

Leonardo Sampaio Rocha

b-colorações de grafos

Fortaleza, Ceará

Setembro/2009

Leonardo Sampaio Rocha

b-colorações de grafos

Dissertação de mestrado apresentada ao programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação (MDCC) da Universidade Federal do Ceará (UFC), pré-requisito para obtenção do título de mestre.

Orientador:

Cláudia Linhares Sales

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MDCC - MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PARGO - PARALELISMO, GRAFOS E OTIMIZAÇÃO

Fortaleza, Ceará

Setembro/2009

Abstract

A proper coloring of a graph is a *b-coloring* if each color class contains a *b-vertex*, that is, a vertex that has at least one neighbour in each other color class. The *b-chromatic number* of a graph $G = (V, E)$, denoted by $\chi_b(G)$, is the greatest integer k such that G admits a *b-coloring* with k colors. The *m-degree* of G , denoted by $m(G)$, is the largest integer m such that G has m vertices of degree at least $m - 1$. Note that $\chi_b(G) \leq m(G)$. This text is a survey on *b-colorings* of graphs. Moreover, we present original results for a special class of graphs, that we called *m-tight* graphs. A graph G is *m-tight* if it has exactly $m = m(G)$ vertices of degree exactly $m - 1$. Determining the *b-chromatic number* of a *m-tight* graph is a NP-hard problem. We introduce the notion of *b-closure* and *partial b-closure* of a *m-tight* graph and we use these concepts to develop polynomial algorithms for subclasses of *m-tight* graphs. These results lead to a general method that can be used to obtain similar results in other graph classes. We also study the *b-chromatic number* of the *lexicographic product* of graphs. In this sense, we show the exact values for the product $T[K_k]$, where T is a tree, and examine the value $\chi_b(G[K_k])$, where G is a *m-tight* graph. We also show that the *cacti*, graphs where every two distinct cycles have at most one vertex in common, are *b-continuous*.

Keywords: graph theory, vertex coloring, *b-colorings*, *m-tight* graphs, *b-closure*, lexicographic product, *b-continuity*.

Resumo

Uma coloração própria de um grafo é uma *b-coloração* se cada classe de cor contém um *b-vértice*, ou seja, um vértice com pelo menos um vizinho em cada uma das outras classes de cor. O *número b-cromático* de um grafo $G = (V, E)$, denotado $\chi_b(G)$, é o maior inteiro k tal que G admite uma *b-coloração* com k cores. O *m-grau* de G , denotado $m(G)$, é o maior inteiro m tal que G possui m vértices de grau maior ou igual a $m - 1$. Observe que $\chi_b(G) \leq m(G)$. Neste texto apresentamos alguns resultados acerca das *b-colorações* de grafos. Além disso, introduzimos os resultados que obtivemos estudando uma classe de grafos, que chamamos de grafos *m-estritos*. Um grafo é *m-estrito* se possui exatamente $m = m(G)$ vértices densos, cada um de grau $m - 1$. Determinar o número *b-cromático* de grafos *m-estritos* é um problema NP-difícil. Nós introduzimos a noção de *b-fecho* e de *b-fecho parcial* de um grafo *m-estrito* e utilizamos estes conceitos na obtenção de algoritmos polinomiais para subclasses dos grafos *m-estritos*. Estas demonstrações sugerem um método geral, que pode ser utilizado na demonstração de resultados similares em outras classes de grafos. Estudamos também o número *b-cromático* do *produto lexicográfico* de grafos. Determinamos o valor exato do produto $T[K_k]$, onde T é uma árvore e examinamos o valor $\chi_b(G[K_k])$, onde G é um grafo *m-estrito*. Demostramos ainda que os *cactos*, grafos tais que quaisquer dois ciclos distintos possuem no máximo um vértice em comum, são *b-contínuos*.

Palavras-chave: teoria dos grafos, coloração de vértices, *b-colorações*, grafos *m-estritos*, *b-fecho*, produto lexicográfico, *b-continuidade*.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha orientadora, professora Cláudia Linhares Sales. Não é exagero dizer que sem ela este trabalho não teria sido realizado. A confiança que ela sempre depositou em mim foi fundamental para que eu seguisse adiante, mesmo nos momentos mais difíceis. Espero poder levar adiante o seu exemplo, seja como orientadora, pesquisadora ou professora.

Agradeço à minha família, em particular aos meus pais, Newton de Oliveira Rocha e Francisca Lúcia Sampaio Rocha. A contribuição dos mesmos para este trabalho é imensurável. Agradeço por terem estado ao meu lado durante todos estes anos e por sempre terem me incentivado nos meus estudos. Sem isso, esse trabalho sequer teria sido iniciado.

Felizmente pude contar com diversos amigos. Agradeço em especial aos meus amigos Guilherme Oliveira Mota e Júlio César Silva Araújo, que me acompanharam durante a graduação e o mestrado, e com os quais sempre pude contar nos momentos de dificuldade. Agradeço ainda aos meus grandes amigos: André, Gabriel, Hesse, Leon, Paulo, Raquel, Rômulo e Vanessa. Sem eles tudo teria sido bem mais difícil.

Finalmente, agradeço ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelo apoio financeiro a este trabalho de mestrado. Além disso, ao projeto ALFA, por haver financiado um estágio de 3 meses no INRIA - Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, França.

Sumário

1	Introdução	p. 7
2	Definições e Notação	p. 10
2.1	Preliminares em teoria dos grafos	p. 10
2.2	Coloração de vértices	p. 12
2.3	Pré-coloração de vértices	p. 13
3	<i>b</i>-colorações de grafos	p. 15
3.1	Definição	p. 15
3.2	Comparação com outros parâmetros de coloração	p. 17
3.3	O <i>m</i> -grau de um grafo	p. 18
3.4	Peculiaridades das <i>b</i> -colorações	p. 19
4	Complexidade de problemas relacionados a <i>b</i>-colorações	p. 22
4.1	Definição dos problemas	p. 22
4.2	Complexidade no caso geral	p. 23
4.3	O número <i>b</i> -cromático de árvores	p. 25
5	A <i>b</i>-continuidade de grafos	p. 33
5.1	O <i>b</i> -espectro de grafos	p. 33
5.2	Grafos <i>b</i> -contínuos	p. 35
5.3	<i>b</i> -continuidade dos cactos	p. 37
6	As <i>b</i>-colorações de grafos <i>m</i>-estritos	p. 39

6.1	Grafos m -estritos	p. 39
6.2	O b -fecho	p. 40
6.3	Algoritmos polinomiais para classes específicas de grafos	p. 43
6.3.1	Árvores	p. 45
6.3.2	Complementos de grafos bipartites	p. 46
6.3.3	Grafos P_4 -esparcos	p. 46
7	O número b-cromático do produto lexicográfico de grafos	p. 48
7.1	O produto lexicográfico	p. 48
7.2	O produto $G[K_k]$	p. 50
7.2.1	Árvores	p. 51
7.2.2	Grafos m -estritos	p. 53
7.3	Considerações acerca do produto lexicográfico	p. 55
8	Considerações finais e trabalhos futuros	p. 56
	Índice Remissivo	p. 57
	Lista de Figuras	p. 58
	Referências Bibliográficas	p. 59

1 Introdução

Uma k -coloração, ou simplesmente *coloração*, de um grafo $G = (V, E)$ é uma função sobrejetora $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Os valores $\{1, 2, \dots, k\}$ são denominados *cores*. A *classe de cor* C_i é o conjunto dos vértices de G coloridos com a cor i . Uma coloração é *própria* se vértices adjacentes recebem cores distintas. As colorações de que tratam essa dissertação são próprias. O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor valor k tal que existe uma k -coloração de G .

O problema de determinar o número cromático de um grafo encontra aplicações, por exemplo, em problemas de alocação de frequências [19] e de escalonamento [12], além de problemas de computação [8] e matemática [42]. Com respeito à complexidade do problema, determinar se um grafo admite uma coloração com k cores, para um valor k dado, é um problema NP-completo [20]. Na verdade, esse problema é tão difícil que a menos que $P = NP$, não existe um algoritmo de aproximação polinomial para o número cromático de um grafo. Uma grande quantidade de algoritmos, exatos ou não, têm sido propostos, a exemplo dos presentes em [22, 23, 37].

Uma coloração de um grafo é uma b -coloração se cada classe de cor possui um vértice com pelo menos um vizinho em cada uma das outras classes de cor. Um vértice que satisfaz essa propriedade é um b -vértice. O *número b -cromático* de um grafo G , denotado por $\chi_b(G)$, é o maior inteiro k tal que G admite uma b -coloração com k cores.

Uma motivação para essas definições é a seguinte. Se c é uma coloração de um grafo G e existe uma classe de cor, digamos C_i , sem b -vértices, então podemos recolorir cada vértice em C_i com uma das cores que não aparece em sua vizinhança, de maneira que a coloração obtida permanece própria. Além disso, como todos os vértices em C_i são recoloridos, a coloração obtida utiliza uma cor a menos que a coloração inicial. Podemos repetir esse procedimento até encontramos uma b -coloração, situação em que o mesmo deixa de ser aplicável. O número b -cromático de G é uma medida do pior caso (isto é, o caso em que utilizamos a maior quantidade de cores) do procedimento descrito, quando aplicado ao grafo G .

As b -colorações foram primeiramente investigadas em [29] e, desde então, têm sido estu-

dadas por diversos autores [2, 10, 25, 34, 36]. Decidir se um grafo admite uma b -coloração com k cores, onde k é um valor dado como entrada, é um problema NP-completo mesmo para grafos bipartite conexos [36].

As b -colorações são o assunto principal deste texto. Apresentamos alguns resultados importantes relacionados às b -colorações e introduzimos os resultados que obtivemos ao longo deste trabalho de mestrado. Em particular, nossos resultados tratam de b -colorações de uma classe de grafos, que denominamos grafos m -estritos. Antes de definir a classe dos grafos m -estritos, necessitamos introduzir a noção de m -grau. O m -grau de um grafo G , denotado por $m(G)$, é o maior valor m tal que G possui m vértices com grau superior ou igual a $m - 1$. Um vértice com grau superior ou igual a $m(G) - 1$ é um vértice *denso*. Observe que em toda b -coloração de G com k cores, os b -vértices possuem grau superior ou igual a $k - 1$, uma vez que possuem vizinhos em cada uma das outras $k - 1$ classes de cor. Consequentemente, é fácil ver que $m(G)$ é um limite superior para $\chi_b(G)$.

Um grafo é m -estrito se possui $m = m(G)$ vértices densos, cada um de grau $m - 1$. A redução utilizada em [36] implica que o problema de decidir se um grafo m -estrito G satisfaz $\chi_b(G) = m(G)$ é NP-completo. Por outro lado demonstramos que este problema pode ser resolvido em tempo polinomial quando restringimos nossos grafos às árvores, aos complementos de grafos bipartite e os grafos P_4 -esparsos. Com exceção do caso dos complementos de grafos bipartite, esses resultados não são originais. Entretanto, o método geral sugerido por essas demonstrações pode ser utilizado para provar resultados similares em outras classes de grafos.

Também investigamos o comportamento do número b -cromático do produto lexicográfico de grafos. Determinamos o valor de $\chi_b(T[K_k])$, onde $T[K_k]$ é o produto lexicográfico de uma árvore T pelo grafo completo de ordem k . Estudamos ainda o valor $\chi_b(G[K_k])$, onde $G[K_k]$ é o produto lexicográfico de um grafo m -estrito G pelo grafo completo de ordem k e caracterizamos alguns casos em que $\chi_b(G[K_k]) < m(G[K_k])$.

