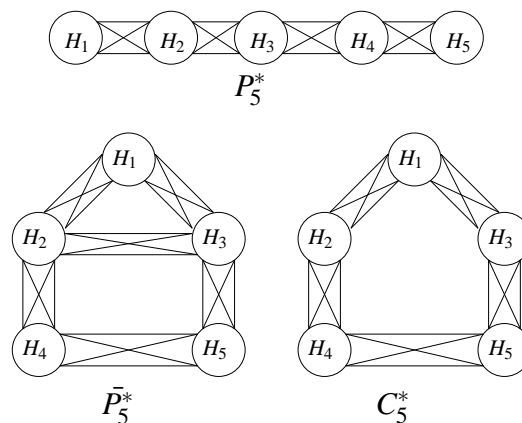


Figura 5.1: Módulos de vizinhança gordos.

Notação 5.1 Seja $G = (H_1 \cup \dots \cup H_5, E)$ um grafo isomorfo a um dos nós gordos da Figura

5.2.1. Denote $\Gamma(G[H_i])$ por Γ_i e denote uma ordem que produza uma coloração com $\Gamma(G[H_i])$ cores para $G[H_i]$ por θ_i , para todo $i \in \{1, \dots, 5\}$.

Definição 5.1 Dados grafos G e H , dizemos que G' é o grafo obtido de G pela substituição de um vértice $v \in V(G)$ pelo grafo H se $V(G') = \{V(G) \setminus \{v\}\} \cup V(H)$ e $E(G') = \{E(G) \setminus \{uv \mid u \in N_G(v)\}\} \cup E(H) \cup \{uh \mid u \in N_G(v) \text{ e } h \in H\}$.

Para demonstrarmos os resultados anunciados, precisamos exibir a seguinte proposição que generaliza a Proposição 3.3:

Proposição 5.3 Sejam G, H_1, \dots, H_n , grafos disjuntos e seja $n = |V(G)|$. Em uma coloração gulosa do grafo G^* , que é obtido pela substituição do vértice $v_i \in V(G)$ pelo grafo H_i , no máximo $\Gamma(H_i)$ cores ocorrem em cada subgrafo induzido $H_i \subseteq G^*$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração: Considere uma coloração gulosa c de um grafo G^* e sejam n_1, \dots, n_p as p cores que aparecem em $G^*[V(H_k)]$, para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. Denote por S_i , $1 \leq i \leq p$, o conjunto estável formado pelos vértices de H_k coloridos com a cor n_i . Seja u um vértice de S_i . Como c é uma coloração gulosa, u possui pelo menos um vizinho colorido com a cor n_j , para todo $j < i$. Afirmamos que, para todo $j < i$, u possui um vizinho $v_j \in H_k$ colorido com a cor n_j . Para demonstrar esse fato, suponha o contrário. Como n_j ocorre em H_k existe pelo menos um vértice $v_j \in S_j$. Uma vez que u recebeu a cor n_i , ele possui um vizinho v'_j em $V(G^*) \setminus V(H_k)$ com a cor n_j . Entretanto, pela Definição 5.1, v'_j também é vizinho de v_j , pois a vizinhança de u e v_j em $V(G^*) \setminus V(H_k)$ é a mesma. Isso é uma contradição, pois toda coloração gulosa é própria. Logo, concluímos que $p \leq \Gamma(G^*[H_k]) \leq \Gamma(H_k)$. \square

É fácil verificar que a Proposição 3.3 é o caso particular da Proposição 5.3 no qual todos os grafos H_1, \dots, H_n são isomorfos a um grafo H .

Para as proposições seguintes, considere que as adjacências entre H_1, \dots, H_5 ocorrem de acordo com a Figura 5.2.1.

Proposição 5.4 Dados os números gulosos dos grafos H_1, \dots, H_5 , o número guloso de um $P_5^* = (H_1 \cup \dots \cup H_5, E)$ pode ser calculado em tempo constante.

Demonstração: Suponha que $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ é uma coloração gulosa ótima para P_5^* , ou seja, \mathcal{S} possui $\Gamma(P_5^*)$ cores de tal forma que cada vértice $v \in S_i$ possui um vizinho $u \in S_j$, para todo $j < i$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Façamos uma análise por casos do comportamento de uma solução gulosa ótima. O cálculo em tempo constante pode ser feito através da determinação do maior valor de uma solução, dentre a quantidade constante de casos que vamos analisar:

1. Se existe um vértice $v \in H_1$ colorido com a maior cor S_k , então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Neste caso, como v possui vizinhos com todas as cores S_1, \dots, S_{k-1} , concluímos que $k = \Gamma(P_5^*) \leq \Gamma_1 + \Gamma_2$, pela Proposição 5.3. Por outro lado, observe que qualquer ordenação para $V(P_5^*)$ que tenha primeiramente os vértices de H_1 de acordo com a ordem θ_1 e depois os vértices de H_2 ordenados por θ_2 leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração para P_5^* com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2$ cores.

2. Se existe um vértice $v \in H_5$ colorido com a maior cor S_k , então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_4 + \Gamma_5$.

A demonstração desse caso é análoga à anterior.

3. Se existe um vértice $v \in H_2$ colorido com a maior cor S_k , então

$$\Gamma(P_5^*) = \begin{cases} \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 & , \text{ se } \Gamma_1 \leq \Gamma_4; \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 & , \text{ se } \Gamma_1 > \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_3 \leq s_1; \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_1 & , \text{ se } \Gamma_1 > \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_3 > s_1; \end{cases}$$

sendo $s_1 = \Gamma_1 - \Gamma_4$.

Assim como nos casos anteriores, sabemos que $\Gamma(P_5^*) \leq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, pois, uma vez que $v \in H_2$, todas as cores ocorrem em $N(v)$, ou seja, em H_1, H_2 e H_3 e, pela Proposição 5.3, não podemos utilizar mais que Γ_i cores em cada $H_i, i \in \{1, 2, 3\}$.

- (a) Se $\Gamma_4 \geq \Gamma_1$, então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$:

Neste caso, uma ordem sobre os vértices de P_5^* que comece por $\theta_4, \theta_1, \theta_3$ e θ_2 , nessa ordem, leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração para P_5^* com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ cores.

Isso é fato, pois como nenhum vértice de H_1 é adjacente a nenhum vértice de H_4 , as cores utilizadas pelo algoritmo guloso para colorir H_4 são reutilizadas para colorir H_1 . Nenhuma cor utilizada em H_3 também ocorre em H_4 , ou seja, todas as cores de H_3 são diferentes das cores de H_1 .

Logo, o algoritmo guloso produz uma coloração que possui as primeiras Γ_1 cores em H_1 , Γ_3 cores distintas em H_3 e, conseqüentemente, outras Γ_2 cores em H_2 , podendo inclusive ser cores já utilizadas em H_4 que não foram reutilizadas em H_1 . Dessa forma, a igualdade segue.

- (b) Senão $\Gamma_4 < \Gamma_1$:

Sob essa hipótese, existem ordenações para as quais a quantidade de cores utilizadas em H_4 não é suficiente para colorir H_1 . Seja $s_1 = \Gamma_1 - \Gamma_4$ a quantidade de cores que

sobram em H_1 com relação a H_4 e que podem eventualmente ser utilizadas para colorir H_3 .

- Se $\Gamma_3 \leq s_1$, então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2$:

A intuição deste caso é que mesmo que sejam utilizadas Γ_1 e Γ_4 cores em H_1 e H_4 , respectivamente, se a quantidade de cores que sobram em H_1 é suficiente para colorir H_3 , então H_3 é colorido com cores de H_1 . Mais formalmente, veja que uma ordem sobre $V(P_5^*)$ que comece por $\theta_1, \theta_4, \theta_3$ e θ_2 , nessa ordem, leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2$ cores e toda cor utilizada em H_3 já havia sido utilizada para colorir algum vértice de H_1 .

Por outro lado, não existe coloração gulosa com mais que $\Gamma_1 + \Gamma_2$ cores sob essas suposições. Para comprovar esse fato, suponha o contrário. Suponha que existe uma ordem que leva o algoritmo guloso a produzir tal coloração \mathcal{S}' para P_5^* com mais que $\Gamma_1 + \Gamma_2$ cores. Pela Proposição 5.3 e pela observação que todas as cores ocorrem em H_1, H_2 e H_3 , existe pelo menos uma cor S_i que ocorre em H_3 e não ocorre em H_1 e em H_2 .

Pela hipótese sabemos, que $\Gamma_3 + \Gamma_4 \leq \Gamma_1$, ou seja, \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + 1$ cores. Como todas as cores de \mathcal{S}' ocorrem em H_1, H_2 e H_3 , existe pelo menos uma cor S_j que ocorre em H_1 e não ocorre em H_2, H_3 e H_4 .

Isso é uma contradição, pois os vértices de S_i em H_3 não possuem vizinhos com cor S_j e os vértices de S_j em H_1 não possuem vizinhos com a cor S_i . Em outras palavras, nem $S_i < S_j$ e nem $S_j < S_i$.

- Senão $\Gamma_3 > s_1$, então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_1$:

Intuitivamente, neste caso, se a sobra de H_1 não é suficiente para colorir H_3 , então s_1 cores de H_1 ocorrem em H_3 . Formalmente, veja que uma ordem sobre $V(P_5^*)$ que comece por $\theta_1, \theta_4, \theta_3$ e θ_2 , nessa ordem, leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_1$ cores.

Para mostrar que $\Gamma(P_5^*) \leq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_1$, o mesmo raciocínio do caso anterior pode ser aplicado. Suponha, por absurdo, que existe uma coloração gulosa \mathcal{S}' para P_5^* com mais que $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_1$ cores. Observe que existem pelo menos $\Gamma_3 - s_1 + 1$ cores que ocorrem em H_3 e não ocorrem em H_1 e H_2 .

Por hipótese, \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_1 = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + 1$ cores. Seja S_i uma dessas cores. Logo, existe uma cor S_j que ocorre em H_1 e não ocorre em H_2, H_3 e H_4 . A existência das cores S_i e S_j implicam em uma contradição por um raciocínio análogo ao caso precedente.

4. Se existe um vértice $v \in H_4$ colorido com a maior cor S_k , então

$$\Gamma(P_5^*) = \begin{cases} \Gamma_5 + \Gamma_4 + \Gamma_3 & , \text{ se } \Gamma_5 \leq \Gamma_2; \\ \Gamma_5 + \Gamma_4 & , \text{ se } \Gamma_5 > \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_3 \leq s_5; \\ \Gamma_5 + \Gamma_4 + \Gamma_3 - s_5 & , \text{ se } \Gamma_5 > \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_3 > s_5; \end{cases}$$

sendo $s_5 = \Gamma_5 - \Gamma_2$.

A demonstração deste caso é análoga à anterior.

5. Se existe um vértice $v \in H_3$ colorido com a maior cor S_k , então

$$\Gamma(P_5^*) = \begin{cases} \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 & , \text{ se } \Gamma_1 \geq \Gamma_4 \text{ ou } \Gamma_5 \geq \Gamma_2; \\ \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - s_4 & , \text{ se } \Gamma_1 < \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_5 < \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_2 - s_4 \geq \Gamma_5; \\ \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - s_2 & , \text{ se } \Gamma_1 < \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_5 < \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_2 - s_4 < \Gamma_5; \end{cases}$$

sendo $s_2 = \Gamma_2 - \Gamma_5$ e $s_4 = \Gamma_4 - \Gamma_1$.

Novamente, podemos concluir facilmente que $\Gamma(P_5^*) \leq \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, pela Proposição 5.3 e pelas hipóteses que $v \in H_3$ e $v \in S_k$.

(a) Se $\Gamma_1 \geq \Gamma_4$ ou $\Gamma_5 \geq \Gamma_2$, então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$:

Em ambos os casos, observe que existe uma ordem para os vértices de P_5^* que leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração com pelo menos $\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ cores. Se $\Gamma_1 \geq \Gamma_4$, basta tomar uma ordem qualquer que comece por $\theta_1, \theta_4, \theta_3$ e θ_2 . No caso de $\Gamma_5 \geq \Gamma_2$, basta tomar uma ordem que comece por $\theta_5, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 .

(b) Senão $\Gamma_1 < \Gamma_4$ e $\Gamma_5 < \Gamma_2$:

Como $\Gamma_1 < \Gamma_4$, uma ordem que comece por $\theta_1, \theta_4, \theta_3$ e θ_2 , induz o algoritmo guloso a gerar uma coloração com pelo menos $\Gamma_4 + \Gamma_3 + \Gamma_2 - s_4$ cores. Usando a hipótese que $\Gamma_5 < \Gamma_2$, uma ordem que comece por $\theta_5, \theta_2, \theta_3$ e θ_4 , nessa ordem, induz o algoritmo guloso a produzir uma coloração com pelo menos $\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - s_2$. Precisamos, então, provar que esses limites inferiores também são superiores em casos bem determinados.

Observe que existe sobra de cores tanto em H_4 que pode ser reutilizada em H_2 , como existe sobra de cores de H_2 que pode ser reutilizada em H_4 . Façamos a demonstração dos seguintes subcasos:

- Se $\Gamma_2 - s_4 \geq \Gamma_5$, então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - s_4$:

Para mostrarmos tal igualdade, precisamos apenas verificar que $\Gamma(P_5^*) \leq \Gamma_4 + \Gamma_3 + \Gamma_2 - s_4$, pois já sabemos que $\Gamma(P_5^*)$ é pelo menos esse valor. Suponhamos

por absurdo que existe uma coloração gulosa \mathcal{S}' com mais que $\Gamma_4 + \Gamma_3 + \Gamma_2 - s_4$ cores para P_5^* .

Pela Proposição 5.3 e pela hipótese que $v \in H_3$, existem pelo menos $\Gamma_2 - s_4 + 1$ cores que ocorrem em H_2 e não ocorrem em H_3 e nem ocorrem em H_4 . Como, por hipótese, $\Gamma_5 < \Gamma_2 - s_4 + 1$, existe pelo menos uma cor S_i em H_2 que não ocorre em H_3, H_4 e H_5 .

Por outro lado, $\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - s_4 + 1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + 1$, ou seja, existe uma cor S_j em H_4 que não ocorre em H_1, H_2 e H_3 .

Isso é um absurdo, pois os vértices de S_i em H_2 não possuem vizinhos com a cor S_j , nem os vértices de S_j em H_4 possuem vizinhos com a cor S_i .

- Se $\Gamma_2 - s_4 < \Gamma_5$, então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - s_2$:

Para demonstrarmos esse fato, usamos novamente a simetria do P_5^* . Veja que na análise do caso anterior, consideramos a hipótese de usar a sobra das cores de H_4 em H_2 e chegamos a conclusão que se a quantidade de cores de H_2 diferentes da sobra de H_4 for maior ou igual a Γ_5 , sabemos como calcular o número guloso do P_5^* .

Usando o mesmo raciocínio, podemos concluir o seguinte fato de forma análoga: Se $\Gamma_4 - s_2 < \Gamma_1$, então $\Gamma(P_5^*) = \Gamma_4 + \Gamma_3 + \Gamma_2 - s_2$. Sob essa hipótese, usando a simetria, chegamos exatamente à conclusão que desejamos, mas sob uma hipótese aparentemente diferente. Entretanto, como podemos verificar que $\Gamma_4 - s_2 < \Gamma_1$ se, e somente se, $\Gamma_2 - s_4 < \Gamma_5$, a demonstração do caso complementar é exatamente a demonstração do caso simétrico ao anterior.