O texto está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 são introduzidas as definições e notações de teoria dos grafos utilizadas ao longo do texto. No Capítulo 3 são definidas as b -colorações e apresentadas algumas considerações acerca das mesmas. O Capítulo 4 trata da complexidade de alguns problemas sobre b -colorações de grafos. No Capítulo 5 são introduzidos os conceitos de b -espectro e b -continuidade de grafos e alguns resultados relacionados a esses conceitos. Em particular, um primeiro resultado original nosso é apresentado neste capítulo, mostrando que os cactos são b -contínuos.

Nos capítulos seguintes apresentamos nossas principais contribuições. No Capítulo 6 introduzimos os grafos m -estritos e apresentamos os resultados que obtivemos sobre os mesmos.

No Capítulo 7 são expostos nossos resultados acerca do número b -cromático do produto lexicográfico de grafos. Finalmente, no Capítulo 8, as conclusões e trabalhos futuros são apresentados.

2 Definições e Notação

2.1 Preliminares em teoria dos grafos

Um *grafo* G é um par (V, E) , onde V é um conjunto de *vértices* e $E \subseteq V \times V$ um conjunto de *arestas*. A cardinalidade de $V(G)$ é a *ordem* de G , e a cardinalidade de $E(G)$ o *tamanho* de G . Utilizamos a notação uv para indicar a aresta (u, v) . Dada uma aresta $uv \in E(G)$, dizemos que os vértices u e v são as suas *extremidades*. Os grafos considerados neste texto não possuem *laços* (arestas com extremidades idênticas) e nem *arestas múltiplas* (duas arestas com as mesmas extremidades). Além disso as arestas não são orientadas, o que significa que uv e vu denotam a mesma aresta.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se $uv \in E(G)$, então u e v são *vizinhos* em G . O conjunto de todos os vizinhos de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $N_G(v)$, é chamado de *vizinhança* de v . O *grau* $d_G(v)$ de um vértice $v \in V(G)$ é a cardinalidade de $N_G(v)$. Utilizamos as notações $N(v)$ e $d(v)$ sem especificar a que grafo nos referimos, quando o mesmo estiver claro no contexto. O *grau mínimo* $\delta(G)$ é o valor do menor grau dentre os vértices de G , ao passo que o *grau máximo* $\Delta(G)$ é o valor do maior grau dentre os vértices de G . Um grafo é *k-regular*, $1 \leq k \leq |V(G)| - 1$, se todos seus vértices possuem grau k . O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} , é o grafo com $V(\overline{G}) = V(G)$ e $E(\overline{G}) = \{(u, v) \mid (u, v) \notin E(G)\}$.

Dizemos que H é *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$. Se $E(H) = \{uv \in E(G) \mid u, v \in V(H)\}$, H é um *subgrafo induzido* de G . Por outro lado, se H não é subgrafo induzido de G , então dizemos que G é *H-livre*, ou que G é livre de H .

Um *caminho* em um grafo G é uma sequência de vértices distintos $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ tais que $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\} \subseteq E(G)$. Dizemos que v_1 e v_k são as extremidades do caminho p . O grafo G é *conexo* se existe um caminho entre quaisquer dois vértices distintos de G . Uma *componente conexa* de G é um subgrafo conexo maximal. Denotamos por $dist(u, v)$, a *distância* de u a v , a quantidade de arestas do menor caminho entre u e v . O *caminho de ordem k*, denotado P_k , é o grafo com vértices $V(P_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ e arestas $E(P_k) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$.

..., $(v_{k-1}, v_k)\}$.

Um *ciclo* em um grafo G consiste em uma sequência de vértices distintos $c = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ tais que $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)\} \subseteq E(G)$. O *ciclo de ordem k* é o grafo denotado C_k , cujos vértices são $V(C_k) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ e arestas $E(C_k) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)\}$. Um grafo é dito *acíclico* se ele não possui um ciclo como subgrafo.

O *grafo completo de ordem n* , denotado por K_n , é o grafo em que todo par de vértices distintos está ligado por uma aresta. Uma *clique* de cardinalidade k em um grafo G é um conjunto de k vértices dois a dois adjacentes em G . Denotamos por $\omega(G)$ a cardinalidade da maior clique de G . Um *conjunto independente* de cardinalidade k em G é um conjunto de vértices dois a dois não adjacentes em G . A cardinalidade do maior conjunto independente de G é denotada por $\alpha(G)$.

Um *emparelhamento* de um grafo $G = (V, E)$ consiste em um conjunto de arestas $M \subseteq E(G)$ tais que nenhum par de arestas em M possui extremidades em comum. Um vértice é *saturado* por M se ele é a extremidade de alguma aresta em M . Dizemos que M é um *emparelhamento perfeito* se ele satura todas os vértices em $V(G)$.

Um grafo acíclico é chamado de *floresta*. Uma *árvore* é uma floresta conexa. Um grafo é *bipartite* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes. É fato conhecido que um grafo é bipartite se e somente se não possui um ciclo de ordem ímpar como subgrafo.

Um grafo é *cordal* se não contém ciclos induzidos de tamanho maior do que 3. Um vértice v em um grafo G é dito *simplicial* se v e sua vizinhança formam uma clique em G . Uma *ordem de eliminação perfeita* em um grafo G é uma ordenação dos vértices do mesmo tal que, para cada vértice v , v é simplicial no subgrafo de G induzido por v e os vértices que o sucedem na ordem. Um grafo é cordal se e somente se ele possui uma ordem de eliminação perfeita [18].

Dizemos que G é um *cactus* se quaisquer dois ciclos em G possuem no máximo um vértice em comum. Um grafo G é um *bloco* se a remoção de um vértice de G resulta em um grafo conexo. Um *bloco de um grafo G* é um subgrafo que é um bloco e é maximal com relação a esta propriedade. Um grafo é um cactus se e somente se todo bloco do mesmo consiste de uma aresta ou de um ciclo.

Um *cografo* é um grafo P_4 -livre. Um grafo é P_4 -*esparso* se qualquer conjunto de 5 vértices de G induz no máximo um P_4 . Assim, a classe dos grafos P_4 -esparcos contém estritamente a classe dos cografos.

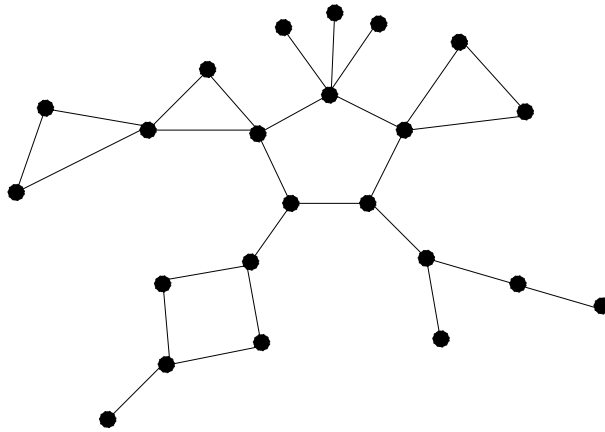


Figura 2.1: Um exemplo de um cactus

2.2 Coloração de vértices

Uma k -coloração, ou simplesmente *coloração*, de um grafo $G = (V, E)$ é uma função sobrejetora $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Os valores $\{1, 2, \dots, k\}$ são denominados *cores*. A *classe de cor* C_i é o conjunto dos vértices de G coloridos com a cor i . Uma coloração é *própria* se vértices adjacentes recebem cores distintas. Sempre que nos referimos a uma coloração de um grafo neste texto, pressupomos que a mesma seja própria.

O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor inteiro k tal que G admite uma k -coloração. Determinar se um grafo admite uma coloração com k cores, para um valor k dado como entrada, é um problema NP-completo [20]. Consequentemente, determinar $\chi(G)$, dado um grafo G , é um problema NP-difícil. Na verdade, a menos que $P = NP$, não existe um algoritmo de aproximação polinomial para o número cromático de um grafo [38]. Uma grande quantidade de algoritmos de coloração, exatos ou não, têm sido propostos, a exemplo dos presentes em [22, 23, 37].

Obviamente $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, pois um vértice possui no máximo Δ cores distintas em sua vizinhança e consequentemente $\Delta + 1$ cores são suficientes para colorir todos os vértices. Um importante resultado é o seguinte:

Teorema 2.1 (Brooks [4]). *Seja G um grafo conexo. Então, $\chi(G) \leq \Delta(G)$, a menos que G seja um ciclo ímpar ou um grafo completo, situações em que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.*

Como geralmente estamos interessados em minimizar a quantidade de cores utilizadas em uma coloração de um grafo, é natural considerar colorações em que a cor i é associada a um vértice se, e somente se, todas as cores menores que i são atribuídas a algum de seus vizinhos. De maneira formal, pode-se definir:

Definição 2.2 (Coloração de Grundy). Uma coloração c de um grafo G é uma *coloração de Grundy* se todo vértice $v \in V(G)$ satisfaz $c(v) = i \Leftrightarrow \forall 1 \leq j < i, \exists u \in N(v)$ tal que $c(u) = j$.

Pode-se mostrar que uma coloração é uma coloração de Grundy se, e somente se, a mesma pode ser obtida pelo algoritmo guloso aplicado a alguma ordenação dos vértices do grafo. O *algoritmo guloso* recebe um grafo cujos vértices estão ordenados e segue atribuindo a cada vértice a menor cor que não é usada nos seus vizinhos que o precedem na ordem.

Se c é uma $\chi(G)$ -coloração de G , o algoritmo guloso aplicado a uma ordem $\langle v_1, v_2, \dots, v_{|V(G)|} \rangle$, onde $i < j$ implica que $c(v_i) \leq c(v_j)$, fornece uma coloração de Grundy que utiliza $\chi(G)$ cores. Consequentemente, encontrar uma coloração com $\chi(G)$ cores de um grafo G se resume a encontrar uma ordenação adequada de seus vértices que minimize o número de cores utilizadas pelo algoritmo guloso. O seguinte parâmetro mede o pior caso, com relação à quantidade de cores utilizadas, da aplicação do algoritmo guloso a um grafo:

Definição 2.3 (Número de Grundy). O *número de Grundy* de um grafo G , denotado por $\Gamma(G)$, é o maior valor k para o qual G possui uma k -coloração de Grundy.

Se um vértice recebe a cor i em uma coloração de Grundy, então ele possui vizinhos coloridos com cada uma das cores em $\{1, \dots, i-1\}$, implicando que o mesmo possui no mínimo $i-1$ vizinhos. Assim, pode-se mostrar que:

$$\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta + 1$$

O número de Grundy foi primeiramente estudado por Christen e Selkow [9], e o leitor interessado em mais referências pode encontrá-las em [47].

2.3 Pré-coloração de vértices

Uma *pré-coloração* de um grafo G é uma função $p_c : W \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, onde $W \subset V(G)$ é o conjunto dos *vértices pré-coloridos* de G e $V(G) \setminus W$ é o conjunto dos *vértices descoloridos* de G . Observe que podemos ter $W = \emptyset$.

Dada uma pré-coloração p_c de um grafo G , em geral desejamos decidir se a mesma pode ser *estendida* a uma coloração própria do mesmo. De maneira formal:

PRÉ-COLORAÇÃO (PrEXT)

Instância: Grafo $G = (V, E)$, o conjunto dos vértices pré-coloridos $W \subset V(G)$ e uma pré-coloração $p_c : W \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$.

Questão: Existe uma coloração própria $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $p_c(v) = c(v)$, para todo $v \in W$?

Listamos agora alguns resultados conhecidos acerca da complexidade de PrEXT. Para tanto suponha que W_1, W_2, \dots, W_k são os subconjuntos de W cujos vértices são pré-coloridos com as cores $1, 2, \dots, k$, respectivamente. Além disso, considere ℓ -PrEXT como o problema PrEXT com a restrição adicional de que $|W_i| \leq \ell$, $1 \leq i \leq k$.

No caso em que $W = \emptyset$, PrEXT corresponde ao problema de determinar se G admite uma coloração própria com k cores, que já comentamos ser NP-completo. Os resultados seguintes encontram-se listados em [44]. PrEXT é NP-completo em grafos bipartite, mesmo quando $|W| = 3$. De fato, é NP-completo mesmo em grafos planares bipartite, para $k = 3$. Em grafos perfeitos o problema é polinomial quando $W_i = \emptyset$, para $i \geq 3$, e $|W_2| \leq 1$. Caso contrário, é NP-completo. PrEXT é polinomial em cografos, grafos split e complementos de grafos bipartite.

Estamos particularmente interessados na complexidade de 1-PrEXT, pois esse problema está relacionado ao método que apresentamos no Capítulo 6. Segue do que foi exposto no parágrafo anterior que 1-PrEXT é polinomial em cografos, grafos split, e complementos de grafos bipartites. Além disso, o mesmo é polinomial em grafos P_4 -esparcos [28], grafos cordais [11] e complementos de grafos de Meyniel [44]. Por outro lado, 1-PrEXT é NP-completo em grafos perfeitos [44].

3 *b*-colorações de grafos

3.1 Definição

Considere uma coloração de um grafo obtida por um método qualquer, como o algoritmo guloso. Com o intuito de reduzir a quantidade de cores utilizadas nessa coloração, várias estratégias podem ser propostas. Em particular, pode-se considerar as seguintes estratégias:

- **Estratégia *a*:** Se existem duas classes de cor X e Y tais que $X \cup Y$ é um conjunto independente, podemos colorir os vértices de Y com a cor da classe X , dessa forma eliminando uma classe de cor.
- **Estratégia *b*:** Se existe uma classe de cor X tal que cada vértice possui pelo menos uma cor (diferente da sua) que não aparece em sua vizinhança, podemos recolorir todos os vértices em X , eliminando portanto a classe de cor X .

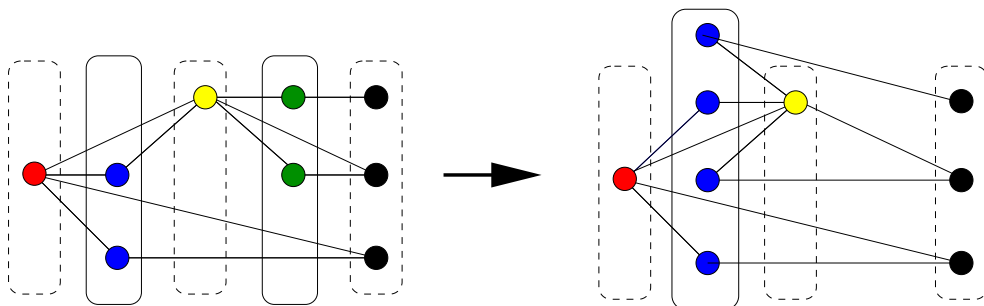


Figura 3.1: Aplicação da estratégia *a*

As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram uma aplicação dessas estratégias.

Obviamente, existem casos em que essas estratégias não podem ser aplicadas. Pode acontecer de nenhuma das classes de cor da coloração considerada serem compatíveis com a estratégia

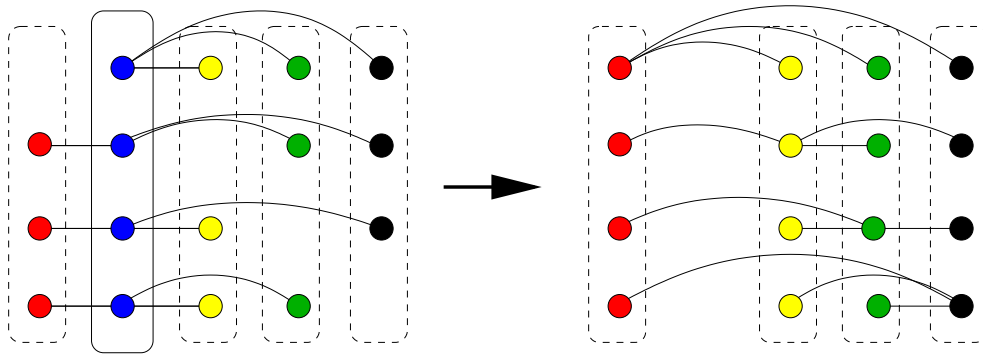


Figura 3.2: Aplicação da estratégia b

a (resp. estratégia b). Assim, após um número finito de aplicações da estratégia a (resp. estratégia b), encontramos uma coloração que não pode ser melhorada por meio da mesma. Isso acontece, no caso da estratégia a (resp. estratégia b), se a coloração encontrada satisfaz:

Definição 3.1 (a -coloração). Uma k -coloração c de um grafo G é uma a -coloração se, para quaisquer i, j ($1 \leq i \neq j \leq k$), existem u, v tais que $u \in C_i, v \in C_j$ e $(u, v) \in E(G)$.

Definição 3.2 (b -coloração). Uma k -coloração c de um grafo G é uma b -coloração se, para todo i ($1 \leq i \leq k$), existe $u \in C_i$ tal que, para todo j ($1 \leq j \leq k, j \neq i$), existe $v \in C_j$ com $(u, v) \in E(G)$ (dizemos que u é um b -vértice da cor i).

As colorações resultantes, nas Figuras 3.1 e 3.2, são exemplos de a -colorações e de b -colorações, respectivamente. Os seguintes parâmetros medem o pior caso de aplicação das estratégias descritas:

Definição 3.3 (Número a -cromático). O número a -cromático de um grafo G , denotado por $\chi_a(G)$, é o maior valor k para o qual G possui uma a -coloração com k cores.

Definição 3.4 (Número b -cromático). O número b -cromático de um grafo G , denotado por $\chi_b(G)$, é o maior valor k para o qual G possui uma b -coloração com k cores.

O número a -cromático foi primeiramente definido em [24]. Em [5] é mostrado que o problema de determinar se $\chi_a(G) \geq k$ para um dado valor k é NP-completo, mesmo no caso em que G é uma árvore. Algoritmos aproximativos para o número a -cromático podem ser encontrados em [7].

O número b -cromático foi primeiramente definido em [29], por Irving e Manlove, e tem sido amplamente estudado [2, 10, 25, 34, 36].

Para um grafo G , as seguintes desigualdades são válidas, uma vez que G não admite uma coloração com menos de $\chi(G)$ cores:

$$\chi(G) \leq \chi_a(G)$$

$$\chi(G) \leq \chi_b(G)$$

Os valores $\chi_a(G)$ e $\chi_b(G)$ podem ser arbitrariamente maiores que $\chi(G)$. O grafo da Figura 3.3 é uma árvore (e portanto satisfaz $\chi(G) = 2$) e admite uma b -coloração, que também é uma a -coloração, com 5 cores. Esse exemplo pode ser facilmente generalizado, de maneira a obtermos grafos com $\chi_a(G)$ e $\chi_b(G)$ arbitrariamente maiores que $\chi(G)$.

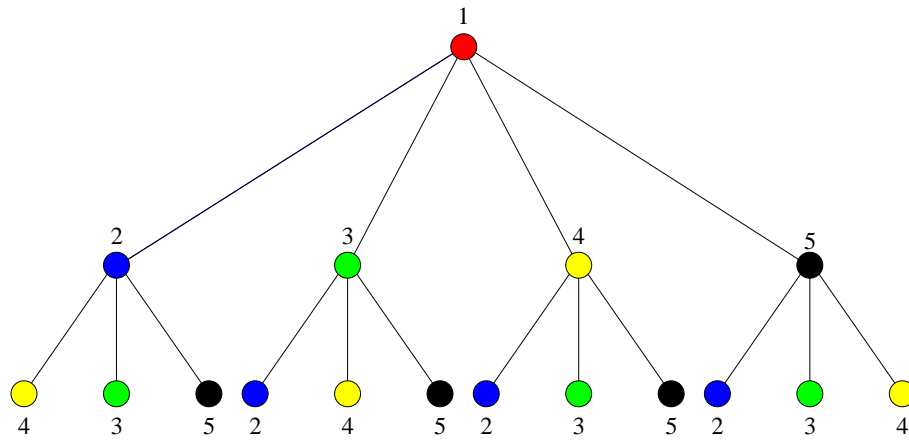


Figura 3.3: Um grafo com $\chi(G) = 2$ e $\chi_a(G) = \chi_b(G) = 5$

3.2 Comparação com outros parâmetros de coloração

Uma vez que as b -colorações são o assunto principal deste texto, é natural analisarmos as relações existentes entre o número b -cromático de grafos e outros parâmetros de coloração conhecidos, tais como o número a -cromático e o número de Grundy.

A estratégia a , como definida na seção anterior, é uma generalização da estratégia b . Consequentemente, uma b -coloração é necessariamente uma a -coloração, e a seguinte desigualdade vale para todo grafo G :

$$\chi_b(G) \leq \chi_a(G)$$

Logo, considerando esses parâmetros apenas como limites superiores para o número cromático de grafos, pode-se afirmar que o número b -cromático é um aprimoramento do número a -cromático.

Por outro lado, apesar de à primeira vista haver certa semelhança entre as colorações de Grundy e as b -colorações, pode-se mostrar que os parâmetros $\chi_b(G)$ e $\Gamma(G)$ não estão relacio-

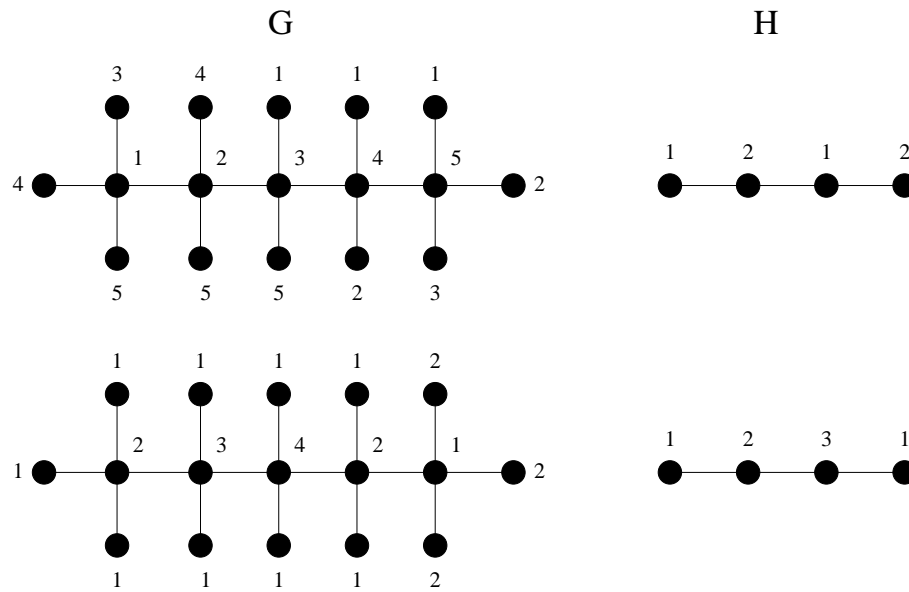


Figura 3.4: Respectivamente, $\Gamma(G) = 4 < \chi_b(G) = 5$ e $\Gamma(H) = 3 > \chi_b(H) = 2$

nados. Isso é ilustrado na Figura 3.4.