De posse dos valores de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ podemos determinar o maior valor dentre todos os casos acima descritos em tempo constante, pois a quantidade de casos é constante e o cálculo em cada um também pode ser feito em tempo constante. Tal valor é exatamente $\Gamma(P_5^*)$, pois estamos analisando todas as possibilidades de posicionamento de um vértice com a maior cor e, conforme demonstrado em cada caso, não pode existir coloração gulosa com uma quantidade maior de cores. \square

Proposição 5.5 *Dados os números gulosos de H_1, \dots, H_5 , o número guloso de um $\bar{P}_5^* = (H_1 \cup \dots \cup H_5, E)$ pode ser calculado em tempo constante.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ é uma coloração gulosa para \bar{P}_5^* com $\Gamma(\bar{P}_5^*)$ cores. De forma análoga à Proposição 5.4, façamos novamente uma análise por casos:

1. Se existe um vértice $v \in H_1$ colorido com a maior cor S_k , então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$.

A demonstração desse caso é simples, pois qualquer ordenação para $V(\bar{P}_5^*)$ que contenha subordens θ_1 , θ_2 e θ_3 induz o algoritmo guloso a produzir uma coloração com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, visto que as cores não se repetem entre H_1 , H_2 e H_3 . Também não se pode utilizar mais do que essa quantidade de cores, pela Proposição 5.3 e pela hipótese que $v \in H_1$.

2. Se existe um vértice $v \in H_2$ colorido com a maior cor S_k , então:

$$\Gamma(\bar{P}_5^*) = \begin{cases} \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 & , \text{ se } \Gamma_4 \leq \Gamma_3 \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 & , \text{ se } \Gamma_4 > \Gamma_3 \text{ e } \Gamma_1 \leq \Gamma_5 \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_1 & , \text{ se } \Gamma_4 > \Gamma_3 \text{ e } \Gamma_1 > \Gamma_5 \text{ e } \Gamma_4 - s_1 \geq \Gamma_3 \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_4 & , \text{ se } \Gamma_4 > \Gamma_3 \text{ e } \Gamma_1 > \Gamma_5 \text{ e } \Gamma_4 - s_1 < \Gamma_3 \end{cases}$$

sendo $s_1 = \Gamma_1 - \Gamma_5$ e $s_4 = \Gamma_4 - \Gamma_3$.

- Se $\Gamma_4 \leq \Gamma_3$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$:

Veja que $\Gamma(\bar{P}_5^*) \geq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, pois uma ordem sobre $V(\bar{P}_5^*)$ que comece por θ_1 , θ_2 e θ_3 induz o algoritmo guloso a utilizar pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ cores.

Por outro lado, suponha, por absurdo, que existe uma coloração gulosa \mathcal{S}' com $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + 1$ para \bar{P}_5^* sob as hipóteses que $v \in H_2$ e $\Gamma_4 \leq \Gamma_3$. Pela Proposição 5.3 e pelas hipóteses, existe uma cor S_i que só possui vértices em H_4 . Usando a hipótese que $\Gamma_4 \leq \Gamma_3$, observamos que \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 + 1$ cores. Logo, existe uma cor S_j que só possui vértices de H_3 . Isso é um absurdo, pois nenhum vértice de H_4 colorido com a cor S_i é adjacente a nenhum vértice de H_3 colorido com a cor S_j , ou seja, S_i não pode ser nem maior, nem menor, que S_j .

- Senão $\Gamma_4 > \Gamma_3$:

- Se $\Gamma_5 \geq \Gamma_1$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4$:

Usando a hipótese que $\Gamma_5 \geq \Gamma_1$, podemos concluir facilmente que $\Gamma(\bar{P}_5^*) \geq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4$, pois uma ordem sobre os vértices de \bar{P}_5^* que comece por θ_5 , θ_1 , θ_4 e θ_2 , nessa ordem, induz o algoritmo guloso a usar pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4$ cores.

Para mostrarmos que esse limite também é superior, suponha, por absurdo, que existe uma coloração gulosa \mathcal{S}' para \bar{P}_5^* , pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 + 1$ cores. Pela Proposição 5.3 e pela hipótese que $v \in H_2$, concluímos que existe uma cor S_i que só ocorre em H_3 (observe que se S_i ocorre em H_3 , não pode ocorrer em H_5).

Usando a hipótese que $\Gamma_4 > \Gamma_3$, uma vez que \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 + 1$ cores, sabemos que \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + 2$ cores. Dessa forma, existem pelo menos duas cores S_j^1 e S_j^2 que só ocorrem em H_4 .

Isso é um absurdo, pois uma delas é superior a S_i sem possuir vértices adjacentes coloridos com a cor S_i .

– Se $\Gamma_5 < \Gamma_1$:

* Se $\Gamma_4 - s_1 \geq \Gamma_3$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_1$:

Usando as hipóteses que $\Gamma_4 > \Gamma_3$ e $\Gamma_5 < \Gamma_1$, podemos facilmente verificar que a ordem sobre $V(\bar{P}_5^*)$ começada por $\theta_1, \theta_5, \theta_4$ e θ_2 , nessa ordem, quando passada ao algoritmo guloso, o leva a produzir uma coloração com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_1$ cores.

Para mostrarmos que não existe coloração gulosa com uma quantidade maior de cores, suponha o contrário. Seja \mathcal{S}' uma coloração para \bar{P}_5^* com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_1 + 1$ cores.

Como $v \in H_2$, usamos a Proposição 5.3 para verificar que existem pelo menos $\Gamma_4 - s_1 + 1$ cores que só ocorrem em H_3 e H_4 . Pela hipótese que $\Gamma_4 - s_1 \geq \Gamma_3$, concluímos que pelo menos uma cor S_i dessas $\Gamma_4 - s_1 + 1$ cores só ocorre H_4 .

Sabendo que $s_1 = \Gamma_1 - \Gamma_5$, verificamos que \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_1 + 1 = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + 1$ cores. Novamente, usamos a hipótese que $v \in H_2$ e a Proposição 5.3 para concluir que existe pelo menos uma cor S_j que só pode ocorrer em H_1 e H_3 .

Isso é um absurdo, pois nem $S_i < S_j$, nem $S_j < S_i$.

* Se $\Gamma_4 - s_1 < \Gamma_3$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_4$:

Como $\Gamma_4 - s_1 < \Gamma_3$ se, e somente se, $\Gamma_1 - s_4 > \Gamma_5$, para simplificar a demonstração desse caso, demonstraremos que se $\Gamma_1 - s_4 > \Gamma_5$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_4$.

Para mostrarmos que $\Gamma(\bar{P}_5^*) \geq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_4$, apenas é necessário observar que a ordem sobre $V(\bar{P}_5^*)$ induzida por $\theta_4, \theta_3, \theta_1$ e θ_2 , nessa ordem, leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_4$ cores.

Suponha, por absurdo, que existe uma coloração gulosa \mathcal{S}' para \bar{P}_5^* com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_4 + 1$ cores. Pela hipótese que $v \in H_2$ e pela Proposição 3.3, concluímos que existem pelo menos $\Gamma_4 - s_4 + 1$ cores que só podem ocorrer em H_1, H_3 e H_5 . Usando a hipótese que $\Gamma_1 - s_4 > \Gamma_5$,

verificamos que existe pelo menos uma cor S_i que só pode ocorrer em H_1 e H_3 .

Sabendo que a coloração \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 - s_4 + 1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + 1$ cores, pela hipótese que $v \in H_2$ e pela Proposição 5.3, observamos que existe uma cor S_j que só ocorre em H_4 .

Isso é um absurdo, pelo mesmo argumento do item anterior.

3. Se existe um vértice $v \in H_3$ colorido com a maior cor S_k , então

$$\Gamma(\bar{P}_5^*) = \begin{cases} \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_2 & , \text{ se } \Gamma_5 \leq \Gamma_2 \\ \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5 & , \text{ se } \Gamma_5 > \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_1 \leq \Gamma_4 \\ \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5 - s_1 & , \text{ se } \Gamma_5 > \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_1 > \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_5 - s_1 \geq \Gamma_2 \\ \Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5 - s_5 & , \text{ se } \Gamma_5 > \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_1 > \Gamma_4 \text{ e } \Gamma_5 - s_1 < \Gamma_2 \end{cases}$$

sendo $s_1 = \Gamma_1 - \Gamma_4$ e $s_5 = \Gamma_5 - \Gamma_2$.

A demonstração desse caso é análoga a do caso anterior.

4. Se existe um vértice $v \in H_4$ colorido com a maior cor S_k , então

$$\Gamma(\bar{P}_5^*) = \begin{cases} \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_5 & , \text{ se } \Gamma_1 \geq \Gamma_5 \\ \Gamma_4 + \Gamma_5 & , \text{ se } \Gamma_1 < \Gamma_5 \text{ e } s_5 \geq \Gamma_2 \\ \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_2 - s_5 & , \text{ se } \Gamma_1 < \Gamma_5 \text{ e } s_5 < \Gamma_2 \end{cases}$$

sendo $s_5 = \Gamma_5 - \Gamma_1$.

Novamente, sabemos que o limite superior para o número guloso nesse caso é $\Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_5$, pela Proposição 5.3.

- Se $\Gamma_1 \geq \Gamma_5$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_5$:

Nesse caso, é simples a verificação que uma ordem sobre $V(\bar{P}_5^*)$ iniciada por θ_1 , θ_5 , θ_2 e θ_4 induz uma coloração gulosa para \bar{P}_5^* que atinge o limite superior de cores.

- Senão $\Gamma_1 < \Gamma_5$:

- Se $s_5 \geq \Gamma_2$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_4 + \Gamma_5$:

Utilizando a mesma ordem do item anterior sobre $V(\bar{P}_5^*)$, observe que serão utilizadas pelo menos $\Gamma_4 + \Gamma_5$ cores em uma execução do algoritmo guloso.

Para mostrarmos que não existe coloração com uma quantidade maior de cores, suponha, por absurdo, uma coloração gulosa \mathcal{S}' para \bar{P}_5^* com pelo menos $\Gamma_4 + \Gamma_5 + 1$ cores. Pela hipótese que $v \in H_4$ e pela Proposição 5.3, verificamos que existe uma cor S_i que ocorre em H_2 e não ocorre nem em H_4 e nem em H_5 .

Usando a hipótese que $s_5 \geq \Gamma_2$, podemos concluir que \mathcal{S}' possui pelo menos $\Gamma_4 + \Gamma_5 + 1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 + 1$ cores. Novamente, pela hipótese que $v \in H_4$ e pela Proposição 5.3, observamos que pelo menos $\Gamma_1 + 1$ cores ocorrem em H_5 e não ocorrem em H_2 e H_4 . Pela Proposição 5.3, pelo menos uma cor S_j dessas $\Gamma_1 + 1$ cores só ocorre em H_5 .

Isso é um absurdo, pois nem $S_i < S_j$, nem $S_j < S_i$.

– Senão $s_5 < \Gamma_2$, então $\Gamma(\bar{P}_5^*) = \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_2 - s_5$:

Utilizando a mesma ordem dos itens anteriores, pode-se observar que o limite inferior pode ser facilmente determinado, pois tal ordem induz uma coloração gulosa para \bar{P}_5^* com pelo menos $\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_2 - s_5$ cores.

Para verificarmos o limite superior, suponha, por absurdo, que existe uma coloração gulosa nesse caso com $\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_2 - s_5 + 1$ cores.

Usando a hipótese que $v \in H_4$ e a Proposição 5.3, concluímos existem pelo menos $\Gamma_2 - s_5 + 1$ cores que só ocorrem em H_2 , uma delas é S_i .

Como $\Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_2 - s_5 + 1 = \Gamma_4 + \Gamma_2 + \Gamma_1 + 1$, observamos que existe uma cor S_j que só ocorre em H_5 , pela hipótese que $v \in H_4$ e pela Proposição 5.3.

Isso é um absurdo, aplicando a S_i e S_j o mesmo argumento do caso anterior.

5. Se existe um vértice $v \in H_5$ colorido com a maior cor S_k , então

$$\Gamma(\bar{P}_5^*) = \begin{cases} \Gamma_3 + \Gamma_5 + \Gamma_4 & , \text{ se } \Gamma_1 \geq \Gamma_4 \\ \Gamma_5 + \Gamma_4 & , \text{ se } \Gamma_1 < \Gamma_4 \text{ e } s_4 \geq \Gamma_3 \\ \Gamma_5 + \Gamma_4 + \Gamma_3 - s_4 & , \text{ se } \Gamma_1 < \Gamma_4 \text{ e } s_4 < \Gamma_3 \end{cases}$$

sendo $s_4 = \Gamma_4 - \Gamma_1$.

A demonstração desse último caso é análoga a do caso anterior.

Como na proposição anterior, a determinação do número guloso de um \bar{P}_5^* a partir de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_5$ pode ser feita em tempo constante, pois a quantidade de casos é constante e o cálculo em cada um deles pode ser feito em tempo constante. \square

Proposição 5.6 *Dados os números gulosos de H_1, \dots, H_5 , o número guloso de um $C_5^* = (H_1 \cup \dots \cup H_5, E)$ pode ser calculado em tempo constante.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ é uma coloração gulosa para C_5^* com $\Gamma(C_5^*)$ cores.

Uma vez analisado o caso de existir um vértice com a maior cor em H_1 , todos os outros casos são resolvidos pela simetria. Demonstramos o seguinte fato:

Seja $v \in H_1$ colorido com a maior cor S_k . Então:

$$\Gamma(C_5^*) = \begin{cases} \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 & , \text{ se } \Gamma_5 \geq \Gamma_2 \text{ ou } \Gamma_4 \geq \Gamma_3; \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_3 & , \text{ se } \Gamma_5 < \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_4 < \Gamma_3 \text{ e } \Gamma_2 - s_3 \geq \Gamma_5; \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_2 & , \text{ se } \Gamma_5 < \Gamma_2 \text{ e } \Gamma_4 < \Gamma_3 \text{ e } \Gamma_2 - s_3 < \Gamma_5; \end{cases}$$

sendo $s_2 = \Gamma_2 - \Gamma_5$ e $s_3 = \Gamma_3 - \Gamma_4$.

O limite superior dado pela Proposição 5.3 e pela hipótese que $v \in H_1$ é válido, ou seja, sabemos que $\Gamma(C_5^*) \leq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$.

- Se $\Gamma_5 \geq \Gamma_2$ ou $\Gamma_4 \geq \Gamma_3$, então $\Gamma(C_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$:

A demonstração desse caso é simples, pois se $\Gamma_5 \geq \Gamma_2$ uma ordem sobre $V(C_5^*)$ iniciada por $\theta_5, \theta_2, \theta_3$ e θ_1 , nessa ordem, leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração para C_5^* com exatamente $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ cores e o limite superior é atingido.

Caso $\Gamma_4 \geq \Gamma_3$, uma ordem sobre $V(C_5^*)$ iniciada por $\theta_4, \theta_3, \theta_2$ e θ_1 , nessa ordem, leva o algoritmo guloso também a produzir uma coloração para C_5^* com $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ cores e, novamente, atingimos o limite superior.