As seguintes desigualdades resumem essas considerações:

$$\chi(G) \leq \chi_b(G) \leq \chi_a(G)$$

$$\chi(G) \leq \chi_b(G), \Gamma(G) \leq \Delta + 1$$

3.3 O m -grau de um grafo

Seja G um grafo que admite uma b -coloração c com k cores. Nesse caso, há pelo menos k b -vértices em c , um para cada classe de cor. Além disso, estes vértices possuem grau superior ou igual a $k - 1$, pois os mesmos têm vizinhos em $k - 1$ classes de cor. Assim, se para algum valor $k' > 0$, o grafo em questão não contém k' vértices com grau superior ou igual a $k' - 1$, pode-se afirmar que ele não admite b -colorações com k' cores. Consequentemente, o maior valor k tal que G possui k vértices com grau $k - 1$ é um limite superior para o número b -cromático de G . Essa ideia é utilizada em [29] para definir o seguinte parâmetro:

Definição 3.5 (m -grau). O m -grau de um grafo G é o valor $m(G) = \max\{k \mid \text{existem } k \text{ vértices em } G \text{ com grau superior ou igual a } k - 1\}$.

Por exemplo, na Figura 3.4 temos $m(G) = 5$, ao passo que $m(H) = 3$. Chamamos os vértices de G com grau superior ou igual a $m(G) - 1$ de vértices *densos*, e os demais de *não-densos*.

Seja G um grafo e suponha que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, onde $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$.

É fácil de ver que $m(G)$ é o maior valor i tal que $d(v_i) \geq i - 1$. Dessa forma, o m -grau de um grafo pode ser calculado em tempo polinomial. Além disso, como para todo vértice $v \in V(G)$ temos que $d(v) \leq \Delta(G)$, pode-se concluir que $m(G) \leq \Delta(G)$, para todo grafo G .

O grafo da Figura 3.3 satisfaz $\chi_b(G) = m(G) = 5$. Já o grafo da Figura 3.5 satisfaz $\chi_b(K_{4,4}) = 2 < m(K_{4,4}) = 5$. Pode-se mostrar que o grafo completo bipartite $K_{k,k}$ satisfaz $m(K_{k,k}) - \chi_b(K_{k,k}) = k - 1$, implicando que os dois parâmetros, m -grau e número b -cromático, podem ser arbitrariamente distantes para um mesmo grafo.

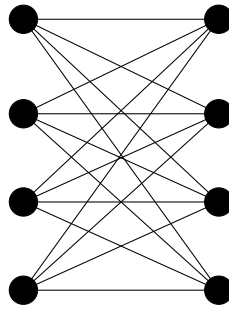


Figura 3.5: O grafo completo bipartite $K_{4,4}$ satisfaz $m(K_{4,4}) = 5$ e $\chi_b(K_{4,4}) = 2$

3.4 Peculiaridades das b -colorações

As b -colorações possuem algumas particularidades interessantes, quando comparadas a outros tipos de colorações.

É fato conhecido que, se H é um subgrafo induzido de G e $\chi(H) = k$, então $\chi(G) \geq k$. É esse fato que motiva a definição de grafos críticos para o problema de coloração tradicional. Um grafo é k -crítico se ele é minimal com relação à propriedade possuir número cromático k . Assim, qualquer grafo G que satisfaz $\chi(G) \geq k$ contém, necessariamente, um subgrafo k -crítico. No caso das b -colorações, pode-se mostrar que:

Proposição 3.6 ([36]). *Para qualquer valor positivo n , existe um grafo G e um subgrafo induzido H de G tal que $\chi_b(H) - \chi_b(G) > n$.*

Idéia da demonstração. Pode-se mostrar que o grafo G obtido do grafo bipartite completo $K_{n+4,n+4}$ por meio da remoção de um emparelhamento de $n + 3$ arestas possui número b -cromático 2. Além disso, ele contém H como subgrafo induzido, onde H é o grafo obtido do grafo bipartite completo $K_{n+3,n+3}$ por meio da remoção de um emparelhamento perfeito. Pode-se mostrar que $\chi_b(H) = n + 3$. Nesse caso, $\chi_b(H) - \chi_b(G) = n + 3 - 2 = n + 1$. \square

O grafo da Figura 3.6 é um dos grafos apresentados na demonstração da Proposição 3.6. No grafo dessa figura, a remoção de dois vértices resulta em um grafo com número b -cromático significativamente maior que o do grafo original. Essa característica das b -colorações inibe uma abordagem por meio de grafos críticos, como é feito no caso da coloração tradicional. O fato de um grafo G conter H como subgrafo induzido, onde $\chi_b(H) \geq k$, não implica que $\chi_b(G) \geq k$.

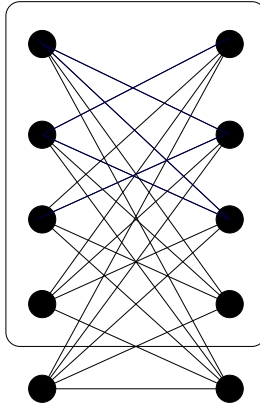


Figura 3.6: O grafo G satisfaz $\chi_b(G) = 2$, mas contém H , onde $\chi_b(H) = 4$

Uma outra singularidade das b -colorações é apresentada agora. Dado um grafo G , têm-se que o mesmo admite colorações com k cores, para todo valor $k \geq \chi(G)$. Entretanto, no caso das b -colorações, temos:

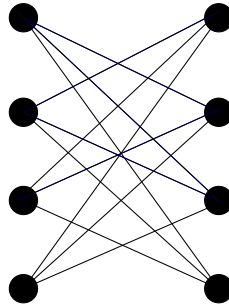


Figura 3.7: Um grafo que só admite b -colorações com $k \in \{2, 4\}$ cores

Proposição 3.7 ([36]). *Para qualquer valor positivo n , existe um grafo G que possui uma b -coloração com k cores se, e somente se, $k \in \{2, n\}$.*

Idéia da demonstração. O grafo G obtido do grafo bipartite completo $K_{n,n}$ por meio da remoção de um emparelhamento perfeito satisfaz a propriedade desejada. \square

O grafo da Figura 3.7 possui b -colorações exclusivamente com 2 ou 4 cores, e faz parte da família de grafos que é utilizada na demonstração da Proposição 3.7. Em [1], os autores afirmam não ter conhecimento de nenhuma outra definição de coloração com uma propriedade similar.

Essa característica das b -colorações é a principal motivação do Capítulo 5, onde tratamos da b -continuidade de grafos.

4 *Complexidade de problemas relacionados a b -colorações*

4.1 Definição dos problemas

Os seguintes problemas são considerados no restante deste capítulo:

B-COLORAÇÃO

Instância: Grafo $G = (V, E)$, inteiro $k > 0$.

Questão: Existe uma b -coloração de G que utilize k cores?

B-CROMÁTICO

Instância: Grafo $G = (V, E)$, inteiro $k > 0$.

Questão: $\chi_b(G) \geq k$?

Claramente B-CROMÁTICO se reduz a B-COLORAÇÃO, afinal responder se $\chi_b(G) \geq k$ equivale a questionar se existe uma b -coloração com l cores, para cada valor de l que satisfaça $k \leq l \leq m(G)$. Entretanto, não é óbvio, à primeira vista, se $\chi_b(G)$ ajuda a decidir se G possui uma b -coloração com k cores.

Na Seção 4.2, as complexidades de B-CROMÁTICO e B-COLORAÇÃO são analisadas e, na Seção 4.3, estudamos a complexidade dos mesmos quando as instâncias são restritas a árvores. Nessa seção, apresentamos a demonstração de que ambos são polinomiais em árvores [29]. Para tanto utilizamos um importante conceito, que generalizamos no Capítulo 6, o de árvore pivoteada.

4.2 Complexidade no caso geral

No artigo em que introduziram as b -colorações, Irving e Manlove também demonstram:

Teorema 4.1 ([29]). *Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k , determinar se $\chi_b(G) \geq k$ é NP-completo, mesmo se $k = \chi(G) + 1$.*

A demonstração desse resultado não é apresentada neste texto. Os autores utilizam uma redução polinomial de B-COLORAÇÃO ao seguinte problema:

Cobertura por 3-Conjuntos (C3C)

Instância: Conjunto $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, onde $n = 3k$ para algum $k \geq 0$, e uma coleção $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ de subconjuntos de S , onde $|T_i| = 3$ para cada i .

Questão: T possui uma cobertura exata para S ? Isto é, existe um conjunto $T' \subseteq T$ de k conjuntos dois-a-dois disjuntos cuja união seja S ?

Uma vez que C3C é NP-completo [20], B-CROMÁTICO e B-COLORAÇÃO também o são. Além disso, a redução apresentada pelos autores implica que é NP-completo decidir se $\chi_b(G) = \chi(G)$ para um grafo G qualquer, um indício de que os grafos com $\chi_b(G) = \chi(G)$ não possuem uma estrutura simples de ser reconhecida. Esse fato motiva o estudo dos grafos b -perfeitos, primeiramente estudados em [25]. Um grafo é b -perfeito se todo subgrafo induzido H do mesmo satisfaz $\chi(H) = \chi_b(H)$ e é b -imperfeito caso contrário. O leitor interessado em resultados acerca de grafos b -perfeitos pode consultar [25, 26, 40]. Uma interessante conjectura é proposta em [26], visando caracterizar os grafos que são minimais b -imperfeitos.

Uma outra redução é apresentada em [36], provando que os problemas B-CROMÁTICO e B-COLORAÇÃO são difíceis mesmo quando restritos a grafos bipartites conexos:

Teorema 4.2 ([36]). *Dado um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro k , é NP-completo decidir se existe uma b -coloração de G com k cores em grafos bipartites conexos, mesmo se $k = m(G) = \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Obviamente, o problema pertence a NP. Para mostrar sua NP-completude apresentaremos uma redução do seguinte problema. Dado um grafo bipartite 3-regular $G = (V, E)$ tal que $V(G) = A \cup B$, existe uma coloração de B com 3 cores tal que cada vértice de A possui um vizinho de cada cor? A NP-completude desse problema pode ser facilmente derivada do

problema de decidir se um grafo 3-regular admite uma coloração de suas arestas com 3 cores, que é NP-completo [27].

Seja $G = (A \cup B, E)$ um grafo 3-regular bipartite com $k - 3$ vértices na partição A . É mostrado agora como construir um novo grafo bipartite H a partir de G . Sejam v_1, v_2, \dots, v_{k-3} os vértices na partição A e $N(v_1) = \{w_1, w_2, w_3\} \subseteq B$ a vizinhança de v_1 . Adicione conjuntos independentes V_1, V_2 e V_3 , cada um de cardinalidade $k - 4$, à partição A e conecte w_i a todos os vértices em V_i , $i = 1, 2, 3$. Finalmente, adicione um conjunto independente $W = \{w_4, \dots, w_k\}$ a B e conecte v_i a todos os vértices em $W \setminus \{w_{i+3}\}$ para $i = 1, \dots, k - 3$.

Mostramos agora que H possui uma b -coloração com k cores se, e somente se, G admite uma coloração na qual B recebe 3 cores e cada vértice de A possui vizinhos com cada uma das 3 cores utilizadas na coloração de B .

Suponha que G admita uma coloração como especificada anteriormente. Além disso, sem perda de generalidade, considere $c(w_i) = i$, para $i = 1, 2, 3$. Partimos desta coloração de B e obtemos uma b -coloração de H com k cores. Atribua cores aos vértices de V_1, V_2, V_3 de modo que w_i seja um b -vértice de cor i , para $i = 1, 2, 3$. Além disso, faça $c(v_i) = c(w_{i+3}) = i + 3$, para $i = 1, \dots, k - 3$, e $c(v) = k$, para os demais vértices v de A . Procedendo dessa maneira, v_i é um b -vértice de cor $i + 3$, $i = 1, \dots, k - 3$. Além disso, é fácil de ver que esta coloração é própria. Logo, existe uma b -coloração de H com k cores.

Agora, suponha que H possua uma b -coloração com k cores. Então, $w_1, w_2, w_3, v_4, \dots, v_k$ são os b -vértices, uma vez que o restante dos vértices possui grau inferior a $k - 1$. Sem perda de generalidade, seja $c(w_i) = i$, para $i = 1, 2, 3$ e $c(v_i) = i + 3$, para $i = 1, \dots, k - 3$. Note que $d(v_i) = k - 1$, para $i = 1, \dots, k - 3$. Portanto, os vértices em $W = \{w_4, \dots, w_k\}$ são coloridos com $k - 3$ cores distintas. Suponha que exista um vértice em W colorido com a cor 1, digamos $c(w_4) = 1$. Uma vez que os vértices em $W \setminus w_4$ são adjacentes a v_1 , e uma vez que $c(v_1) = 4$, nenhum vértice em W possui cor 4. Consequentemente, deve haver pelo menos um vértice em $(B \setminus W) \setminus \{w_1, w_2, w_3\}$ colorido com a cor 4. Pode-se recolorir o grafo fazendo $c'(w_4) = 4$, $c'(w) = 1$, para $w \in B$ com $c(w) = 4$, e $c'(v) = c(v)$ no caso dos demais vértices. Essa nova coloração é uma b -coloração com k b -vértices, pois cada v_i , $i = 2, \dots, k - 3$, é adjacente a w_4 e possui um vizinho de cor 4 na coloração original. Além disso, nada muda na vizinhança de v_1 . Se existem vértices em W coloridos com as cores 2 ou 3, modifique a coloração de maneira análoga. Ao final os vértices de $B \setminus W$ são coloridos pelas cores 1, 2 e 3, de maneira que cada vértice de v_1, \dots, v_{k-3} tem um vizinho de cada cor em W . Logo, o resultado está demonstrado. \square

Observe que, analogamente ao que ocorre com os grafos que satisfazem $\chi_b(G) = \chi(G)$, esse resultado indica que os grafos com $\chi_b(G) = \Delta(G) + 1$ não possuem uma estrutura simples de ser reconhecida.

Como B-CROMÁTICO é NP-completo, é natural abordarmos este problema por meio de algoritmos aproximativos. Entretanto, até o momento não se conhece nenhum algoritmo aproximativo para o problema. O seguinte resultado afirma que o número b -cromático de um grafo não pode ser aproximado a um fator $120/113 - \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$.

Teorema 4.3 ([10]). *O número b -cromático de um grafo não é aproximável a um fator $\frac{120}{113} - \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$, a menos que $P = NP$.*

Na seção seguinte, apresentamos a demonstração de que B-CROMÁTICO e B-COLORAÇÃO são polinomiais em árvores. B-CROMÁTICO pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos P_4 -esparsos [3]. Em [36], é mostrado que existe apenas um conjunto finito de grafos k -regulares com número b -cromático menor que $k + 1$, para um valor fixo $k > 0$. Esse resultado serviu de motivação para o resultado em [32]: com exceção de 4 grafos, todo grafo 3-regular possui número b -cromático 4. Em [36] é demonstrado que B-COLORAÇÃO é polinomial para $k = 3$ em grafos bipartites planares e conexos e é deixado em aberto o problema de estender este resultado para $k = 3$ em grafos bipartites conexos. Até o momento não se conhece a complexidade dos problemas quando restritos a grafos cordais.

4.3 O número b -cromático de árvores

Diversos problemas em grafos que são NP-completos em suas formulações originais são polinomiais quando suas instâncias são restritas às árvores. O problema de determinar o número b -cromático de um grafo não é uma exceção e nesta seção é mostrado que o mesmo pode ser resolvido em tempo polinomial nesse caso. Os resultados aqui apresentados encontram-se em [29], onde os autores demonstram que $\chi_b(T) \in \{m(T), m(T) - 1\}$, para uma árvore T . No mesmo artigo é demonstrado que o valor $\chi_b(T)$ pode ser calculado em tempo polinomial. Para tanto, é mostrado que as únicas árvores que satisfazem $\chi_b(T) < m(T)$ são as que se enquadram na seguinte definição:

Definição 4.4 (Árvore pivoteada). Uma árvore $T = (V, E)$ é pivoteada se T possui exatamente $m(T)$ vértices densos e um vértice especial v , que chamamos de *pivô*, satisfazendo:

- v não é denso.

- Todo vértice denso é adjacente a v ou a um vértice denso adjacente a v .
- Qualquer vértice denso adjacente a v e a outro vértice denso tem grau $m(T) - 1$.

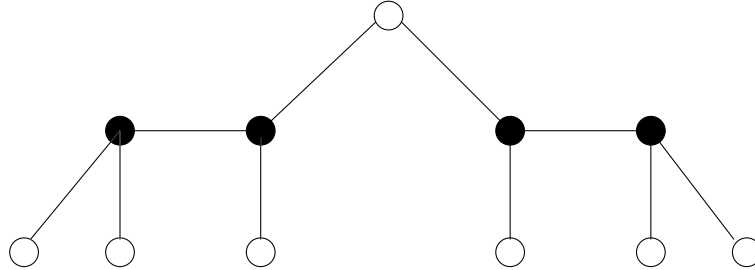


Figura 4.1: Um exemplo de árvore pivoteada, com $m(T) = 4$

Na figura 4.1 temos um exemplo de árvore pivoteada. Não podem haver dois pivôs em uma árvore, pois isso implicaria na existência de um ciclo na mesma, uma contradição. O seguinte resultado determina o número b -cromático das árvores pivoteadas:

Teorema 4.5 ([29]). *Seja T uma árvore pivoteada. Então $\chi_b(T) = m(T) - 1$.*

Demonstração. Primeiramente deve-se mostrar que T não admite uma b -coloração com $m = m(T)$ cores. Seja $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ o conjunto de vértices densos de T e suponha, por absurdo, que T possui uma b -coloração c com m cores. Nesse caso, o conjunto V' é necessariamente o conjunto dos b -vértices de c , uma vez que existem apenas m vértices densos. Suponha, sem perda de generalidade, que $c(v_i) = i$, $1 \leq i \leq m$. Seja v o pivô de T e seja $c(v) = k$. Nesse caso, v_k não é adjacente a v , e portanto existe um vértice v_t tal que $d(v_t) = m - 1$ e $vv_t, v_tv_k \in T$. Entretanto isso implica que v_t possui dois vizinhos coloridos com a cor k , e uma vez que $d(v_t) = m - 1$, temos que v_t não é b -vértice de c , uma contradição, já que existem apenas m vértices densos.

Será mostrado agora que T admite uma b -coloração com $m - 1$ cores. Considere que $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é ordenado de maneira que $V' = \{v_1, \dots, v_m\}$ seja o conjunto dos vértices densos, $\{v_1, \dots, v_p\}$ é o conjunto de vértices densos adjacentes a v , e $\{v_1, \dots, v_q\}$, para algum $q \leq p$, é o conjunto dos vértices densos adjacentes a v que possuem ao menos um vértice denso como vizinho. Se $p = 1$, v é vizinho de apenas um vértice denso, digamos w . Assim, w é necessariamente vizinho dos $m - 1$ vértices densos restantes, o que significa que $d(w) \geq m$, uma contradição com a Definição 4.4. Logo, temos necessariamente que $p \geq 2$, em uma árvore pivoteada. Por outro lado, $q \geq 1$, pois do contrário $p = m$, e v é vértice denso, uma contradição.

Como $p \geq 2$ e $q \geq 1$, os vértices v_1 e v_2 são adjacentes a v . Além disso, para algum r , $p + 1 \leq r \leq m$, existe um vértice denso v_r adjacente a v_1 . Faça $c(v_i) = i$, para $2 \leq i \leq m$,

$c(v) = r$, e $c(v_1) = 2$. Todos os outros vértices permanecem descoloridos. Mostramos agora como estender essa pré-coloração em uma b -coloração com $m - 1$ cores de T . Para $2 \leq i \leq m$, seja $R_i = \{2, 3, \dots, m\} \setminus \{i\}$ (as cores necessárias para a vizinhança de v_i).

Seja $C_i = \{c(v_j) : 1 \leq j \leq n \text{ e } v_j \in N(v_i) \text{ e } v_j \text{ não foi colorido}\}$ o conjunto das cores existentes na vizinhança de v_i e seja $U_i = \{v_j : m + 1 \leq j \leq n \text{ e } v_j \in N(v_i) \text{ e } v_j \text{ não foi colorido}\}$ o conjunto dos vértices descoloridos adjacentes a v_i . Devido à pré-coloração apresentada, v_i não é adjacente a dois vértices da mesma cor. Portanto temos $|C_i| + |U_i| = d(v_i) \geq m - 1 > m - 2 = |R_i|$. Uma vez que $C_i \subseteq R_i$, segue que $|U_i| \geq |R_i \setminus C_i|$. Então, se $R_i \setminus C_i = \{r_1^i, \dots, r_{n_i}^i\}$, para algum $n_i \geq 0$, podemos escolher um conjunto $\{u_1^i, \dots, u_{n_i}^i\} \subseteq U_i$ e fazer $c(u_j^i) = r_j^i$, para $1 \leq j \leq n_i$. Esse processo não atribui a mesma cor a dois vértices adjacentes, visto que dois vértices adjacentes e não-densos não podem ser ambos adjacentes a vértices densos. Este processo também não atribui mais de uma cor a um mesmo vértice, pois nenhum par de vértices densos tem um vizinho comum não-denso (exceto pelo pivô v , que já está colorido).