- Senão $\Gamma_5 < \Gamma_2$ e $\Gamma_4 < \Gamma_3$:

Existe sobra de cores de H_3 , com relação a H_4 , que pode ser reutilizada em H_2 e de H_2 , com relação a H_5 , que pode ser reutilizada em H_3 , pois $\Gamma_5 < \Gamma_2$ e $\Gamma_4 < \Gamma_3$. Para resolver o número guloso desse caso, vamos analisar o seguintes subcasos:

- Se $\Gamma_2 - s_3 \geq \Gamma_5$, então $\Gamma(C_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_3$:

Para mostrarmos que $\Gamma(C_5^*) \geq \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_3$, veja que uma ordem sobre $V(C_5^*)$ iniciada por $\theta_3, \theta_4, \theta_2$ e θ_1 , nessa ordem, induz o algoritmo guloso a produzir uma coloração para C_5^* com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_3$ cores.

Para demonstrarmos o limite superior por redução ao absurdo, suponha que existe uma coloração gulosa \mathcal{S}' para C_5^* com pelo menos $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_3 + 1$ cores.

Pela hipótese que $v \in H_1$ e pela Proposição 5.3, concluímos que existem pelo menos $\Gamma_2 - s_3 + 1$ cores que ocorrem em H_2 e não ocorrem em H_1 e H_3 . Como $\Gamma_2 - s_3 \geq \Gamma_5$, pelo menos uma cor S_i dessas $\Gamma_2 - s_3 + 1$ cores, também não ocorre em H_5 , pela Proposição 5.3. Logo, S_i ocorre apenas em H_2 .

Sabendo que $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_3 + 1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4 + 1$, vemos que pelo menos $\Gamma_4 + 1$ cores ocorrem em H_3 e não ocorrem em H_1 e H_2 e vemos também que, pela Proposição 5.3, existe pelo menos uma cor S_j que só ocorre em H_3 .

Isso é um absurdo, pois nem $S_i < S_j$ e nem $S_j < S_i$.

– Se $\Gamma_2 - s_3 < \Gamma_5$, então $\Gamma(C_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_2$:

Como $\Gamma_2 - s_3 < \Gamma_5$ se, e somente se, $\Gamma_3 - s_2 > \Gamma_4$ e como se $\Gamma_3 - s_2 > \Gamma_4$ então $\Gamma_3 - s_2 \geq \Gamma_4$, a demonstração desse caso é exatamente o caso simétrico ao anterior, pois podemos demonstrar de forma análoga ao caso anterior que se $\Gamma_3 - s_2 \geq \Gamma_4$, então $\Gamma(C_5^*) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 - s_2$.

De forma análoga às proposições anteriores, o número guloso de um C_5^* pode ser calculado em tempo constante, pela análise dos casos acima estudados. \square

5.2.2 Split

Sabemos que um grafo é *split* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto estável e uma clique, mas observe que, dado um grafo *split* $G = (S \cup K, E)$, seu conjunto de vértices pode ser particionado em 3 conjuntos disjuntos $S(G)$, $K(G)$ e $R(G)$ tais que todo vértice $s \in S$ que não é adjacente a pelo menos um vértice de K pertence a $S(G) \subseteq S$, $K(G)$ é formado pela vizinhança dos vértices em $S(G)$ e $R(G) = V(G) \setminus S(G) \cup K(G)$. Desse modo, veja que $R(G)$ é um módulo de G e que se G é primo, então $|R(G)| \leq 1$. Observe também que podem existir módulos em $S(G)$ e em $K(G)$ que são conjuntos estáveis e cliques, respectivamente.

Proposição 5.7 *Seja v um nó de vizinhança de uma árvore de decomposição modular $T(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ tal que $G(v)$ é isomorfo a um grafo *split* $H = (S(H) \cup K(H) \cup R(H), E)$. Se os fatores de v representados em $S(H)$ e $K(H)$ são conjuntos estáveis e cliques, respectivamente, e o número guloso de $R(H)$ é conhecido, então, o número guloso de $M(v)$ pode ser calculado em tempo linear.*

Demonstração: Uma vez que não sabemos em princípio quais os filhos de v que pertencem a $S(H)$, a $K(H)$ e a $R(H)$, vale ressaltar que o reconhecimento de H pode ser feito em $\mathcal{O}(V(H))$ [29].

Como os fatores em $S(H)$ e $K(H)$ são conjuntos estáveis e cliques, respectivamente, denotamos por $S^*(H)$ ($K^*(H)$) o subgrafo de $M(v)$ induzido pela união de todos os fatores de $S(H)$ (resp., $K(H)$). Observe que o subgrafo de $M(v)$ induzido por $V(S^*(H)) \cup V(K^*(H))$ é um grafo

split e que os vértices de $R(H)$ são adjacentes a todos os vértices de $K^*(H)$ e a nenhum vértice de $S^*(H)$.

Dada essa notação, verificamos que em qualquer ordenação θ sobre $V(M(v))$, o algoritmo guloso nunca atribuirá a vértices de $S^*(H)$ cores S_i e S_j , $S_i \neq S_j$, que só contêm vértices de $S^*(H)$. Isso é fato porque nenhum vértice de S_i seria adjacente a nenhum vértice de S_j , uma vez que $S^*(H)$ é um conjunto independente.

Como no máximo uma cor que ocorre em vértices de $S^*(H)$ pode não ocorrer em $K^*(H) \cup R(H)$, caso $R(H)$ seja vazio, pelo argumento anterior sabemos que $\Gamma(M(v)) \leq |K^*(H)| + 1$. Entretanto, veja que uma ordenação sobre $M(v)$ na qual os vértices de $S^*(H)$ vêm todos antes dos vértices de $K^*(H)$ leva o algoritmo guloso a produzir uma coloração com $|K^*(H)| + 1$ cores, visto que $K(H)$ é a vizinhança de $S(H)$.

Se $R(H)$ não for vazio, em qualquer coloração gulosa de $M(v)$ existe pelo menos uma cor S_j em $R(H)$ diferente das cores usadas em $K^*(H)$. Conseqüentemente, $\Gamma(M(v)) = |K^*(H)| + \Gamma(R(H))$. Isto ocorre porque nenhum vértice de $S^*(H)$ é adjacente a nenhum vértice de $R(H)$, ou seja, não pode existir nenhuma cor S_i que só contém vértices de $S^*(H)$, pois os vértices em S_i não teriam nenhum vizinho em S_j .

Desse modo, calculamos $\Gamma(M(v))$ em tempo linear de acordo com a seguinte equação:

$$\Gamma(M(v)) = \begin{cases} |K^*(H)| + \Gamma(R(H)) & , \text{ se } R(H) \neq \emptyset \\ |K^*(H)| + 1 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

□

5.2.3 Quase-aranhas

Outros grafos quocientes $G(v)$ relativos a nós de vizinhança v que aparecem com certa frequência na árvore de decomposição modular de muitas classes de grafos são isomorfos a aranhas ou quase-aranhas.

Definição 5.2 *Uma aranha é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em 3 conjuntos disjuntos S , K e R tais que:*

- S é um conjunto estável;
- K é uma clique;
- Todo vértice de R se liga a todo vértice de K e a nenhum vértice de S ;

• Existe uma bijeção $f : S \rightarrow K$ tal que, para todo $s \in S$:

1. ou $N(s) = f(s)$ (aranha magra);
2. ou $N(s) = K - f(s)$ (aranha gorda).

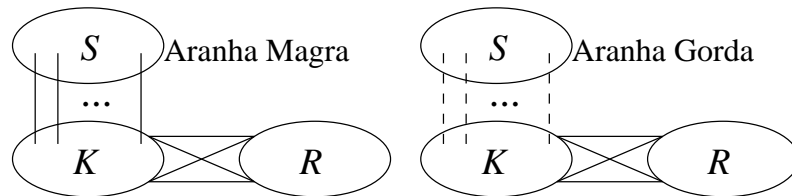


Figura 5.2: Aranhas¹.

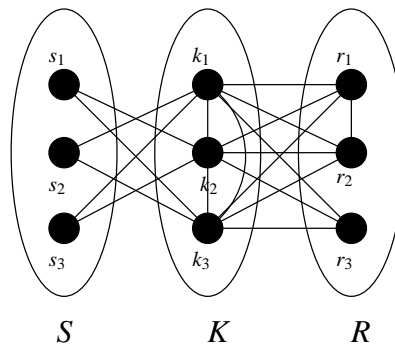


Figura 5.3: Exemplo de aranha gorda.

Se a aranha $G = (S \cup K \cup R, E)$ é um grafo primo, ou seja, se $|R| = 1$, então é G chamada de aranha prima. Em uma aranha prima, se $R \neq \emptyset$, então o único vértice em R é chamado de cabeça da aranha.

Definição 5.3 Denote por quase-aranha uma aranha $G = (S \cup K \cup R, E)$ tal que exatamente um vértice $u \in S \cup K$ foi substituído por um módulo com exatamente dois vértices.

Proposição 5.8 Seja v um nó de vizinhança de uma árvore de decomposição modular $T(G)$ de um grafo $G = (V, E)$ tal que $G[M(v)]$ é isomorfo a uma quase-aranha $A = (S \cup K \cup R, E)$. Então, o número guloso de $G[M(v)]$ pode ser calculado em tempo linear.

Demonstração: Se $M(v)$ é isomorfo a uma quase-aranha, então seus fatores são grafos triviais, com exceção ao fator que representa o módulo induzido por R e, possivelmente, a um outro fator em $S \cup K$ que possui exatamente dois vértices x e w .

¹As arestas tracejadas representam os pares de vértices que não são vizinhos entre S e K .

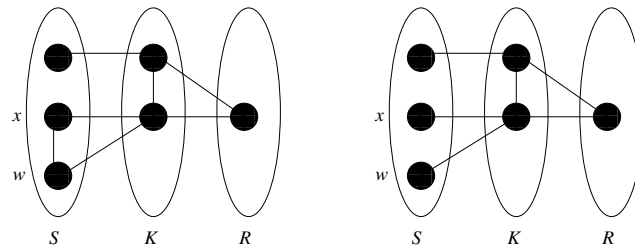


Figura 5.4: Quase-aranhas.

Como o grafo quociente $G(v)$ de $G[M(v)]$ é um grafo *split*, se não existe tal fator com dois vértices em A , ou se existir tal fator e $x, w \in S$ e $(x, w) \notin E(A)$, ou se existir tal fator e $x, w \in K$ e $(x, w) \in E(A)$, o número guloso de $G[M(v)]$ pode ser calculado segundo a Proposição 5.7.

Nos resta então analisar os seguintes casos:

- Caso 1: Existem vértices gêmeos adjacentes x e w em S .

Afirmamos que, em qualquer coloração gulosa de A , não existem duas cores S_i e S_j que só contém vértices de S .

Para comprovar essa afirmação, suponha o contrário. Pelos argumentos apresentados na demonstração da Proposição 5.7, os únicos vértices que podem ter recebido essas cores são x e w . Veja que todos os vértices de S ou receberam uma cor de um não vizinho seu em K ou em R , ou receberam uma dessas cores, digamos S_i .

Sem perda de generalidade, suponha que $x \in S_i$ e $w \in S_j$. Como x e w são gêmeos, existe pelo menos um vértice $k \in K$ que não é adjacente nem a x nem a w . Entretanto, veja que k não possui nenhum vizinho de cor S_j , o que é um absurdo.

Logo, como no máximo uma cor possui apenas vértices de S , o número guloso pode ser calculado em tempo linear usando a análise similar àquela feita na Proposição 5.7 que considera se o conjunto R é vazio ou não.

- Caso 2: Existem vértices gêmeos não adjacentes x e w em K .

Afirmamos que não existem duas cores S_i e S_j , $S_i \neq S_j$, tais que $x \in S_i$ e $w \in S_j$. Esse fato é trivialmente verificável, pois, caso contrário, como w não é vizinho de x e como a vizinhança de w é igual a de x , w não possuiria um vizinho com a cor S_i .

Logo, utilizando este argumento, podemos novamente calcular o número guloso de acordo com a Proposição 5.7 em tempo linear.

□

6 *Resultados Gerais em Coloração Ponderada*

Neste capítulo, apresentamos resultados obtidos sobre Coloração Ponderada que são válidos para quaisquer grafos. Na primeira seção, apresentamos uma caracterização dos grafos que possuem número cromático ponderado pelo menos k , para uma constante k . Tal caracterização pode ser útil para gerar limites inferiores para implementações da formulação para o problema de Coloração Ponderada apresentada na seção seguinte. Acreditamos que essa seja a primeira formulação proposta para esse problema.

As última seção apresenta resultados sobre este problema que são úteis para tentar resolvê-los em classes de grafos cuja decomposição modular seja bem determinada. Exibimos um estudo sobre a dificuldade de determinar o número cromático ponderado em nós paralelos, além de apresentarmos algoritmos polinomiais para calcular esse parâmetro em nós série e em alguns nós de vizinhança.

6.1 Teorema de Hajós

A caracterização dos grafos k -cromáticos, ou seja, que admitem uma k -coloração própria, vem sendo um problema desafiador há muitos anos. Uma das abordagens possíveis para caracterizar esses grafos é entender a sua construção. Em 1961, Hajós [27] encontrou uma caracterização para os grafos que possuem número cromático pelo menos k : eles devem ser k -construtíveis. A definição dos grafos k -construtíveis segue:

Definição 6.1 *O conjunto dos grafos k -construtíveis é definido recursivamente como segue:*

1. *O grafo completo de ordem k , K_k , é k -construtível.*
2. *Soma de Hajós: Dados dois grafos disjuntos G_1 e G_2 e duas arestas (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , pertencendo respectivamente a G_1 e G_2 , o grafo G obtido a partir de $G_1 \cup G_2$ pela*

remoção de (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , identificação de a_1 com a_2 , gerando um vértice a_1a_2 em $V(G)$ e adicionando uma aresta entre b_1 e b_2 , também é k -construtível (veja Figura 6.1).

3. **Identificação de vértices:** Dado um grafo $G = (V, E)$ k -construtível, o grafo $H = (V', E')$, obtido pela identificação de dois vértices não-adjacentes de G , a e b , e remoção de arestas múltiplas, caso elas apareçam após a identificação, gerando um vértice ab em V' , também é k -construtível (veja Figura 6.1).

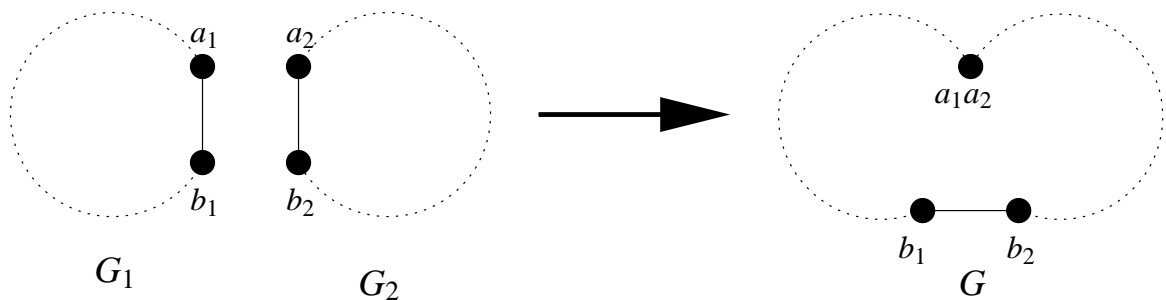


Figura 6.1: Soma de Hajós.