Os únicos vértices de grau superior ou igual a $m - 1$ são os m vértices densos, e os mesmos estão coloridos. Assim, qualquer vértice v que permanece descolorido satisfaz $d(v) < m - 1$, e conseqüentemente é fácil estender nossa b -coloração parcial ao restante do grafo, bastando atribuir a cada vértice descolorido uma cor ausente na sua vizinhança. Dessa forma, obtemos uma b -coloração com $m - 1$ cores de T . \square

Resta examinar o que ocorre em uma árvore não-pivoteada T . Pode ocorrer, neste caso, que existam mais de $m(T)$ vértices densos, e portanto pode-se realizar diferentes escolhas dos vértices que farão o papel de b -vértices em uma b -coloração com $m(T)$ cores. Dependendo da escolha realizada, podemos recair em uma situação similar à que ocorre nas árvores pivoteadas. Por exemplo, no grafo da Figura 4.2, os vértices densos $\{a, b, c, d, e\}$ não podem ser os b -vértices de uma b -coloração com 5 cores, pois neste caso não há nenhuma escolha de cor para o vértice v que leve a uma b -coloração de T com $m(T)$ cores (observe que 4 cores diferentes devem aparecer nas vizinhanças de b e d). A seguir, definimos uma escolha “ruim” de vértices densos em uma árvore não-pivoteada:

Definição 4.6. Seja $T = (V, E)$ uma árvore, e seja V' o conjunto de vértices densos de T . Suponha que V'' seja um subconjunto de V' com cardinalidade $m(T)$. Então V'' *obstrui* algum vértice $v \in V \setminus V''$ se:

1. Cada vértice em V'' é adjacente a v , ou a um vértice em V'' adjacente a v ; e
2. Qualquer vértice em V'' adjacente a v e a outro vértice em V'' têm grau $m(T) - 1$.

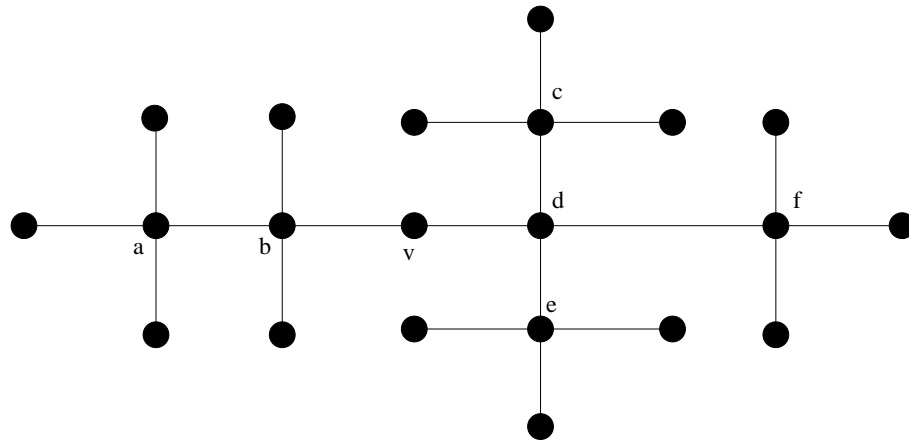


Figura 4.2: O conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ obstrui v , enquanto $\{a, b, c, e, f\}$ é um conjunto bom

Nos referimos a v como um *vértice obstruído* por V'' .

Similarmente ao que ocorre nas árvores pivoteadas, se, em uma árvore não-pivoteada T , um vértice v é obstruído por um conjunto V' ($|V'| = m(T)$) de vértices densos, então os vértices em V' não são os b -vértices de uma b -coloração de T com $m(T)$ cores. Porém, como T é não-pivoteada, o único caso em que isso é possível é quando temos uma quantidade maior do que $m(T)$ de vértices densos (caso contrário, V' é o conjunto dos vértices densos de T , e v se enquadra na definição de pivô, contradizendo o fato de que T é não-pivoteada), e podemos escolher outro conjunto de vértices densos para desempenhar o papel de b -vértices. A seguinte definição caracteriza uma “boa” escolha dos vértices densos de uma árvore não-pivoteada:

Definição 4.7 (conjunto bom). Seja $T = (V, E)$ uma árvore, e V' o conjunto de vértices densos de T . Suponha que V'' é um subconjunto de V' com cardinalidade $m(T)$. Então V'' é um *conjunto bom* com respeito a T se:

1. V'' não obstrui nenhum vértice em $V \setminus V''$; e
2. Qualquer vértice $u \in V \setminus V''$ tal que $d(u) \geq m(T)$ é adjacente a algum $v \in V''$ com $d(v) = m(T) - 1$.

Na figura 4.2, o conjunto $\{a, c, d, e, f\}$ é um exemplo de conjunto bom. Resta demonstrar que em uma árvore pivoteada sempre existe um conjunto bom:

Lema 4.8 ([29]). *Se $T = (V, E)$ é uma árvore não-pivoteada, então existe um conjunto bom em T .*

Demonstração. Seja V' o conjunto dos vértices densos de T . Pode-se escolher um subconjunto V'' de V' , com $|V''| = m$, tal que cada vértice em $V \setminus V''$ possui grau inferior a m . Tal conjunto

sempre existe, pois o contrário implica na existência de mais de m vértices com grau superior ou igual a m , o que nos leva a $m(T) > m$, uma contradição. Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, e suponha que seus elementos estejam ordenados de maneira que $V'' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. V'' necessariamente obstrui algum vértice $v \in V \setminus V''$, pois caso contrário, V'' é, por definição, um conjunto bom. Sem perda de generalidade, suponha que v_1, v_2, \dots, v_p , para algum $p \leq m$, sejam os elementos de V'' adjacentes a v , e que v_1, v_2, \dots, v_q , para algum $q \leq p$, sejam os elementos de V'' que são adjacentes a v e a pelo menos um outro elemento de V'' . Note que $p \geq 2$, caso contrário teríamos $d(v_1) \geq m$, já que cada um dos vértices v_2, \dots, v_m deve ser adjacente a v_1 (pela propriedade 1 da Definição 4.6), o que contradiz a propriedade 2 da Definição 4.6. Além disso, $q \geq 1$, caso contrário $p = m$, implicando que $d(v) \geq m$, o que contradiz a escolha de V'' . Consequentemente, existe um vértice $v_r \in V''$, para algum r , $p+1 \leq r \leq m$, adjacente a v_1 . Consideramos dois casos:

Caso 1: v é denso. Então $d(v) = m - 1$ pela escolha de V'' . Seja $W = (V'' \setminus \{v_2\}) \cup \{v\}$. Também pela definição de V'' , o único vértice que não está em W que pode ter grau superior ou igual a m é v_2 . Mas v_2 é adjacente a $v \in W$, e $d(v) = m - 1$, e portanto W satisfaz a propriedade 2 da Definição 4.7. Além disso, W satisfaz a propriedade 1 da Definição 4.7, pois nenhum vértice $w \in V \setminus (W \cup \{v_2\})$ adjacente a v_j , para algum j , $p+1 \leq j \leq m$, pode ser obstruído por W , já que v está a distância 3 de w . Nenhum vértice $w \in V \setminus W$, adjacente a v_j , para algum j , $1 \leq j \leq p$, pode ser obstruído por W , pois existe $v_k \in V''$, $1 \leq k \leq p$, adjacente a v , a uma distância 3 de w , já que $p \geq 2$. Finalmente, nenhum vértice w em $V \setminus W$, adjacente a v , pode ser obstruído por W , já que v_r está a uma distância 3 de w .

Caso 2: v não é denso. Se $|V'| = m$ então T é uma árvore pivoteada com pivô v , uma contradição. Logo, $|V'| > m$ e existe $u \in V' \setminus V''$. Seja $W = (V'' \setminus \{v_1\}) \cup \{u\}$. Suponha que W obstrua algum vértice, digamos x . No máximo um vértice que não pertence a W pode estar presente no caminho entre um par de vértices não-adjacentes em W , isto é, apenas o vértice x . Mas $v_1 \notin W$ e $v \notin W$ estão no caminho entre $v_2 \in W$ e $v_r \in W$. Esta contradição implica que W satisfaz a propriedade 1 da Definição 4.7. Além disso, W satisfaz a propriedade 2 da Definição 4.7, já que $d(v) < m - 1$ e $d(v_1) = m - 1$, e portanto qualquer vértice fora de W tem grau menor que m . \square

Finalmente, pode-se demonstrar:

Teorema 4.9 ([29]). *Se T é uma árvore não-pivoteada, então $\chi_b(T) = m(T)$.*

Demonstração. Seja $W = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, onde $m = m(T)$, um conjunto bom com respeito a T (este conjunto existe, pelo Lema 4.8). Atribua a cor i ao vértice v_i , $1 \leq i \leq m$. Mostramos que esta pré-coloração pode ser estendida a uma b -coloração parcial de T' onde cada vértice denso é

b -vértice, para então demonstrarmos que a última leva a uma b -coloração com m cores do grafo inteiro.

Seja $U = N(W) \setminus W$. Particionamos o conjunto U em subconjuntos da seguinte maneira: um vértice $u \in U$ é dito *interno* se existem vértices $v_i, v_j \in W$, a uma distância no máximo 3 um do outro, com u no caminho entre eles. Caso contrário, $u \in U$ é chamado *externo*. Primeiramente estendemos nossa coloração aos vértices internos e posteriormente aos vértices externos, para então estendê-la aos vértices de $V \setminus U$.

Suponha, sem perda de generalidade, que v_1, v_2, \dots, v_m estão indexados de maneira que, se $i < j$, então v_i tem pelo menos tantos vizinhos internos quanto v_j . Suponha que os vértices v_1, \dots, v_p possuem ao menos dois vizinhos internos, que v_{p+1}, \dots, v_q têm exatamente um vizinho interno, e que v_{q+1}, \dots, v_m não possuem vizinhos internos. Note que um ou ambos conjuntos $P = \{v_1, \dots, v_p\}$ e $Q = \{v_{p+1}, \dots, v_q\}$ podem ser vazios.

Iniciamos colorindo os vizinhos internos descoloridos de v_i , de maneira sequencial, de 1 até q . Primeiro lidamos com os vizinhos internos de v_1, \dots, v_p (presumindo que $P \neq \emptyset$). A demonstração é realizada por indução em i . Como passo indutivo, suponha que $i \leq p$, e que os vizinhos internos de v_1, \dots, v_{i-1} são coloridos de maneira que:

- se um vizinho interno u recebe cor k durante a coloração dos vértices internos de v_j , então o caminho de u a v_k passa por v_j .
- nenhum par de vizinhos de algum vértice v_j possui a mesma cor.
- nenhum par de vértices adjacentes possui a mesma cor.

Mostramos agora como colorir os vizinhos internos descoloridos de v_i de maneira que essas propriedades continuam válidas.

Sejam x_1, \dots, x_s os vértices em questão. Para cada j , $1 \leq j \leq s$, uma vez que x_j é interno, existe um vértice $v_{c_i} \in W$ com $c_i \neq i$, tal que v_{c_i} está a uma distância no máximo 2 de x_j , e x_j está no caminho de v_i a v_{c_j} . Consequentemente, os vértices v_{c_1}, \dots, v_{c_s} são todos distintos.

Caso 1: $s > 1$. Seja d_1, \dots, d_s uma permutação das cores c_1, \dots, c_s tal que $d_i \neq c_i$, $1 \leq i \leq s$, e aplique a cor d_j ao vértice x_j , $1 \leq j \leq s$. Então, é fácil de verificar que as propriedades desejadas ainda valem.

Caso 2: $s = 1$. Como v_i tem pelo menos dois vizinhos internos, existe algum vizinho interno, digamos y , já colorido, digamos com a cor d . Atribua a cor d a x_1 e a cor c_1 a y . Então, novamente, é fácil verificar que as propriedades continuam válidas.