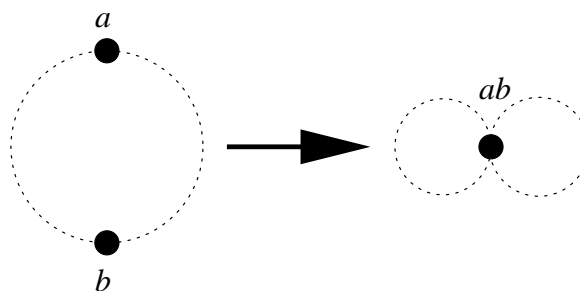


Figura 6.2: Identificação de vértices.

Hajós demonstrou que:

Teorema 6.1 (Teorema de Hajós [27]) *Seja $G = (V, E)$. Então, $\chi(G) \geq k$ se, e somente se, G possui um subgrafo H tal que H é k -construtível.*

Existem resultados na literatura sobre extensões do Teorema de Hajós para diferentes tipos de coloração. Gravier [21] provou uma extensão do Teorema de Hajós para Coloração por Listas. Král [41] forneceu uma prova simplificada do resultado de Gravier. Zhu [54] encontrou uma extensão deste teorema para o número cromático circular. Mohar [44] demonstrou duas novas versões do referido teorema para o número cromático circular e uma extensão do Teorema de Hajós para o problema de atribuição de canais, i.e., uma coloração de grafos ponderados em

arestas. A seguir, apresentaremos uma extensão do Teorema de Hajós para Coloração Ponderada que obtivemos. Para tanto, a classe dos grafos k -construtíveis precisou ser redefinida, além de necessitarmos de algumas outras definições:

Notação 6.1 Denote o conjunto de grafos completos de ordem n e ponderados nos vértices $G = (V, E)$, tais que $\sum_{v \in V(G)} w(v) = k$, por \mathcal{K}_n^k .

Definição 6.2 Dado um grafo $G = (V, E)$, uma função de pesos nos vértices $w : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ e uma coloração própria c de G , chamamos de representante da cor i em c , $rep_c(i)$, um e somente um, $v \in V$ tal que $c(v) = i$ e $w(v) \geq w(x), \forall x \in \{w \in V \mid c(w) = i\}$.

Definição 6.3 Dados os grafos ponderados nos vértices $G = (V, E, w)$, $H = (V', E', w')$, dizemos que $H \subseteq G$ (H é subgrafo ponderado de G) se $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ e, $\forall v \in V'$, temos $w'(v) \leq w(v)$.

Definição 6.4 O conjunto dos grafos k -construtíveis é redefinido recursivamente como segue:

1. Os grafos $\mathcal{K}_l^k, \forall l \in \mathbb{N}$, são k -construtíveis.
2. **Soma de Hajós Ponderada:** Dados dois grafos disjuntos G_1 e G_2 e duas arestas (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , pertencendo respectivamente a G_1 e G_2 , o grafo G obtido a partir de $G_1 \cup G_2$ pela remoção de (a_1, b_1) e (a_2, b_2) , identificação de a_1 com a_2 , gerando um vértice a_1a_2 em $V(G)$, tal que $w(a_1a_2) = \max\{w(a_1), w(a_2)\}$ e adicionando uma aresta entre b_1 e b_2 , também é k -construtível.
3. **Identificação de vértices ponderados:** Dado um grafo $G = (V, E)$ k -construtível, o grafo $H = (V', E')$, obtido pela identificação de dois vértices não-adjacentes de G , a e b , e remoção de arestas múltiplas, caso elas apareçam após a identificação, gerando um vértice ab em V' , tal que $w(ab) = \max\{w(a), w(b)\}$, também é k -construtível.

Teorema 6.2 (Teorema de Hajós para Coloração Ponderada [1]) Seja $G = (V, E)$ um grafo ponderado. Então, $\chi_p(G) \geq k$ se, e somente se, G possui um subgrafo H que é k -construtível.

Demonstração: Provemos primeiro que se $\chi_p(G) \geq k$, então G possui um subgrafo H k -construtível. Suponhamos, por absurdo, que a implicação seja falsa e consideremos um grafo G ponderado, contra-exemplo maximal em arestas. Vamos provar primeiro que G não é um grafo multipartite completo. Suponhamos, por absurdo, o contrário.

Observemos que, em cada classe de cor de uma coloração ponderada ótima c , não há quaisquer dois vértices em partições distintas de G . Também não pode existir mais de uma classe de cor em uma mesma partição. Por absurdo, suponhamos que existam duas classes de cor (cores i e j), cujos vértices pertencem a uma única partição de G . Consideremos os vértices x e y como sendo $rep_c(i)$ e $rep_c(j)$, respectivamente. Se $w(x) \geq w(y)$, então uma coloração c' , obtida a partir de c pela união das classes de cores i e j , tem custo exatamente $\chi_p(G) - w(y)$, contradizendo a otimalidade de c . Logo, cada partição é totalmente colorida por uma mesma classe de cor. Os vértices com maior peso em cada partição serão exatamente os representantes de cada classe de cor. Por conseguinte, observemos que o subgrafo induzido pelos representantes contém um elemento do conjunto \mathcal{K}_l^k , para algum $l \in \mathbb{N}$, visto que $\chi_p(G) \geq k$. Isto é um absurdo, pois não existia subgrafo k -construtível em G .

Logo, G não é multipartite completo. Conseqüentemente, G não satisfaz à relação de equivalência de não-adjacência. Então, existem três vértices em G , digamos a , b e c , tais que $(a,b), (b,c) \notin E(G)$ e $(a,c) \in E(G)$. Consideremos agora os grafos $G_1 = G + (a,b)$ e $G_2 = G + (b,c)$. Pela maximalidade de G , G_1 e G_2 possuem, respectivamente, subgrafos H_1 e H_2 que são grafos k -construtíveis. Obviamente, as arestas (a,b) e (b,c) pertencem, respectivamente, a H_1 e H_2 , pois foi a inclusão dessas arestas que gerou um subgrafo k -construtível em G_1 e G_2 . Agora, consideremos a aplicação da Soma de Hajós em H_1 e H_2 nas arestas (a,b) de H_1 e (b,c) de H_2 , identificando os vértices rotulados b . Por último, identifiquemos todos os vértices de H_1 com os seus vértices correspondentes em H_2 , caso eles existam. Observemos que um grafo isomorfo a um subgrafo de G é obtido ao final dessa seqüência de identificações. Logo, G contém um subgrafo k -construtível, o que contradiz a hipótese inicial.

Vamos provar agora que, se G possui um subgrafo H k -construtível, então $\chi_p(G) \geq k$. Observemos que $\chi_p(G) \geq \chi_p(H)$. Logo, basta mostrar que $\chi_p(H) \geq k$. Demonstramos por indução no número de operações de Hajós (definidas em 6.1) aplicadas para se obter H .

Suponhamos que H é isomorfo a um dos grafos básicos $K_i^k, \forall i \in \mathbb{N}$. Nesse caso, em qualquer coloração de H , cada classe de cor contém um único vértice de H e, portanto, o número cromático ponderado de H é igual a k .

Se H não é um grafo k -construtível básico, H foi obtido por uma das operações definidas em 6.1.

Suponhamos que H foi obtido pela identificação de dois vértices não-adjacentes a e b de um grafo H' k -construtível. Seja ab o vértice de H obtido pela identificação de a e b . Por hipótese de indução, H' possui número cromático ponderado pelo menos k . Suponhamos, por absurdo, que $\chi_p(H) < k$ e consideremos uma coloração ponderada ótima c de H . Logo, uma coloração

c' de H' pode ser obtida a partir de c , atribuindo-se a a e b a cor de ab e mantendo-se as cores dos outros vértices tais como lhes foram atribuídas por c . Observemos que, exceto pela cor i de ab , para todas as outras cores j , $rep_{c'}(j) = rep_c(j)$. Para a cor i , o $rep_c(i)$ tem peso superior ou igual ao peso de ab , que, por sua vez, é superior ou igual ao peso de a e ao peso de b . Portanto, a coloração c' tem peso igual ao da coloração c que é inferior a k , contradizendo a hipótese de H' ser k -construtível.

Finalmente, suponhamos agora que H foi obtido a partir de grafos k -construtíveis H_1 e H_2 pela Soma de Hajós nas arestas (a_1, b_1) e (a_2, b_2) de H_1 e H_2 , respectivamente. Seja a_1a_2 o vértice de H obtido pela identificação a_1 e a_2 . Suponhamos, por absurdo, que $\chi(H) < k$, enquanto $\chi(H_1) \geq k$ e $\chi(H_2) \geq k$. Consideremos uma coloração ponderada ótima c de H . Observemos que $c(a_1a_2) \neq c(b_1)$ ou $c(a_1a_2) \neq c(b_2)$ (pois b_1 e b_2 são adjacentes). Sem perda de generalidade, suponhamos que $c(a_1a_2) \neq c(b_1)$. Logo, uma coloração c' obtida pela restrição de c a H_1 , atribuindo-se a a_1 a cor de a_1a_2 é tal que para toda classe de cor j de c' , temos que o peso de $rep_{c'}(j) \leq rep_c(j)$ (inclusive para a cor j de a_1 , pois o peso de a_1 é inferior ou igual ao peso de a_1a_2). Conseqüentemente, o peso de c' é inferior ou igual ao peso de c , que, por sua vez, é inferior a k , contradizendo a hipótese de H_1 ser k -construtível. \square

Devemos, no entanto, observar que os Teoremas 6.1 e 6.2 apenas garantem a existência de uma seqüência de operações que, a partir de grafos completos, podemos utilizar para obter qualquer grafo cujos número cromático e número cromático ponderado são superiores ou iguais a k .

6.2 Formulação de Programação Inteira

Uma outra abordagem de estudo para problemas combinatórios é a utilização de ferramentas de Otimização Combinatória. Para tanto, é preciso uma formulação de programação matemática para o problema a ser estudado. Utilizando a mesma idéia da formulação baseada em representantes para o problema de Coloração, proposta por Campêlo et al. [5], apresentamos uma formulação que obtivemos para o problema de Coloração Ponderada.

6.2.1 Formulação dos Representantes

Campêlo et al. [6] propuseram uma inovadora formulação para o tradicional problema de Coloração de grafos utilizando a idéia de representantes. Para apresentarmos tal formulação, precisamos introduzir a seguinte notação:

Notação 6.2 Dado um grafo $G = (V, E)$, além da notação $N(u)$ que denota a vizinhança de um vértice $u \in V$, denote por $\bar{N}(u) = \{v \mid uv \notin E\}$ e por $N[u]$ e $\bar{N}[u]$ quando adicionamos o próprio vértice u ao conjunto de vizinhos e não vizinhos, respectivamente. Denote por x_{uv} , $uv \notin E$, variáveis indicadoras que terão valor 1 quando u for o representante da cor de v e 0, caso contrário.

Por último, denote por $x(H, u) = \sum_{v \in H} x_{vu}$ e $x(u, H) = \sum_{v \in H} x_{uv}$, para algum $H \subseteq \bar{N}[u]$ e, em particular, por $x(u, vw) = x_{uv} + x_{uw}$, $vw \in E(G[\bar{N}(u)])$.

A formulação de Campêlo et al. [6] é constituída de 3 conjuntos de restrições. O primeiro indica que cada vértice deve possuir um representante (podendo inclusive ser ele mesmo). O segundo conjunto garante que a coloração será própria, indicando que vértices adjacentes não podem ter o mesmo representante. Finalmente, o último conjunto é formado por restrições de integralidade.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{u \in V(G)} x_{uu} \\ \text{s.a.} \quad & x(\bar{N}[u], u) \geq 1 \quad \forall u \in V \\ & x(u, vw) \leq x_{uu} \quad \forall u \in V, \forall vw \in E(G[\bar{N}(u)]) \\ & x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

A essa formulação, foram adicionadas restrições para a redução de simetrias, em [5], pois foi observado que a partir de qualquer solução viável era possível gerar diversas outras soluções equivalentes apenas trocando, em pelo menos uma classe de cor, o vértice a representa. Dessa forma, foi introduzida uma ordem sobre os vértices do grafo com o intuito de evitar essas simetrias. Para apresentarmos essas novas restrições precisamos introduzir a seguinte notação:

Notação 6.3 Uma orientação σ de um grafo $G = (V, E)$ é um mapeamento $\sigma : E \rightarrow V$ tal que $\sigma(uv) \in \{u, v\}$. Denote por $N^+(u) = \{v \in N(u) \mid \sigma(uv) = v\}$ e por $N^-(u) = \{v \in N(u) \mid \sigma(uv) = u\}$. Se uma orientação σ for dada sobre \bar{G} podemos definir $\bar{N}^+(u)$ e $\bar{N}^-(u)$ de modo similar. Além disso, a notação $\bar{N}^+[u]$ e $\bar{N}^-[u]$ poderá ser usada, caso u esteja incluso no conjunto. Denote, também por $G^+(u) = G[N^+(u)]$ e por $G^-(u) = G[N^-(u)]$.

Dada essa notação, foram adicionadas restrições com relação a uma ordem \prec sobre os vértices do grafo para determinar que o representante de uma cor é um vértice que é minimal naquela cor, ou seja, se $u \prec v$, v não pode ser o representante de u .

Uma vez que essa orientação deve ser acíclica, serão gerados dois conjuntos $S = \{s \mid \bar{N}^-(s) = \emptyset\}$ e $T = \{t \mid \bar{N}^+(t) = \emptyset\}$. Observe primeiramente que tanto S , quanto T , induzem cliques. Ob-

serve que os elementos $u \in S$ não podem ser representados por nenhum outro vértice e , então, $x_{uu} = 1, \forall u \in S$. A formulação seguinte é conhecida como formulação assimétrica de representantes [5]:

$$\begin{aligned} \min_{x \in P(G)} \quad & \sum_{u \in V(G) \setminus S} x_{uu} + |S| \\ \text{s.a.} \quad & x(\bar{N}^-[u], u) \geq 1 \quad \forall u \in V \setminus S \\ & x(u, K) \leq y_u \quad \forall u \in V \setminus T, \forall K \subseteq \bar{N}^+(u) \\ & x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

Sendo K um conjunto que induz uma clique de tamanho 2 ou uma clique maximal de tamanho 1 em $G^+(u)$ e sendo $y_u = 1$ se $u \in S$ e $y_u = x_{uu}$, caso contrário.

6.2.2 Formulação para Coloração Ponderada

Após o estudo da Formulação Assimétrica dos Representantes, pudemos observar que tal formulação poderia ser facilmente adaptada para o problema de Coloração Ponderada.

Observe que em Coloração Ponderada buscamos uma coloração própria de peso mínimo, sendo o peso da coloração a soma das classes de cores. Como o peso de uma classe de cor é dado por um vértice de maior peso nessa classe, chamaremos tal vértice de representante da sua cor.

Desse modo, apenas duas alterações são necessárias à formulação assimétrica de representantes para que possamos obter uma formulação para o problema de Coloração Ponderada.

Primeiramente, precisamos garantir que um vértice escolhido como representante tem o maior peso da sua classe de cor. Para tanto, basta ser utilizada uma ordem \prec sobre o grafo que obedeça aos pesos dos vértices, i.e., se $w(u) > w(v)$ e $uv \notin E$, então $u \prec v$. Para os vértices não adjacentes de mesmo peso escolhe-se uma ordem arbitrária.