Agora lidamos com os vizinhos internos descoloridos de v_{p+1}, \dots, v_q , supondo que $Q \neq \emptyset$. Sejam z_1, \dots, z_k tais vértices. Então nenhum v_i possui mais de um vizinho em z_1, \dots, z_k , e portanto ao atribuirmos cores a z_j , no máximo um vizinho de cada vértice v_i é colorido. Para nossos propósitos é suficiente mostrar que ao atribuir uma cor a cada vértice z_j , tenhamos:

- a coloração parcial é própria; e
- nenhum v_i de grau exatamente $m - 1$ possui dois vizinhos de uma mesma cor.

Para escolher uma cor para z_j , considere o conjunto de cores $C = \{c \mid v_c \in N(z_j)\} \cup \{c \mid \exists d \mid N(v_d) \text{ e } v_d \in N(z_j) \text{ e } d(v_d) = m - 1\}$, onde $1 \leq c, d \leq m$. Dado que escolhermos uma cor $c \notin C$, as propriedades são satisfeitas. Se $C = \{1, 2, \dots, m\}$, então z_j é pivô, uma contradição com o fato de T' ser não-pivoteada. Logo, sempre há uma escolha de cor disponível para cada z_j . Note que cada v_r , $p + 1 \leq r \leq q$, possui apenas um vizinho interno colorido dessa forma, de maneira que se $d(v_r) \geq m$, no máximo dois vértices adjacentes a v_r possuem a mesma cor. Tendo completado este passo, todos os vértices internos estão coloridos.

Agora lidamos com os vértices remanescentes de V , começando com um conjunto significativo dos vértices externos de U . Os vizinhos externos de cada vértice v_i , $1 \leq i \leq m$, podem ser coloridos de maneira independente, pois estes vértices não são adjacentes entre si e nem a nenhum vértice colorido, a menos de v_i . Se $d(v_i) = m - 1$, então todos os vértices internos de v_i possuem cores distintas, e se $d(v_i) \geq m$, então no máximo dois vértices internos de v_i possuem a mesma cor. Assim, pode-se formar conjuntos R_i , C_i e U_i como os da prova do Teorema 4.5, de maneira que podemos escolher cores para os vizinhos externos de v_i , assegurando que v_i se torne um b -vértice. Esse argumento se aplica a cada v_i , $1 \leq i \leq m$.

Finalmente, pode-se estender a coloração para os vértices remanescentes do grafo. Qualquer vértice descolorido v remanescente no grafo deve satisfazer $d(v) \leq m - 1$. Do contrário, se $d(v) \geq m$, então pela propriedade 2 da Definição 4.7, v é adjacente a algum vértice em W com grau $m - 1$, de maneira que v já está colorido. Para um vértice v de grau menor que m , temos que pelo menos uma das m cores não ocorre na sua vizinhança. Dessa forma, podemos colorir o restante dos vértices com as cores que não aparecem em suas vizinhanças. Assim, obtemos uma b -coloração de T com m cores. \square

Logo B-CROMÁTICO é polinomial em árvores. Além disso, as demonstrações fornecem algoritmos polinomiais para o cálculo de b -colorações com $m - 1$ e com m cores, respectivamente no caso de árvores pivoteadas e não-pivoteadas. Resta analisar a complexidade de B-COLORAÇÃO. No Capítulo 5, que trata da b -continuidade de grafos, apresentamos o resultado

de que, dado um grafo cordal G e uma b -coloração do mesmo com k cores, pode-se obter em tempo polinomial uma b -coloração de G com $k - 1$ cores, se $k \geq \chi(G) + 1$. As árvores são grafos cordais. Logo, dados uma árvore T e um valor k , para responder se T admite uma b -coloração com k cores basta determinar o valor de $\chi_b(T)$ e verificar se $2 \leq k \leq \chi_b(T)$. Consequentemente, B-COLORAÇÃO é polinomial em árvores.

5 A b -continuidade de grafos

5.1 O b -espectro de grafos

No Capítulo 3, a Proposição 3.7 afirma que, para qualquer valor positivo n existe um grafo G tal que o mesmo possui uma b -coloração com k cores se, e somente se, $k \in \{2, n\}$. Esta característica das b -colorações motiva a seguinte definição:

Definição 5.1 (b -espectro). O b -espectro de um grafo $G = (V, E)$ é o conjunto $S_b(G) = \{k \mid G \text{ admite uma } b\text{-coloração com } k \text{ cores}\}$.

Em [36], é questionado para quais conjuntos de inteiros S existem grafos com $S_b(G) = S$. Respondendo a esta questão, em [2] é demonstrado que:

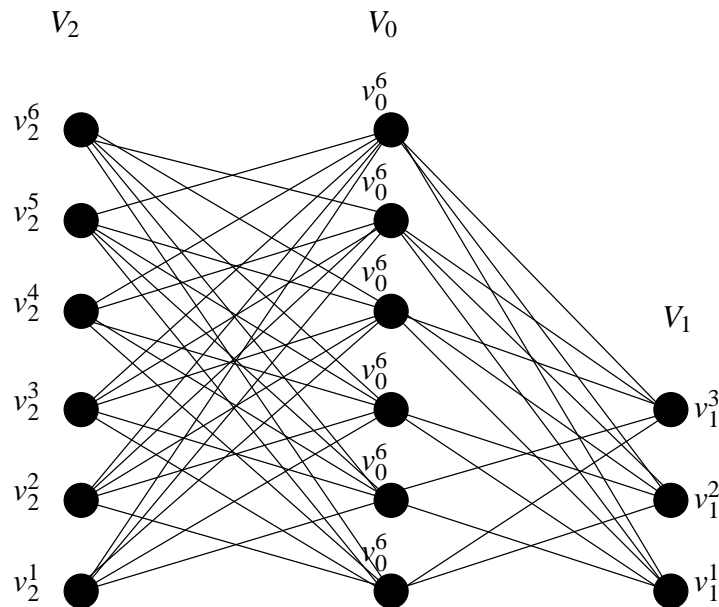


Figura 5.1: Um grafo com b -espectro $\{2, 4, 6\}$

Teorema 5.2 ([2]). Para todo conjunto finito não-vazio $I \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ existe um grafo G tal que $S_b(G) = I$.

Esboço da demonstração. Denotamos o grafo obtido do grafo completo bipartite $K_{p,p}$ pela remoção de um emparelhamento perfeito como $K'_{p,p}$ (note que, independente da escolha do emparelhamento perfeito, este grafo é único, a menos de isomorfismos). Além disso, dados dois grafos G e H , denotamos por $join(G,H)$ o grafo correspondente à união de G e H , acrescido de todas as arestas entre os dois grafos. Mais precisamente, $join(G,H) = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in G, v \in H\})$. Como citado na Proposição 3.7, $S_b(K'_{p,p}) = \{2, p\}$. Pode-se mostrar facilmente que $S_b(join(G,H)) = \{k + k' \mid k \in S_b(G), k' \in S_b(H)\}$.

Mostramos agora como construir um grafo com $S_b = I$, para um conjunto finito não-vazio $I \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. É suficiente considerar o conjunto I tal que o menor elemento do mesmo é 2, pois do contrário, quando $min(I) = \alpha > 2$, se existe um grafo com b -espectro $S_b(G) = \{2, n_1 - (\alpha - 2), \dots, n_p - (\alpha - 2)\}$ então $S_b(join(G, K_{\alpha-2})) = \{\alpha, n_1, \dots, n_p\}$. Podemos portanto restringir nossa atenção a apenas 3 casos:

Caso 1: $I = \{2\}$. É suficiente considerar $G = K_2$.

Caso 2: $I = \{2, n_1\}$. É suficiente considerarmos o grafo obtido de K_{n_1, n_1} pela remoção de um emparelhamento perfeito, que podemos mostrar facilmente possuir $S_b(K_{n_1, n_1}) = \{2, n_1\}$.

Caso 3: $I = \{2, n_1, \dots, n_p\}$, onde $2 < n_1 < \dots < n_p$ e $p \geq 2$. Construimos um grafo com $p + 1$ conjuntos independentes disjuntos. Este grafo $G = (\bigcup_{i=0}^p V_i, \bigcup_{i=1}^p E_i)$ é definido da seguinte forma (para um exemplo, considere a Figura 5.1):

1. $V_0 = \{v_0^1, \dots, v_0^{n_p}\}, V_p = \{v_p^1, \dots, v_p^{n_p}\}$
2. $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, V_i = \{v_i^1, \dots, v_i^{n_i-1}\}$
3. $\forall l, j$ com $1 \leq j \leq n_p$ e $1 \leq l \leq n_p, (v_0^l, v_p^j) \in E_p \Leftrightarrow l \neq j$
4. $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, \forall l, j$ com $2 \leq j \leq n_i - 1$ e $1 \leq l \leq n_p, (v_0^l, v_i^j) \in E_i \Leftrightarrow l \neq j$
5. $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}, \forall l \in \{2, \dots, n_i - 1\}, (v_0^l, v_i^1) \in E_i$.

Pode-se ver que G satisfaz às seguintes propriedades:

- (a) Qualquer aresta tem exatamente uma extremidade em V_0 (veja 3, 4 e 5).
- (b) O grafo induzido por $V_0 \cup V_p$ é isomorfo a K'_{n_p, n_p} (veja 3).
- (c) $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, o grafo induzido por $V_i \cup \{v_0^1, \dots, v_0^{n_i-1}\}$ é isomorfo a K'_{n_i-1, n_i-1} (veja 4 e 5).

- (d) $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, o grafo induzido por $\{v_0^{n_i}, \dots, v_0^{n_p}\} \cup (V_i \setminus \{v_i^1\})$ é o grafo completo bipartite $K_{n_p - (n_i - 1), n_i - 2}$ (veja 4).
- (e) $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$ não existe uma aresta conectando um vértice do conjunto $\{v_0^1, v_0^{n_i}, \dots, v_0^{n_p}\}$ a v_i^1 (veja 4 e 5).

Mostramos agora que o b -espectro de G é I .

Pela propriedade (a), G é bipartite, e logo $\chi(G) = 2$, o que nos garante que qualquer coloração de G com 2 cores é uma b -coloração. Como G contém apenas n_p vértices de grau superior ou igual a n_p , não existem b -colorações de G com mais de n_p cores. Para todo $k \in \{1, \dots, p-1\}$ nós definimos uma b -coloração c_k de G com n_k cores:

- $\forall j \in \{1, \dots, n_k - 1\}, c_k(v_0^j) = c_k(v_k^j) = j$
- $\forall j \in \{n_k, \dots, n_p\}, c_k(v_0^j) = 1$
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, com $i \neq k, \forall v \in V_i, c_k(v) = n_k$

Claramente, $\forall i \in \{1, \dots, p-1\}$, c_k é uma b -coloração de G . Os vértices b -cromáticos são $v_0^1, \dots, v_0^{n_k - 1}, v_p^1$. Finalmente, uma b -coloração com n_p cores pode ser obtida da seguinte forma:

- $\forall j \in \{1, \dots, n_p\}, c_p(v_0^j) = c_p(v_p^j) = j$
- $\forall i, 1 \leq i < p, \forall j \in \{1, \dots, n_i - 1\}, c_p(v_i^j) = j$.