A última alteração a ser feita é na função objetivo, que deve somar os pesos dos vértices representantes. Portanto, a formulação para o problema de Coloração Ponderada tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min_{x \in P'(G)} \quad & \sum_{u \in V(G)} w(u)x_{uu} \\ \text{s.a.} \quad & x(\bar{N}^-[u], u) \geq 1 \quad \forall u \in V \setminus S \\ & x(u, K) \leq y_u \quad \forall u \in V \setminus T, \forall K \subseteq \bar{N}^+(u) \\ & x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

Veja que essas modificações são suficientes para que a solução encontrada seja uma coloração própria de menor peso, ou seja, uma coloração ponderada ótima.

Como não foram alteradas as restrições do problemas, podemos verificar os seguintes resultados:

Teorema 6.3 *Para um mesmo grafo ponderado G e uma mesma ordem \prec sobre $V(G)$ os poliedros P e P' são iguais.*

Corolário 6.1 *As desigualdades que foram demonstradas ser facetas, em [5], para a Formulação Assimétrica de Representantes, também são válidas para a de Coloração Ponderada.*

Essa formulação abre caminho para amplo estudo deste problema através da utilização de ferramentas de Otimização Combinatória.

6.3 Decomposições Modulares

Existem diversos algoritmos polinomiais para resolver problemas em classes de grafos completamente caracterizadas pelas suas decomposições modulares. A maioria deles percorre em pós-ordem a árvore de decomposição modular calculando-se o parâmetro desejado.

Nesta seção, primeiramente fazemos um estudo da dificuldade de calcular o número cromático ponderado de um nó da árvore de decomposição modular de um grafo que representa módulo paralelo, a partir de seus filhos. Em seguida, demonstramos como calcular o número cromático ponderado em nós série, além de também demonstrarmos como calculá-lo em aranhas.

6.3.1 Coloração Ponderada em nós série e paralelo

Seja v um nó série da árvore de decomposição modular $T(G)$ de um grafo $G = (V, E)$. No caso de calcular o número cromático ponderado de $M(v)$ a partir do número cromático ponderado de seus filhos $\{v_1, \dots, v_k\}$, é fácil observar que o número cromático ponderado de $M(v)$ é exatamente igual a $\sum_{i \in \{1, \dots, k\}} \chi_p(M(v_i))$, pois todo par de fatores $M(v_i)$ e $M(v_j)$ são adjacentes, para todos $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Seja, então, $G = G_1 \cup \dots \cup G_m$ um grafo desconexo tal que cada $G_i = (V_i, E_i)$ é uma componente conexa de G . Se são conhecidas colorações com $\chi(G_i)$ cores para todo G_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, então podemos facilmente encontrar uma coloração com $\chi(G)$ cores para G .

Para exibirmos uma forma de determinarmos tal coloração ótima para G , denote por $\mathcal{S}^i = \{S_1^i, \dots, S_{\chi(G_i)}^i\}$ uma coloração ótima qualquer de G_i , $i \in \{1, \dots, m\}$. Como não existem arestas entre as componentes, veja que a seguinte coloração é própria para G :

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} S_1^i, \bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} S_2^i, \dots, \bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} S_{\max \chi(G_i)}^i \right\}$$

Observe, também, que \mathcal{S} usa $\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \chi(G_i)$ cores e que esse valor é também um limite inferior trivial para uma coloração de G .

Apesar dessa observação de que a obtenção de uma coloração ótima para um grafo desconexo pode ser facilmente encontrada, a partir de colorações ótimas de suas componentes, devemos destacar que tal fato não ocorre de forma similar para o problema de Coloração Ponderada.

De forma análoga à anterior, uma idéia bastante intuitiva para encontrar uma coloração ponderada ótima de um grafo ponderado desconexo $G = G_1 \cup \dots \cup G_m$ seria combinar as classes de cores das colorações ponderadas ótimas de G_1, G_2, \dots, G_m de tal forma que a cor mais pesada de uma coloração c para G seria composta pelas cores mais pesadas de colorações ponderadas ótimas de cada G_j , $j \in \{1, \dots, m\}$, a segunda cor mais pesada de c seria formada pelas segundas classes de cores mais pesadas de cada componente, e assim sucessivamente.

Considere que, na Figura 6.3.1, $w(s_i) = w(u_i) = 2$ e que $w(k_i) = 1$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Dado esse exemplo, veja que a coloração ponderada ótima do grafo $A \cup B$ é dada por uma coloração na forma $c = \{\{s_1, k_1, u_1\}, \{s_2, k_2, u_2\}, \{s_3, k_3, u_3\}\}$ que, quando restrita a A , possui peso 6 e não é uma coloração ponderada ótima de A , pois existe uma coloração para A de peso 5. Dessa forma, vemos que a idéia anterior de combinar as classes de cores mais pesadas não se aplica à Coloração Ponderada.

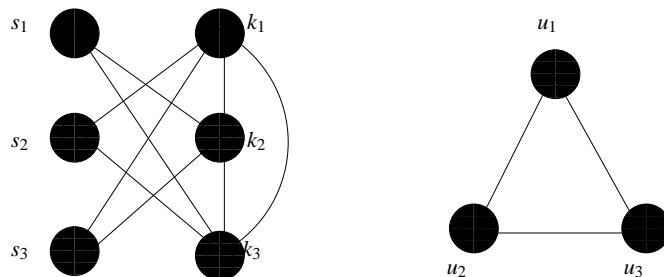


Figura 6.3: Coloração ponderada ótima da união disjunta não é trivial.

Como o peso de uma classe de cor é determinado pelo vértice de maior peso nessa cor, veja que em uma coloração $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$, com $w(S_1) \geq \dots \geq w(S_k)$, para um grafo desconexo

$G = G_1 \cup \dots \cup G_m$, se restringirmos \mathcal{S} a uma componente G_j de G , não necessariamente a cor S_i , restrita a G_j , é a i -ésima classe de cor mais pesada da componente j , pois o vértice de maior peso da cor S_i pode não pertencer a $V(G_j)$.

Dada essa observação, apesar de não sabermos calcular uma coloração ponderada ótima para um grafo desconexo G a partir de colorações ponderadas ótimas de suas componentes, obtivemos o seguinte resultado:

Proposição 6.1 *Dada uma coloração ponderada $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ de um grafo desconexo $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$, tal que cada G_i é uma componente de G , para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, então podemos sempre encontrar uma coloração $\mathcal{S}' = (S'_1, \dots, S'_{k'})$ tal que $w(\mathcal{S}') \leq w(\mathcal{S})$, $k' \leq k$ e a classe de cor S'_i , quando restrita ao grafo G_j , é a i -ésima classe de cor mais pesada de G_j .*

Demonstração: Assuma, sem perda de generalidade, que $w(S_1) \geq \dots \geq w(S_k)$ e denote por S_i^j a i -ésima classe de cor mais pesada da componente G_j . Assuma também que todas as m componentes possuem k classes de cores, atribuindo, para aquelas componentes que não possuem as k cores, classes de cores vazias com pesos iguais a zero. Ou seja, para cada componente G_j , suas classes de cores estão ordenadas $w(S_1^j) \geq w(S_2^j) \geq \dots \geq w(S_k^j)$. Veja que a classe de cor S_i é composta por classes de cores S_a^j , tal que a , em princípio, pode ser diferente de i para cada j (com exceção da classe de cor S_1 , que em pelo menos uma componente G_j deve ser S_1^j).

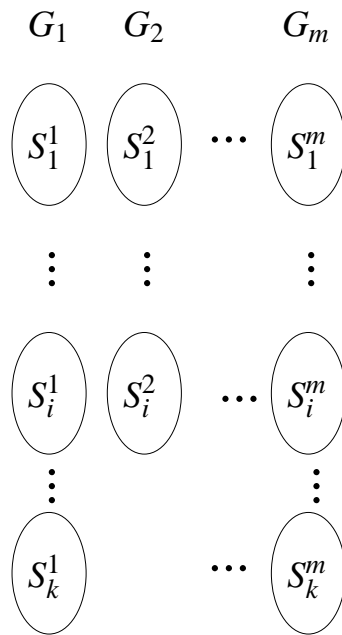


Figura 6.4: Coloração ponderada em grafos ponderados desconexos.

Usando essa notação, provemos que:

$$w(S_i) \geq \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \{w(S_i^j)\}$$

Suponha que a desigualdade anterior é falsa e que $S_i^1 = \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \{S_i^j\} > w(S_i)$, sem perda de generalidade. Uma vez que $w(S_i^1) \geq \dots \geq w(S_i^m) > w(S_i)$, existiriam pelo menos i classes de cores distintas com peso *estritamente* superior ao de S_i em G_1 e, conseqüentemente, em G , o que é um absurdo.

Logo, para construirmos a coloração \mathcal{S}' , façamos:

$$S_i' = \bigcup_{j \in \{1, \dots, m\}} S_i^j$$

Como sabemos que $w(S_i) \geq \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \{w(S_i^j)\}$, $w(\mathcal{S}) \geq w(\mathcal{S}')$. □

Aplicando a Proposição 6.1 sobre uma coloração ponderada ótima, observamos que para qualquer grafo ponderado desconexo G , existe uma coloração ponderada ótima de G que pode ser obtida pela combinação de colorações não necessariamente ótimas de suas componentes pelo procedimento já citado de combinar as classes de cores mais pesadas de cada componente.

6.3.2 Coloração Ponderada em aranhas

Para o nó de vizinhança v tal que $G(v)$ é isomorfo a uma aranha $A = (S \cup K \cup R, E)$, determinamos como se comporta uma coloração ótima de $M(v)$ a partir de colorações ponderadas ótimas de seus filhos, ou seja, colorações ponderadas ótimas de módulos triviais formados pelos vértices de $S \cup K$ e de uma coloração ponderada ótima para o módulo R . Para demonstrarmos esse resultado, precisamos de algumas observações.

Observação 6.1 *Podemos supor, sem perda de generalidade, que os pesos de todos os vértices são estritamente maiores que zero, pois, caso contrário, podemos atribuir k cores aos k vértices de peso nulo e não utilizar mais essas cores no restante da coloração. Veja que os vértices de peso nulo jamais influenciariam no peso da coloração.*

Observação 6.2 *Dadas uma aranha ponderada $G = (S \cup K \cup R, E, w)$, e uma coloração ponderada ótima $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_k)$ de G , não existem S_i e S_j , para $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$, contendo apenas vértices de S .*

A observação anterior pode facilmente ser verificada, pois não podem existir classes cores disjuntas cuja união seja um conjunto estável em uma coloração ponderada ótima de qualquer grafo.

Considere a seguinte notação:

Notação 6.4 *Dada uma coloração ponderada ótima \mathcal{S} de uma aranha $G = (S \cup K \cup R, E)$, denotemos por CK (CR) o conjunto de cores que ocorrem em K (respectivamente, em R). Veja que podem existir vértices de S coloridos tanto com cores de CK quanto com cores de CR . Entretanto, pela Observação 6.2, no máximo uma classe de cor possui apenas vértices de S . Se essa cor existir em \mathcal{S} , então a denotamos por cS .*

Observação 6.3 *Podemos representar uma coloração de uma aranha por $\mathcal{S} = CK \cup CR \cup cS$, tal que cS pode ser vazia. Isso decorre da observação que como existem todas as arestas entre K e R , as cores de CK são disjuntas das cores de CR . Conseqüentemente, podemos representar o peso de uma coloração \mathcal{S} de uma aranha por: $w(\mathcal{S}) = w(CK) + w(CR) + w(cS)$.*

Observação 6.4 *Sem perda de generalidade, podemos assumir que, para todo vértice $s \in S$, $w(s) > w(k)$ e $w(s) > w(r)$, para todos $k \in K$ e $r \in R$ tais que $(s, k) \notin E$, pois, caso contrário, para qualquer coloração própria da aranha G , poderíamos sempre atribuir a s a mesma cor de um não vizinho de peso superior ou igual a $w(s)$ e, dessa forma, o peso da coloração da aranha nunca dependeria do peso de s .*

Feitas essas observações, podemos demonstrar os seguintes lemas:

Lema 6.1 *Dadas uma aranha ponderada $G = (S \cup K \cup R, E, w)$ e uma coloração ponderada ótima qualquer $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ de G , no máximo uma cor de CR possui vértices de S .*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que houvessem cores S_i e S_j , $i, j \in \{1, \dots, k\}$, de CR contendo vértices de S . Sem perda de generalidade, suponha que $w(S_i) \geq w(S_j)$. Pela Observação 6.4, os vértices mais pesados de S_i e S_j pertencem a S . Seja $\mathcal{S}' = \{S'_1, \dots, S'_k\}$ a coloração obtida a partir de \mathcal{S} apenas colocando os vértices de S coloridos com a cor S_j na classe de cor S_i . Formalmente, para todo $v \in V(G)$, se $v \in S \cap S_j$, então faça $v \in S'_i$, senão, se $v \in S_l$, faça $v \in S'_l$, para todo $l \in \{1, \dots, k\}$. Podemos concluir facilmente que \mathcal{S}' possui peso estritamente inferior a \mathcal{S} , pois o peso da cor S'_i em \mathcal{S}' é o mesmo de S_i em \mathcal{S} , o peso da cor S_j é estritamente inferior a S'_j em \mathcal{S}' , uma vez que um vértice mais pesado de S'_j pertence a R , e as outras classes de cores não são alteradas. Isso é um absurdo, pela suposição que \mathcal{S} é uma coloração ótima. \square

Lema 6.2 *Seja $G = (S \cup K \cup R, E, w)$ uma aranha ponderada. Dada uma coloração ponderada ótima \mathcal{S}_r para $G[R]$, então sempre existe uma coloração ponderada ótima \mathcal{S} para G que é uma extensão de \mathcal{S}_r .*

Demonstração: Seja $\mathcal{S}' = \{S'_1, \dots, S'_k\}$ uma coloração ponderada ótima para G . Pela hipótese de que $w(s) > w(r)$, para todo $s \in S$ e $r \in R$, observe que não existem duas classes de cores S'_i e S'_j , $i, j \in \{1, \dots, k\}$, em \mathcal{S}' que contêm vértices de S e R . Isso é verdade, pois caso contrário existiria uma coloração com peso estritamente inferior a \mathcal{S}' na qual os vértices de $S \cap S_j$ seriam recoloridos com a cor S_i , supondo que $w(S_i) \geq w(S_j)$ sem perda de generalidade.

Veja também que a única cor S'_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ de \mathcal{S}' , que eventualmente contém vértices de S e R deve conter necessariamente um vértice de maior peso de R . Caso contrário, veja que se recoloríssemos os vértices de S'_i com a cor de um vértice mais pesado r^* de R , obteríamos uma coloração com peso estritamente inferior a \mathcal{S}' .

Seja, então, \mathcal{S} uma coloração para G tal que os vértices de R são coloridos como em \mathcal{S}_r , os vértices coloridos por \mathcal{S}' com cores de clique ou com a cor de S recebem a mesma cor e os vértices de S ainda não coloridos em \mathcal{S} , recebem a mesma cor que r^* possui em \mathcal{S}_r .

Como \mathcal{S}_r é uma coloração ponderada ótima para R , não é difícil verificar que $w(\mathcal{S}) \leq w(\mathcal{S}')$, uma vez que as cores de clique e a cor de S têm o mesmo peso em ambas as colorações.

□

A importância do Lema 6.2 é a garantia que ao executarmos um algoritmo para calcular o número cromático ponderado percorrendo uma árvore de decomposição modular de um grafo P_4 -esparso em pós-ordem, para qualquer coloração ponderada ótima de módulo R , existe uma coloração ponderada ótima para a aranha $G = (S \cup K \cup R, E)$ que é uma extensão da coloração de R .

Agora nos resta analisar como devemos fazer essa extensão de uma coloração ótima de R para uma coloração ótima de uma aranha $G = (S \cup K \cup R, E)$. Devemos ressaltar que precisamos descobrir como colorir os vértices de S , pois os vértices de K recebem todos cores diferentes das cores de R .

Para os próximos lemas, suponha que os vértices de S estão ordenados em ordem não decrescente de peso, ou seja, $S = \{s_1, \dots, s_m\}$ e $w(s_1) \leq \dots \leq w(s_m)$. Mais ainda, denote por k^* um vértice mais pesado de K , por k^{**} um segundo vértice mais pesado de K e por s^* o único vizinho de k^* , caso a aranha seja magra.

Lema 6.3 *Dadas uma aranha ponderada $G = (S \cup K \cup R, E, w)$ e uma coloração ponderada*

ótima c de G , existe uma coloração ponderada ótima c' de G tal que c' , quando restrita a R , é idêntica a c e exatamente uma das afirmativas a seguir é verdadeira:

1. Todos os vértices em S estão coloridos ou com a cor c_S ou com a cor de um vértice mais pesado em R ;
2. Existe um índice $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que os vértices de S estão coloridos em c' de s_1 a s_{j-1} ou com a cor c_S ou com a cor de um vértice mais pesado em R (caso $j = 1$, nenhum vértice de S é colorido com tais cores) e os vértices de s_j a s_m com a cor de um de seus não vizinhos em K .

Demonstração: Observemos primeiro que para todo vértice do conjunto estável S , ou ele pertence à cor de S , ou ele recebe uma cor de um não vizinho seu colorido com uma cor de CK ou de CR .

Consideremos uma coloração ponderada ótima c qualquer de G . Se todos os vértices de S estiverem coloridos ou com a cor c_S ou com a cor de um vértice mais pesado em R , então a primeira afirmativa é verdadeira, considerando $c' = c$.

Caso contrário, seja $j - 1 \in \{0, \dots, m - 1\}$ o índice do vértice mais pesado que recebeu ou uma cor de R ou a cor de S , i.e., $c(s_{j-1}) \in CR$ ou $c(s_{j-1}) = c_S$ e, para todo $i \in \{j, \dots, m\}$, $c(s_i) \in CK$ ($j - 1 = 0$ implica que todo vértice de S recebeu uma cor de CK).

Seja c' uma coloração para G tal que $c'(s_i) = c(s_{j-1})$, para todo $i \in \{1, \dots, j - 1\}$, e $c'(s_i) = c(s_i)$, para todo $i \in \{j, \dots, m\}$. Pela Observação 6.4 e pela suposição que $w(s_1) \leq \dots \leq w(s_m)$, é fácil concluir que $w(c') \leq w(c)$.

Por último, veja que se $c'(s_{j-1}) \in CR$ e $j - 1 \neq 0$, pelos mesmos argumentos utilizados no Lema 6.2, podemos recolorir s_1, \dots, s_{j-1} com a cor de um vértice mais pesado de R . Dessa forma, concluímos que c' satisfaz a segunda afirmativa e $w(c') \leq w(c)$. \square

O Lema 6.3 nos ensina que, após colorirmos os vértices de R com c_R e os vértices de K com $|K|$ cores disjuntas, para encontrarmos uma coloração ponderada ótima para G apenas precisamos verificar colorações para S que satisfaçam as afirmativas do Lema 6.3.

Se a aranha G for gorda, para colorirmos os vértices de s_j a s_m temos apenas uma escolha, uma vez que só existe um vértice não vizinho a cada um deles em K . Podemos então concluir que, para aranhas gordas, apenas é necessário verificar dentre todas as colorações na forma do Lema 6.3 qual delas tem o menor peso. Dadas as restrições que as afirmativas do Lema 6.3 impõem sobre que cores que devem ser atribuídas a cada vértice de S , é fácil observar que isso pode ser feito em tempo polinomial.

Por outro lado, se G for uma aranha magra, existem $|K| - 1$ possibilidades de cores para cada vértice no conjunto $\{s_j, \dots, s_m\}$. Certamente, nesse caso, não poderíamos gerar todas as possíveis colorações para calcular a de menor peso, pois a complexidade não seria polinomial.

Dessa forma, o seguinte lema nos mostra que não precisamos analisar todas essas colorações em uma aranha magra, para garantir a complexidade polinomial do algoritmo:

Lema 6.4 *Seja $G = (S \cup K \cup R, E, w)$ uma aranha magra ponderada e c uma coloração ponderada ótima de G como no Lema 6.3 que satisfaz a segunda afirmação. Existe uma coloração c' tal que $w(c') \leq w(c)$ satisfazendo uma das alternativas abaixo:*

- *A cor dos vértices s_j, \dots, s_m é igual à cor de um vértice mais pesado k^* de K , com possível exceção ao vértice s^* que terá a cor de um segundo vértice mais pesado k^{**} de K ;*
- *A cor dos vértices s_j, \dots, s_m é igual à cor de um vértice $k_i \neq k^*$ qualquer de K , com possível exceção ao vértice s_i , único vizinho de k_i em K , que terá a cor de um vértice mais pesado k^* de K ;*

Demonstração: Demonstraremos que, a partir da c , podemos obter uma coloração satisfazendo as condições do lema de peso inferior ou igual ao de c . Para tanto, seja c uma coloração como no Lema 6.3 que satisfaz a segunda afirmação, ou seja, os vértices de S com cores s_j, \dots, s_m podem ter recebido uma cor de qualquer não vizinho seu na clique. Fazemos uma análise por casos:

1. $c(s_m) = c(k^*)$

- (a) $s^* \notin \{s_j, \dots, s_m\}$

Nesse caso, todos os vértices com cores de clique em S não são adjacentes a k^* e, conseqüentemente, todos poderiam receber a cor de k^* .

Seja c' uma coloração para G tal que $c'(v) = c(k^*) = c(s_m)$, para todo $v \in \{s_j, \dots, s_m\}$ e $c'(v) = c(v)$, para todo $v \in V(G) \setminus \{s_j, \dots, s_m\}$. Veja que $w(c(k^*)) = w(c'(k^*))$, pois s_m é o vértice mais pesado de S , pela Observação 6.4. Como todas as outras cores de c que ocorriam em S não aumentam de peso em c' , pois elas apenas perderam vértices, concluímos que $w(c') \leq w(c)$ e que c' satisfaz o lema.

- (b) $s^* \in \{s_j, \dots, s_m\}$

Como $c(s_m) = c(k^*)$ e k^* e s^* são vizinhos, sabemos que $s^* \neq s_m$. Seja c' uma coloração tal que $c'(v) = c(k^*) = c(s_m)$, para todo $v \in \{s_j, \dots, s_m\} \setminus \{s^*\}$ e $c'(v) =$

$c(v)$, para todo $v \in (V(G) \setminus \{s_j, \dots, s_m\}) \cup \{s^*\}$. Pelos mesmos argumentos do caso anterior, podemos concluir que $w(c') \leq w(c)$.

Se $c'(s^*) = c'(k^{**})$, c' satisfaz o lema. Senão, considere que $c'(s^*) = c'(k_i)$, para algum $k_i \neq k^{**}$, $k_i \in K$.

Nesse caso, seja c'' uma coloração para G tal que $c''(s^*) = c'(k^{**})$ e $c''(v) = c'(v)$, para todo $v \in V(G) \setminus \{s^*\}$. Pela Observação 6.4, veja que $w(c'(k_i)) = w(c''(k^{**})) = w(s^*)$ e $w(c'(k^{**})) = w(k^{**}) \geq w(k_i) = w(c''(k_i))$. Dessa forma, como todas as outras classes de cores são idênticas em c' e c'' , concluímos que $w(c') \geq w(c'')$ e c'' satisfaz as condições do lema.

2. $c(s_m) \neq c(k^*)$

(a) $s^* \notin \{s_j, \dots, s_m\}$

Assuma que $c(k_i) = c(s_m)$, para algum $k_i \in K$, $k_i \neq k^*$. Seja c' uma coloração para G tal que se $v \in S$ e $c(v) = c(k_i)$, então $c'(v) = c(k^*)$, caso contrário $c'(v) = c(v)$. Como, pela Observação 6.4 e suposição de que $w(s_1) \leq \dots \leq w(s_m)$, podemos concluir que $w(c(k_i)) = w(s_m) = w(c'(k^*))$ e que $w(c(k^*)) \geq w(k^*) \geq w(k_i) = w(c'(k_i))$, chegamos ao fato que $w(c') \leq w(c)$.

Observe que em c' , $c'(s_m) = c'(k^*)$. Podemos então utilizar sobre c' os mesmos argumentos do Caso 1, o qual nos permite obter uma coloração que satisfaz o lema.

(b) $s^* \in \{s_j, \dots, s_m\}$

i. $c(s^*) \neq c(s_m)$

Observe que podemos repetir o raciocínio do caso 2a.

ii. $c(s^*) = c(s_m)$

Suponha que $c(s^*) = c(s_m) = c(k_i)$, para algum $k_i \in K$, $k_i \neq k^*$.

Nesse caso, não podemos definir uma coloração c' pela alteração da cor do vértice s_m para a cor de $c(k^*)$, pois a cor de s^* é exatamente a cor de s_m e s^* e k^* são vizinhos. Também não é possível utilizar a Observação 6.4 para comparar os pesos de tais vértices e, conseqüentemente, ter uma garantia que o peso da coloração não aumentará após a inclusão dos vértices em $S \setminus \{s^*\}$ de cor $c(k_i)$ na cor $c(k^*)$.

Entretanto, como no Caso 1, se o único vizinho de k_i em S , s_i , não pertencer ao conjunto $\{s_j, \dots, s_m\}$, então defina c' tal que $c'(v) = c(k_i)$, para todo $v \in \{s_j, \dots, s_m\}$ e $c'(v) = c(v)$, para todo $v \in V(G) \setminus \{s_j, \dots, s_m\}$. Pelos argumentos dos casos anteriores, é fácil observar que $w(c') \leq w(c)$ e que c' satisfaz o lema.

Se $s_i \in \{s_j, \dots, s_m\}$, obviamente $c(s_i) \neq c(k_i) = c(s_m)$. De forma análoga ao Caso 1b, defina c' tal que $c'(v) = c(s_m) = c(k_i)$, para todo $v \in \{s_j, \dots, s_m\} \setminus \{s_i\}$, e $c'(v) = c(v)$, para todo $v \in V(G) \setminus \{s_j, \dots, s_m\} \cup \{s_i\}$. Utilizando argumentos similares aos do Caso 1b, pode-se concluir que $w(c') \leq w(c)$.

Se $c'(s_i) = c'(k^*)$, c' satisfaz o lema. Caso contrário, defina c'' tal que $c''(s_i) = c'(k^*)$ e $c''(v) = c'(v)$, para todo $v \in V(G) \setminus \{s_i\}$. Pela Observação 6.4 e pela suposição que $w(s_1) \leq \dots \leq w(s_m)$, podemos verificar que $w(c'(k_i)) = w(s_i) = w(c''(k^*))$ e que $w(c'(k^*)) = w(k^*) \geq w(k_i) = w(c''(k_i))$. Logo $w(c'') \leq w(c')$ e c'' satisfaz o lema.

□

De acordo com os lemas anteriores, sabemos que existe uma coloração ponderada ótima para uma aranha ponderada $G = (S \cup K \cup R, E, w)$ que é uma extensão de qualquer coloração ótima para $G[R]$, ou seja, que satisfaz o Lema 6.2. Também sabemos que existe uma coloração ótima que satisfaz os Lemas 6.3 e 6.4. Para finalmente apresentarmos o algoritmo, precisamos apenas verificar que existe uma coloração que satisfaz os três lemas simultaneamente.

Lema 6.5 *Seja $G = (S \cup K \cup R, E, w)$ uma aranha ponderada e $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_k\}$ uma coloração ponderada ótima de G satisfazendo os Lemas 6.3 e 6.4. Então, a coloração \mathcal{S} restrita a R é uma coloração ponderada ótima para $G[R]$.*

Demonstração: Se $R = \emptyset$, o lema é trivialmente verdade. Suponha, então, por absurdo que a coloração \mathcal{S} quando restrita a $G[R]$ não é ótima. Seja \mathcal{S}_R uma coloração ponderada ótima para $G[R]$.

Pelo Lema 6.1, existe no máximo uma cor S_j de CR atribuída a vértices de S . Se não existir tal cor, então as cores de CR só contém vértices de R e uma coloração \mathcal{S}' cujas classes de cores em CK e a classe de cor cS são idênticas à \mathcal{S} e cujas classes de cores de CR são idênticas a \mathcal{S}_R , é uma coloração com peso estritamente inferior ao de \mathcal{S} , pela suposição de que \mathcal{S} quando restrita a R não é ótima. Isso é uma contradição à otimalidade de \mathcal{S} .

Se existe essa cor S_j de CR contendo vértices de S em \mathcal{S} , pelos argumentos utilizados no Lema 6.2, essa cor contém um vértice mais pesado r^* de R . Usando a mesma idéia desenvolvida no Lema 6.2, observe que podemos recolorir os vértices de R com a coloração \mathcal{S}_R , gerando uma coloração $\mathcal{S}' = \{S'_1, \dots, S'_{k'}\}$ para G . Do mesmo, os vértices de S que possuíam a cor S_j devem, em \mathcal{S}' , receber a mesma cor de r^* , digamos S'_j . Como a coloração \mathcal{S} , quando restrita a R , não é ótima para R , concluímos que $w(\mathcal{S}') < w(\mathcal{S})$, pois as classes de cores de CK e a cor cS são

idênticas em ambas as colorações e $w(S_j) = w(S'_j)$. Isso é outra contradição, também por causa da hipótese que \mathcal{S} é uma coloração ponderada ótima. \square

Finalmente, apresentamos o algoritmo 2 que encontra uma coloração ponderada ótima de uma aranha ponderada $G = (S \cup K \cup R, E, w)$ a partir de uma coloração ponderada ótima c_R de $G[R]$.

Proposição 6.2 *Dadas uma aranha ponderada $G = (S \cup K \cup R, E, w)$, e uma coloração ponderada ótima c_R de $G[R]$, então uma coloração ponderada ótima de G pode ser obtida em $\mathcal{O}(n^3)$.*

Demonstração: O algoritmo que calcula a coloração ponderada ótima de G é o Algoritmo 2. Sua corretude segue dos Lemas 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5. A ordenação dos vértices de S em ordem não decrescente pode ser feita em $\mathcal{O}(n \log n)$. A atribuição de cores a R e a K pode ser feita em tempo linear, uma vez que já conhecemos uma coloração para R . De acordo com o Lema 6.3, devemos analisar todas as colorações tais que os vértices em S , de s_1 até s_j , recebem ou a cor c_S ou a cor de um vértice mais pesado em R , enquanto os vértices restantes recebem uma cor de um não vizinho em K . Se a aranha é gorda, observe que esse cálculo pode ser feito com complexidade $\mathcal{O}(n^2)$. Entretanto, para o caso de colorirmos uma aranha magra, devemos analisar todas as colorações nas quais os vértices de S recebem a mesma cor de um vértice k_i , para todo $k_i \in K$, com possível exceção ao seu único vizinho em S , que deve receber a cor do vértice mais pesado no conjunto $K \setminus \{k_i\}$. Desse modo, a complexidade geral do algoritmo fica $\mathcal{O}(n^3)$. \square

Algoritmo 2: Algoritmo Coloração Ponderada de Aranhas

Entrada: Aranha $G = (S \cup K \cup R, E)$ e uma coloração ótima c_R de $G[R]$

Saída: Coloração ponderada ótima c de G

```

1  $m \leftarrow |S|$ 
2 Crie vértices  $s_0$  e  $s_{m+1}$  artificiais em  $S$  e ordene-os  $w(s_0) \leq \dots \leq w(s_{m+1})$ ;
3 Escolha  $k^*, k^{**}$  e  $r^*$  e defina  $c, c' \leftarrow \emptyset$ ;
4 para todo  $r \in R$  faça
5    $c'(r) \leftarrow c_R(r)$ ;
6 para todo  $k \in K$  faça
7    $c'(k) \leftarrow$  uma cor dentre as  $|K|$  cores que serão utilizadas para a clique  $K$ ;
8 para todo  $j = 1, \dots, m + 1$  faça
9   para todo  $i = 0, \dots, j - 1$  faça
10     $c'(s_i) \leftarrow cS$ ;
11   se Aranha  $G$  é gorda então
12     para todo  $i = j, \dots, m$  faça
13        $c'(s_i) \leftarrow$  cor do seu não vizinho em  $K$  ( $c'(f(s_i))$ );
14     se  $w(c') < w(c)$  então
15        $c \leftarrow c'$ ;
16   senão
17     para todo  $i = j, \dots, m$  faça
18       se  $(s_i, k^*) \notin E(G)$  então
19          $c'(s_i) \leftarrow c'(k^*)$ ;
20       senão
21          $c'(s_i) \leftarrow c'(k^{**})$ ;
22     se  $w(c') < w(c)$  então
23        $c \leftarrow c'$ ;
24     para todo  $k_i \in K \setminus \{k^*\}$  faça
25       para todo  $i = j, \dots, m$  faça
26         se  $(s_i, k_i) \notin E(G)$  então
27            $c'(s_i) \leftarrow c'(k_i)$ ;
28         senão
29            $c'(s_i) \leftarrow c'(k^*)$ ;
30       se  $w(c') < w(c)$  então
31          $c \leftarrow c'$ ;
32 Repete o laço da linha 7, apenas trocando  $cS$  por  $c'(r^*)$ , na linha 9;
33 retorna  $c$ 

```

7 *Coloração Gulosa em P_4 -carregados estendidos gordos*

Neste capítulo, aplicamos os resultados apresentados no Capítulo 5 na classe dos grafos P_4 -carregados estendidos gordos, a qual definimos.

7.1 Grafos P_4 -carregados estendidos

Sabe-se que um grafo $G = (V, E)$ é *split* se, e somente se, G é livre de C_5 , C_4 e \bar{C}_4 . Um grafo $H = (V, E)$ é *pseudo-split* se, e somente se, H é livre de C_4 e \bar{C}_4 .

Giakoumakis [18] definiu a classe dos grafos P_4 -carregados estendidos da seguinte forma: um grafo é P_4 -carregado estendido se, para todo subgrafo $H \subseteq G$ com no máximo 6 vértices, a seguinte afirmação é verdadeira: se H possuir mais de dois P_4 's induzidos, então H é um grafo *pseudo-split*.

Ele também caracterizou os nós de vizinhança da árvore de decomposição modular de um grafo P_4 -carregado estendido:

Teorema 7.1 [18] *Um grafo pertence à classe P_4 -carregada estendida se, e somente se, o grafo quociente de cada nó de vizinhança de sua árvore de decomposição modular for isomorfo a:*

- *um P_5 ou a um \bar{P}_5 ou a um C_5 e os fatores representados pelos seus vértices forem grafos triviais; ou*
- *uma aranha $A = (S \cup R \cup K, E)$ e os fatores representados pelos seus vértices forem grafos triviais, com possíveis exceções a um fator que representa o módulo induzido por R e a um outro fator em $S \cup K$ com dois vértices; ou*
- *um grafo split $G = (S(G) \cup K(G) \cup R(G), E)$ e os fatores representados pelos seus vértices de $S(G)$ são conjuntos independentes, enquanto que os fatores representados pelos seus vértices de $K(G)$ são cliques.*

7.2 Grafos P_4 -carregados estendidos gordos

Utilizando a caracterização dos grafos P_4 -carregados estendidos através de sua decomposição modular, definimos a seguinte classe:

Definição 7.1 *Definimos a classe dos grafos P_4 -carregados estendidos gordos, como sendo os grafos que satisfazem ao Teorema 7.1, com exceção ao primeiro caso no qual os fatores representados pelos vértices de P_5 , \bar{P}_5 e C_5 não são necessariamente grafos triviais, ou seja, tais nós de vizinhança são gordos.*

Note que tais fatores pertencem à classe dos grafos P_4 -carregados estendidos gordos. Além disso, é importante observar que a classe dos grafos P_4 -carregados estendidos gordos contém propriamente a classe dos P_4 -carregados estendidos. Por exemplo, veja na Figura 7.2, exemplo de um grafo que pertence à primeira classe, mas não à segunda.

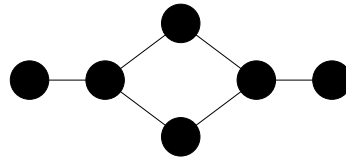


Figura 7.1: Grafo P_4 -carregado estendido gordo, que não é P_4 -carregado estendido.

Teorema 7.2 *Se $G = (V, E)$ é um grafo P_4 -carregado estendido gordo e $|V(G)| = n$, então $\Gamma(G)$ pode ser calculado em $\mathcal{O}(n^3)$.*

Demonstração: Observe que todos os nós de vizinhança de G foram estudados no Capítulo 5 e, como consequência das Proposições 5.1, 5.2, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8, sabemos como calcular o número guloso de cada módulo $M(v)$ relativo a cada nó interno v da árvore de decomposição modular de G em tempo linear, no pior caso.

Logo, aplicamos um algoritmo de percurso em pós-ordem, cuja complexidade é $\mathcal{O}(n^2)$, calculando o número guloso dos nós internos de $T(G)$ em função do número guloso das folhas, que é igual a um, de acordo com as proposições citadas anteriormente e, assim, determinamos $\Gamma(G)$ em $\mathcal{O}(n^3)$. \square

Corolário 7.1 *O número guloso de um grafo $G = (V, E)$ pode ser calculado em tempo polinomial, se G pertence a uma das seguintes classes: P_4 -reduzíveis, P_4 -reduzíveis estendidos, P_4 -esparços, P_4 -esparços estendidos, P_4 -extensíveis, P_4 -leves, P_4 -carregados, P_4 -carregados estendidos e P_4 -arrumados.*

Demonstração: Claramente, todo grafo P_4 -carregado estendido é P_4 -carregado estendido gordo. Como todas as outras classes citadas são subclasses dos grafos P_4 -carregados estendidos, como observado por Pedrotti [47], o resultado segue. \square

Veja a seguir um Diagrama de Hasse [47] de ordem parcial de inclusão definida sobre todas as classes acima citadas, além da classe dos grafos livres de P_5 .

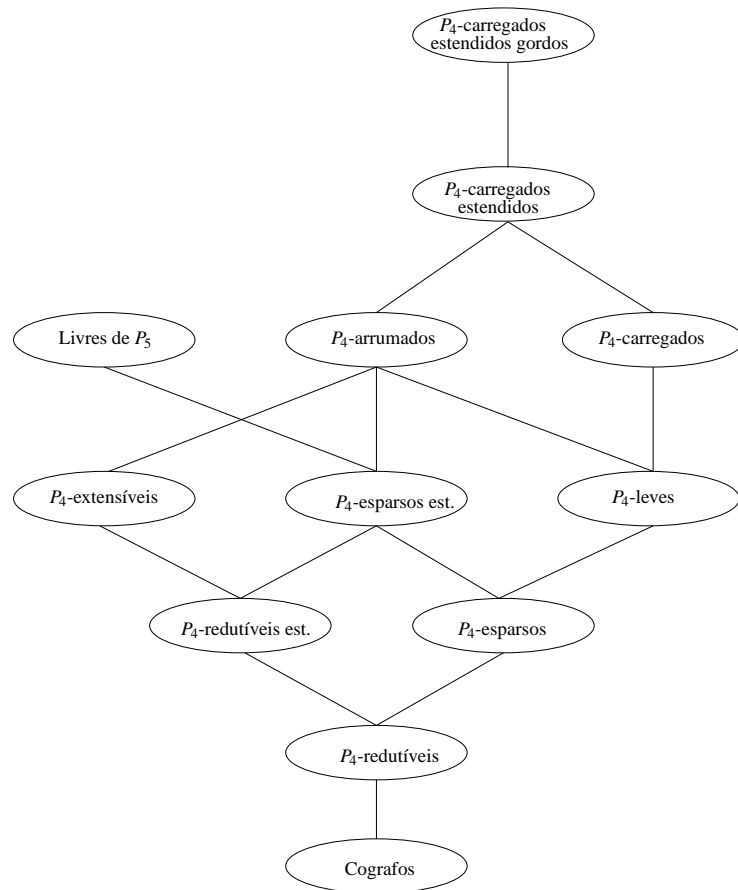


Figura 7.2: Diagrama de Hasse.

8 *Coloração Ponderada em P_4 -esparsos*

Um fato que não encontramos na literatura, mas que é fácil verificar é que todo grafo *split* é P_4 -carregado. Conseqüentemente, Coloração Ponderada é *NP*-completo para grafos P_4 -carregados, P_4 -carregados estendidos e P_4 -carregados estendidos e gordos.

Buscamos estudar o problema de Coloração Ponderada em uma classe de grafos que contém propriamente os cografos e está contida propriamente nos grafos livres de P_5 , uma vez que este problema é polinomial para cografos, enquanto que é *NP*-completo para grafos livres de P_5 .

8.1 Algoritmo polinomial para subclasse de P_4 -esparsos estendidos

Dizemos que um grafo é P_4 -esparso se cada 5 vértices seus induzem no máximo um P_4 [31]. Essa classe de grafos foi bastante estudada por Jamison e Olariu [33, 32, 34].

Giakoumakis e Vanherpe demonstraram que:

Teorema 8.1 [19] *G é um grafo P_4 -esparso se, e somente se, cada nó de vizinhança v da árvore de decomposição modular $T(G)$ é tal que $G(v)$ é isomorfo a uma aranha $A = (S \cup K \cup R, E)$ e o único fator não trivial de $G[M(v)]$ é o módulo induzido por R , caso $R \neq \emptyset$.*

Um dos subgrafos proibidos para grafos P_4 -esparsos é o C_5 . Retirando a restrição de que C_5 é um subgrafo proibido para P_4 -esparsos, Giakoumakis e Vanherpe definiram a classe dos grafos P_4 -esparsos estendidos. Eles também demonstraram que todo C_5 é um conjunto homogêneo em um grafo P_4 -esparso estendido. Logo, é fácil observar que, dado o Teorema 8.1, os grafos quocientes $G(v)$ relativos aos nós de vizinhança v da árvore de decomposição modular de um grafo P_4 -esparso estendido são isomorfos a uma aranha $A = (S \cup K \cup R, E)$ ou a um C_5 . Além disso, o único fator não trivial de $G[M(v)]$ é o fator induzido por R , no caso de $G(v)$ ser isomorfo a uma aranha.

Teorema 8.2 *Seja $G = (V, E)$ um grafo P_4 -esparso estendido cuja decomposição modular não possui nós paralelos. Então $\chi_p(G)$ pode ser encontrado em $\mathcal{O}(n^5)$.*

Demonstração: O algoritmo para determinar $\chi_p(G)$ faz um percurso em pós-ordem em $T(G)$, calculando a partir do número cromático ponderado das folhas, o número cromático ponderado dos nós internos v de $T(G)$, ou seja, de $M(v)$.

Conforme comentado na Seção 6.3.1, uma coloração ponderada ótima de um nó série v é dada por colorações ponderadas ótimas de seus fatores, de forma que dois fatores disjuntos não compartilham nenhuma cor. Isto é podemos em tempo linear encontrar uma coloração ponderada ótima para $M(v)$, a partir de colorações ponderadas ótimas de seus fatores.

Pela Proposição 6.2, podemos determinar uma coloração ponderada ótima em $\mathcal{O}(n^3)$ de um nó de vizinhança v isomorfo a uma aranha $A = (S \cup K \cup R, E)$, a partir de uma coloração ponderada ótima de R . Veja também que uma coloração ponderada ótima para um C_5 pode ser encontrada em tempo constante.

Logo, se G não possui nós paralelos, então o algoritmo encontra uma coloração ponderada ótima para G e, conseqüentemente, seu número cromático em $\mathcal{O}(n^5)$. \square

8.2 Algoritmo 2-aproximativo para P_4 -esparsos

Apesar de não conhecermos um algoritmo polinomial para determinar o número cromático ponderado de grafos P_4 -esparsos estendidos, determinamos um algoritmo 2-aproximativo para grafos P_4 -esparsos.

É importante lembrar que não existe algoritmo aproximativo de fator constante para determinar o número cromático ponderado de um grafo qualquer, conforme comentamos no Capítulo 4. Para exibirmos tal algoritmo, precisamos introduzir algumas definições e resultados:

Definição 8.1 *Um grafo G possui uma partição especial se existe uma família $\Sigma = \{S_1, \dots, S_q\}$ de conjuntos estáveis disjuntos de G , com $q \geq 1$ e $|S_i| \geq 2$, para todo $i \in \{1, \dots, q\}$, e existe uma injeção $f : \bigcup_{i=1}^q S_i \longrightarrow V - \bigcup_{i=1}^q S_i$ tal que as seguintes afirmativas são verdadeiras:*

1. $K_i = \{z \mid z = f(s) \text{ para algum } s \in S_i\}$ é uma clique, para todo $i \in \{1, \dots, q\}$;
2. Um conjunto de vértices A induz um P_4 em G se, e somente se, existem um índice $i \in \{1, \dots, q\}$ e vértices distintos $x, y \in S_i$ tais que $A = \{x, y, f(x), f(y)\}$.

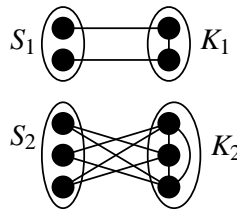


Figura 8.1: Exemplo de partição especial.

Observe, na Figura 8.2, um exemplo de uma partição especial.

Teorema 8.3 [32] *Um grafo é P_4 -esparso se, e somente se, ele é um cografo ou ele tem uma partição especial.*

O algoritmo aproximativo usa esta caracterização de grafos P_4 -esparso. Para finalmente apresentá-lo, precisamos ainda do seguinte lema:

Lema 8.1 *Sejam G e H grafos ponderados tais que $H \subseteq G$. Então, $\chi_p(H) \leq \chi_p(G)$*

Demonstração: Suponha, por absurdo, $H \subseteq G$ contra-exemplo. Suponha, também, uma coloração c ponderada ótima de G . Se restringirmos c aos vértices em $V(H) \cap V(G)$, obteremos uma coloração c' de H tal que $w(c') < \chi_p(H)$. Absurdo. \square

Pela Proposição 4.2, Coloração Ponderada em cografos pode ser resolvida em tempo polinomial. Logo, podemos enunciar o seguinte:

Proposição 8.1 *Existe um algoritmo aproximativo de tempo linear com fator de aproximação 2 para resolver o problema de coloração ponderada em grafos P_4 -esparso.*

Demonstração: Uma vez que todo grafo P_4 -esparso, que não é um cografo, possui uma partição especial (Definição 8.1), ou seja, possui S e K como cografos induzidos, e que o Lema 8.1 é verdade, nosso algoritmo aproximativo apenas realiza a coloração ponderada ótima de S e K em tempo linear com cores disjuntas. Como $\chi_p(G[S]) \leq \chi_p(G)$ e $\chi_p(G[K]) \leq \chi_p(G)$, a demonstração está completa. \square

9 Conclusões

Diversos resultados foram obtidos no decorrer desse mestrado. A formulação para Coloração Ponderada permite que utilizemos diversas ferramentas de Otimização Combinatória para obtermos mais resultados teóricos e práticos sobre esse problema no futuro. O Teorema de Hajós para Coloração Ponderada nos fornece ferramentas para descobrir limites inferiores para o número cromático ponderado de um grafo, a partir da aplicação de operações bem definidas sobre cliques. Esses limites podem ser inclusive úteis para a utilização de técnicas de *Branch-and-Bound* sobre a formulação proposta.

Um objetivo não atingido deste trabalho foi a determinação da complexidade de Coloração Ponderada em grafos P_4 -esparsos. Entretanto, com os resultados que apresentamos, sabemos como calcular em tempo polinomial o número cromático ponderado de todo grafo P_4 -esparso cuja decomposição modular não possui nós paralelos. Além disso, demonstramos um resultado sobre a união disjunta de grafos ponderados quaisquer, o que implica em um resultado sobre os nós paralelos de grafos P_4 -esparsos. Conjecturamos que o problema é *NP*-completo para P_4 -esparsos.

Os resultados polinomiais sobre Coloração Gulosa nas diversas classes de grafos apresentadas (P_4 -reduzíveis, P_4 -reduzíveis estendidos, P_4 -esparsos, P_4 -esparsos estendidos, P_4 -extensíveis, P_4 -leves, P_4 -arrumados, P_4 -carregados, P_4 -carregados estendidos e P_4 -carregados estendidos gordos) ampliam a quantidade de resultados de complexidade sobre esse problema. Esse fato é importante, visto que a maior parte dos trabalhos sobre Coloração Gulosa são sobre limites para o número guloso. Eles também nos incentivam a estudar outras classes de grafos cuja decomposição modular seja bem definida, pois apenas precisamos determinar como calcular o número guloso dos nós de vizinhança da árvore de decomposição modular.

Lista de Figuras

3.1	Árvores binomiais.	p. 19
4.1	Coloração ponderada ótima pode usar mais que $\chi(G)$ cores.	p. 22
4.2	Colocar vértices pesados na mesma cor pode reduzir o peso.	p. 23
5.1	Módulos de vizinhança gordos.	p. 32
5.2	Aranhas.	p. 45
5.3	Exemplo de aranha gorda.	p. 45
5.4	Quase-aranhas.	p. 46
6.1	Soma de Hajós.	p. 48
6.2	Identificação de vértices.	p. 48
6.3	Coloração ponderada ótima da união disjunta não é trivial.	p. 55
6.4	Coloração ponderada em grafos ponderados desconexos.	p. 56
7.1	Grafo P_4 -carregado estendido gordo, que não é P_4 -carregado estendido.	p. 67
7.2	Diagrama de Hasse.	p. 68
8.1	Exemplo de partição especial.	p. 71

Lista de Tabelas

3.1	Resumo - Complexidade	p. 18
4.1	Resumo - Complexidade	p. 29

Índice Remissivo

k -árvores parciais, 18, 24

árvore, 13, 18

binária, 13

binomial, 19

enraizada, 13

árvores, 24

algoritmo

aproximativo, 28, 71

guloso de coloração, 16, 29

aranha, 44

gorda, 45

magra, 45

prima, 45

arestas, 11

adjacentes, 11

múltiplas, 11

buraco, 12

cabeçe uma aranha, 45

caminho, 12

ciclo, 12

clique, 12

cografo, 14, 18, 24

coloração, 8

on-line, 17

first-fit, 17

gulosa, 8

parcimoniosa, 17

ponderada, 8, 22

por listas, 48

própria, 8

complemento de um grafo, 12

componente conexa, 12

conjunto

estável, 12

independente, 12

corda, 12

decomposição

modular, 15

descendentes de um nó, 13

fatores de uma partição de congruência, 14

filhos de um nó, 13

folhas, 13

grafo, 11

P_4 -carregado, 27

P_4 -carregado estendido, 66

P_4 -esparso, 69

k -construtível, 47

r -partido, 13

pseudo-split, 66

split, 13, 26

bipartido, 13, 18, 23

completo, 12

conexo, 12

cordal, 14, 27

de comparabilidade, 13, 24

de intervalos, 13, 19, 27

de permutação, 19

isomorfo, 12

linha, 13, 24

livre de P_n (C_n), 14, 20, 27

planar, 13, 28

primo, 14

quociente, 14

representativo, 14

simples, 11

vazio, 12

grau de um vértice, 11

hipercubo, 18

identificação de vértices, 48

ponderados, 49

isomorfismo, 12

laço, 11

- largura
 - em árvore, 18
- módulo, 14
 - de vizinhança, 15
 - forte, 14
 - paralelo, 15
 - série, 15
 - trivial, 14
- nó, 13
 - gordo, 32
 - interno, 13
- número
 - ocromático, 17
 - de Grundy, 16
- número cromático
 - on-line, 17
 - circular, 48
 - ponderado, 22
- ocorrência de uma cor, 26
- pai de um nó, 13
- partição
 - de congruência, 14
 - especial, 70
- partição de um conjunto, 12
- peso
 - de uma coloração, 9, 22
 - de uma cor, 9, 22
- produto lexicográfico, 20
- PTAS, 27, 28
- quase-aranha, 45
- representante de uma cor, 49
- soma de Hajós, 47
 - ponderada, 49
- subgrafo, 11
 - gerador, 11
 - induzido, 11
 - ponderado, 49
- submódulo maximal forte, 14
- vértices, 11
 - adjacentes, 11
 - conectados, 12
 - gêmeos, 14
- vizinhança
 - de um conjunto de vértices, 11
 - de um vértice, 11

Referências Bibliográficas

- [1] ARAÚJO, J., AND LINHARES SALES, C. Teorema de Hajós para Coloração Ponderada. In *XXXIX SBPO - Anais do Simpósio* (2007), XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- [2] ASTÉ, M., HAVET, F., AND LINHARES SALES, C. Grundy number and lexicographic product of graphs. In *Proceedings of International Conference on Relations, Orders and Graphs and their Interaction with Computer Science (ROGICS 2008)* (2008).
- [3] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. North-Holland, 1976.
- [4] BUER, H., AND MÖHRING, R. A fast algorithm for the decomposition of graphs and posets. *Math. Oper. Res.* 8 (1983), 170–184.
- [5] CAMPÊLO, M., CAMPOS, V., AND CORRÊA, R. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Discrete Applied Mathematics* 156 (2008), 1097–1111.
- [6] CAMPÊLO, M., CORRÊA, R., AND FROTA, Y. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters* 89 (2004), 159–164.
- [7] CHRISTEN, C., AND SELKOW, S. Some perfect coloring properties of graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 27 (1979), 49–59.
- [8] CHUDNOVSKY, M., ROBERTSON, N., SEYMOUR, P., AND THOMAS, R. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics* 164 (2006), 51–229.
- [9] DE BRUIJN, N. G., AND ERDŐS, P. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54 (1951), 371–373.
- [10] DE WERRA, D. Heuristics for graph coloring. *Computing* 7 (1990), 191 – 208.
- [11] DE WERRA, D., DEMANGE, M., ESCOFFIER, B., MONNOT, J., AND PASCHOS, V. T. Weighted coloring on planar, bipartite and split graphs: Complexity and improved approximation. *Lecture Notes in Computer Science* 3341 (2005), 896–907.
- [12] DEMANGE, M., DE WERRA, D., MONNOT, J., AND PASCHOS, V. T. Weighted node coloring: When stable sets are expensive. *Lecture Notes in Computer Science* 2573 (2002), 114 – 125.
- [13] ERDŐS, P., RUBIN, A. L., AND TAYLOR, H. Choosability in graphs. *Congress. Numer.* 26 (1980), 122–157.
- [14] ESCOFFIER, B., MONNOT, J., AND PASCHOS, V. T. Weighted coloring: futher complexity and approximability results. *Information Processing Letters* 97 (2006), 98–103.

- [15] FÜREDI, Z., GYÁRFÁS, A., SÁRKÖZY, G. N., AND SELKOW, S. Inequalities for the first-fit chromatic number. *Journal of Graph Theory* 59 (2008), 75–88.
- [16] GALLAI, T. Transitive orientierbare graphen. *Acta Math. Aced. Sci. Hung.* 18 (1967), 25–66.
- [17] GELLER, D., AND STAHL, S. The chromatic number and other parameters of the lexicographic product. *J. Combin. Theory Ser. B* 19 (1975), 87–95.
- [18] GIAKOUMAKIS, V. p_4 -laden graphs: A new class of brittle graphs. *Information Processing Letters* 60 (1996), 29–36.
- [19] GIAKOUMAKIS, V., AND VANHERPE, J. On extended p_4 -reducible and extended p_4 -sparse graphs. *Theoretical Computer Science* 180 (1997), 269–286.
- [20] GOYAL, N., AND VISHVANATHAN, S. np -completeness of undirected grundy numbering and related problems. Manuscript.
- [21] GRAVIER, S. A Hajós-like theorem for list coloring. *Discrete Mathematics* 152 (1996), 299–302.
- [22] GRUNDY, P. M. Mathematics and games. *Eureka* 2 (1939), 6C–8.
- [23] GUAN, D. J., AND ZHU, X. A coloring problem for weighted graphs. *Inform. Proc. Letters* 61 (1997), 77–81.
- [24] GYÁRFÁS, A., AND LEHEL, J. On-line and first fit colorings of graphs. *Journal of Graph Theory* 12 (1988), 217–227.
- [25] GYÁRFÁS, A., AND LEHEL, J. First fit and on-line chromatic number of families of graphs. *Ars. Combinatorica* 29C (1990), 168–176.
- [26] GYÁRFÁS, A., AND LEHEL, J. Effective on-line coloring of p_5 -free graphs. *Combinatorica* 11 (1991), 181–184.
- [27] HAJÓS, G. Über eine konstruktion nicht n -färbbarer graphen. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Math.-Natur.Reihe* 10 (1961), 116–117.
- [28] HALLDÓRSSON, M. M., AND SZEGEDY, M. Lower bounds for on-line graph coloring. *Theor. Comput. Sci.* 130, 1 (1994), 163–174.
- [29] HAMMER, P., AND SIMEONE, B. The splittance of a graph. *Combinatorica* 1 (1981), 375–384.
- [30] HEDETNIEMI, S. M., HEDETNIEMI, S. T., AND BEYER, T. A linear algorithm for the grundy (coloring) number of a tree. *Congressus Numerantium* 36 (1982), 351–363.
- [31] HOÀNG, C. *Perfect graphs*. PhD thesis, McGill University, 1985.
- [32] JAMISON, B., AND OLARIU, S. Recognizing p_4 -sparse graphs in linear time. *SIAM J. Comput.* 21 (1992), 381 – 406.
- [33] JAMISON, B., AND OLARIU, S. A tree representation for p_4 -sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics* 35 (1992), 115 – 129.

- [34] JAMISON, B., AND OLARIU, S. Linear time optimization algorithms for p_4 -sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics* 61 (1995), 155 – 175.
- [35] JENSEN, T. R., AND TOFT, B. Greedy coloring and the Grundy chromatic number of the hypercube. *Bulletin of the ICA* 26 (1999), 49–57.
- [36] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations Plenum* (1972), 85–103.
- [37] KIERSTEAD, H. A. The linearity of first-fit coloring of interval graphs. *SIAM J. Discret. Math.* 1, 4 (1988), 526–530.
- [38] KIERSTEAD, H. A. Coloring graphs on-line. *Lecture Notes in Computer Science* 1442 (1998), 281–305.
- [39] KIERSTEAD, H. A., PENRICE, S. G., AND TROTTER, W. T. On-line coloring and recursive graph theory. *SIAM Journal Discrete Math* 7 (1994), 72–89.
- [40] KIERSTEAD, H. A., PENRICE, S. G., AND TROTTER, W. T. On-line and first-fit coloring of graphs that do not induce p_5 . *SIAM J. Discret. Math.* 8, 4 (1995), 485–498.
- [41] KRAL, D. Hajós’ theorem for list coloring. *Discrete Mathematics* 287 (2004), 161–163.
- [42] LINHARES SALES, C., AND REED, B. Weighted coloring on graphs with bounded tree width. In *Annals of 19th International Symposium on Mathematical Programming* (2006), 19th International Symposium on Mathematical Programming.
- [43] LUND, C., AND YANNAKAKIS, M. On the hardness of approximating minimization problems. *J. ACM* 41, 5 (1994), 960–981.
- [44] MOHAR, B. Hajós’ theorem for colorings of edge-weighted graphs. *Combinatorica* 25 (2005), 65–76.
- [45] NARAYANASWAMY, N. S., AND SUBHASH BABU, R. A note on first-fit coloring of interval graphs. *Order* 25 (2008), 49–53.
- [46] NIKOLOPOULOS, S. D., AND PAPADOPOULOS, C. On the performance of the first-fit coloring algorithm on permutation graphs. *Inf. Process. Lett.* 75, 6 (2000), 265–273.
- [47] PEDROTTI, V. Decomposição modular de grafos não orientados. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2007.
- [48] SIMMONS, G. J. On the chromatic number of a graph. *Congress. Numer.* 40 (1983), 339–366.
- [49] TEDDER, M., CORNEIL, D., HABIB, M., AND PAUL, C. Simple, linear-time modular decomposition.
- [50] TELLE, J. A., AND PROSKUROWSKI, A. Algorithms for vertex partitioning problems on partial k -trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 10 (1997), 529–550.
- [51] VIZING, V. G. Colouring the vertices of a graph in prescribed colours. *Discret. Anal.* 29 (1976), 3–10. In Russian.

- [52] ZAKER, M. Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australian Journal of Combinatorics* 31 (2005), 325–330.
- [53] ZAKER, M. Results on the Grundy chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics* 306 (2006), 3166–3173.
- [54] ZHU, X. An analogue of Hajós’ theorem for the circular chromatic number (ii). *Graphs and Combinatorics* 19 (2003), 419–432.