Obviamente, c_p é uma b -coloração com n_p cores de G . Com isso, mostramos que $I \subseteq S_b(G)$. A demonstração de que $S_b(G) \subseteq I$ pode ser encontrada em [2].

□

5.2 Grafos b -contínuos

Pode-se classificar os grafos entre os que possuem e os que não possuem um b -espectro contínuo, segundo a definição:

Definição 5.3 (Grafo b -contínuo). Um grafo G é b -contínuo se $S_b(G)$ é um intervalo, isto é, $S_b(G) = \{k \in \mathbb{Z} \mid \chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)\}$.

Os grafos cordais, por exemplo, são b -contínuos, como demonstrado a seguir:

Teorema 5.4 ([17] e [46]). *Os grafos cordais são b -contínuos.*

Demonstração. É suficiente demonstrar que se um grafo cordal G possui uma b -coloração com $k > \chi(G)$ cores, então ele também possui uma com $k - 1$ cores.

Seja G um contra-exemplo. Considere uma b -coloração com $k > \chi(G)$ cores, e seja v um vértice simplicial de G . Note que v não pode ser um b -vértice, pois sua vizinhança induz uma clique de no máximo $\chi(G) - 1 < k - 1$ vértices. Remova v do grafo. Se ainda existe um b -vértice para cada uma das k classes de cores, continue a remover vértices até que nem todas as cores possuam um b -vértice. Suponha que o último vértice removido foi v , e que a cor de v é 1. Denote o grafo assim obtido por G' .

Então existem vértices w_1, w_2, \dots, w_s ($s \geq 1$) na vizinhança de v tais que cada um desses vértices é o único b -vértice da sua cor, e tais que v é o único vizinho remanescente de cor 1. Suponha que w_1 é de cor k . Altere a cor de w_1 para 1, e a de todos os outros vértices de cor k para uma cor distinta (eles não são b -vértices da cor k e portanto isso é possível). Como w_1, \dots, w_s induz uma clique, w_2, \dots, w_s são agora b -vértices para a b -coloração de G' com $k - 1$ cores. É fácil ver que podemos colorir os vértices removidos por uma cor qualquer que lhe falte em sua vizinhança, obtendo assim uma b -coloração de G com $k - 1$ cores.

□

Esse resultado é abrangente, uma vez que a classe dos grafos cordais engloba as árvores, os grafos de intervalo e os grafos split, por exemplo. Outros resultados similares são os seguintes:

Teorema 5.5 ([43]). *A menos do cubo H_3 e do grafo $\overline{C_{10}}$, qualquer grafo 3-regular é b -contínuo.*

Teorema 5.6 ([46]). *Seja G um grafo planar conexo com cintura pelo menos 5 e seja $m = m(G)$. Se G contém m vértices densos v_1, v_2, \dots, v_t tais que $\text{dist}(v_i, v_j) \geq 5$, para todo $i \neq j$, então $\chi_b(G) = m(G)$ e G é b -contínuo.*

Ao final deste capítulo demonstramos que os cactos são b -contínuos, utilizando uma demonstração similar à utilizada em [43], para demonstrar que as árvores são b -contínuas.

É natural questionar a complexidade do problema de decidir se um grafo é b -contínuo. Mais formalmente, analisamos agora o seguinte problema:

B-CONTINUIDADE

Instância: Grafo $G = (V, E)$.

Questão: G é b -contínuo?

Intuitivamente, é de se esperar que B-CONTINUIDADE seja NP-completo. No entanto, pode-se questionar se o problema é fácil quando são fornecidas b -colorações de G com $\chi(G)$ e $\chi_b(G)$ cores, juntas à instância do mesmo. Este não é caso, como mostra o resultado:

Teorema 5.7 ([2]). *Decidir se um grafo G é b -contínuo é NP-completo, mesmo quando são fornecidas b -colorações com $\chi(G)$ e $\chi_b(G)$ cores juntas à instância do problema.*

5.3 b -continuidade dos cactos

Em [43] é demonstrado que as árvores são b -contínuas. Nesta seção, é apresentada uma demonstração similar, desta vez mostrando que os cactos são b -contínuos. Para tanto, se faz necessária a seguinte definição, introduzida em [43]:

Definição 5.8 (vértice extremo). Seja G um grafo, e c uma b -coloração de G . Um b -vértice de c é um *vértice extremo* se o grafo obtido pela remoção de v possui uma componente conexa C_v^b que contém todos os demais b -vértices de c . Esta componente é a *componente b -cromática gerada por v* .

O seguinte lema assegura a existência de vértices extremos em qualquer b -coloração de um cactos:

Lema 5.9. *Sejam G um cactos e c uma b -coloração de G . Então, G possui pelo menos dois vértices extremos.*

Demonstração. Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{m(G)}\}$ o conjunto de vértices b -cromáticos de G com respeito a c e seja $d_{max} = \max_{v_i, v_j \in B} \text{dist}(v_i, v_j)$, onde $\text{dist}(u, v)$ representa a distância entre os vértices u e v em G .

Suponha que $\text{dist}(v_r, v_q) = d_{max}$. Mostramos agora que v_r e v_q são vértices extremos. Do contrário suponha, sem perda de generalidade, que v_r não é vértice extremo e que portanto $G \setminus \{v_r\}$ possui pelo menos duas componentes C_1 e C_2 tais que ambas contém b -vértices. Suponha que C_1 contém o vértice v_q . Então, o caminho em G de v_q a qualquer b -vértice em C_2 passa por v_r , o que contradiz o fato de $\text{dist}(v_r, v_q) = d_{max}$. \square

Finalmente, pode-se demonstrar:

Teorema 5.10. *Os cactos são b -contínuos.*

Demonstração. Seja G um cactus, e seja c uma b -coloração de G com $k > 3$ cores. Mostramos que podemos reduzir c a uma b -coloração c' de G com apenas $k - 1$ cores. De acordo com o Lema 5.9, G possui pelo menos dois vértices extremos. Seja v um vértice extremo de G e suponha, sem perda de generalidade, que c_1 é a cor de v . Além disso, considere que c_2 é a cor de um vértice u adjacente a v e pertencente à componente b -cromática C_v^b .

Como G é um cactus, pode-se recolorir o grafo $G \setminus C_v^b$ com as cores c_2, c_3 e c_4 , de maneira que qualquer vértice adjacente a v possui cor c_2 ou c_3 . Consideramos dois casos:

Caso 1: O vértice v é o único vértice b -cromático da cor c_1 em c , e portanto a cor c_1 perdeu seu único b -vértice. Então, para cada vértice w colorido com a cor c_1 , temos que uma das cores c_2, c_3, \dots, c_k não aparece em sua vizinhança. Logo, w pode ser recolorido com uma cor distinta de c_1 , que não ocorre em sua vizinhança. Nesse caso, obtemos uma b -coloração com as cores c_2, c_3, \dots, c_k .

Caso 2: O vértice v não é o único b -vértice de cor c_1 em c . Nesse caso, a coloração que obtivemos é uma b -coloração do grafo com k cores onde a classe de cor C_1 possui um b -vértice a menos. Podemos então escolher um novo vértice extremo e aplicar novamente a mesma ideia. Cada vez que um vértice extremo é recolorido, uma das classes de cor perde exatamente um b -vértice. Portanto, após um número finito de passos, uma das cores deve perder todos os seus b -vértices, o que nos leva ao caso 1.

Podemos então reduzir qualquer b -coloração de tamanho k a uma b -coloração de tamanho $k - 1$, para todo k , $4 \leq k \leq b(G)$. Temos, para um cactus G , que $\chi(G) = 2$ ou $\chi(G) = 3$. Logo, para qualquer valor $\chi(G) \leq k \leq b(G)$, existe uma b -coloração com k cores do cactus G . \square

6 As b -colorações de grafos m -estritos

6.1 Grafos m -estritos

Neste capítulo são examinadas as b -colorações dos seguintes grafos:

Definição 6.1 (Grafo m -estrito). Dizemos que um grafo G é m -estrito se ele possui exatamente $m(G)$ vértices densos, cada um de grau exatamente $m(G) - 1$.

É natural questionar se B-CROMÁTICO e B-COLORAÇÃO, os problemas definidos no Capítulo 4, são polinomiais quando restritos a grafos m -estritos. A resposta negativa é dada por meio do seguinte resultado:

Teorema 6.2. *Seja G um grafo m -estrito bipartite conexo. É um problema NP-completo decidir se $\chi_b(G) = m(G)$.*

Demonstração. O grafo H apresentado na demonstração do Teorema 4.2 é bipartite, conexo e m -estrito. Além disso, a redução é realizada sobre o problema de decidir se $\chi_b(H) = m(H)$. \square

A complexidade do problema no caso em que os grafos possuem m -grau fixo é tratada a seguir:

Teorema 6.3. *Seja k um inteiro fixo e G um grafo m -estrito tal que $m(G) \leq k$. Neste caso, decidir se $\chi_b(G) = m(G)$ pode ser feito em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja $V' = \{v \in V(G) \mid v \text{ é um vértice denso em ou é adjacente a um vértice denso em } G\}$. Observe que, como um vértice denso de G possui exatamente $m(G) - 1$ vizinhos, $|V'| \leq k(k - 1)$. Além disso, uma vez que existem exatamente $m = m(G)$ vértices densos no grafo, qualquer b -coloração de G com $m(G)$ cores, restrita aos vértices em V' , é uma b -coloração de $G[V']$ com $m(G)$ cores. Por outro lado, uma b -coloração de $G[V']$ com $m(G)$ cores pode ser facilmente estendida aos vértices em $V \setminus V'$, uma vez que os mesmos possuem grau inferior a $m(G) - 1$. Assim, decidir se $\chi_b(G) = m(G)$ equivale a decidir se $\chi_b(G[V']) = m(G)$. Como

$m(G) \leq k$, a última questão pode ser respondida em tempo polinomial, pois existem no máximo $m^{|V'|} \leq k^{|V'|} \leq k^{k(k-1)}$ atribuições possíveis dentre as $m(G)$ cores para os vértices em $G[V']$ e o resultado segue. \square

No restante deste capítulo são introduzidas as noções de b -fecho e de b -fecho parcial de um grafo m -estrito. Além disso, a noção de árvore pivoteada é generalizada por meio da definição de grafo m -estrito pivoteado. Por sua vez, essa definição é utilizada para caracterizar uma classe de grafos que satisfazem $\chi_b(G) < m(G)$. Usamos o b -fecho (e o b -fecho parcial) para elaborar algoritmos polinomiais para o problema de decidir se $\chi_b(G) = m(G)$, onde G pertence a determinadas subclasses dos grafos m -estritos.

6.2 O b -fecho

A idéia por trás da noção de b -fecho consiste em relacionar, dado um grafo m -estrito, o seu número b -cromático com o número cromático de seu b -fecho. O b -fecho de um grafo m -estrito é definido a seguir:

Definição 6.4 (*b -fecho de um grafo m -estrito*). Seja G um grafo m -estrito. O b -fecho de G , denotado G^* , é o grafo com conjunto de vértices $V(G^*) = V(G)$, e conjunto de arestas $E(G^*) = E(G) \cup \{uv \mid u \text{ e } v \text{ são vértices densos em } G\} \cup \{uv \mid u \text{ e } v \text{ são vértices com um vizinho denso comum em } G\}$.

O número b -cromático de um grafo m -estrito G está relacionado com $\chi(G^*)$ da seguinte forma:

Lema 6.5. *Se G é um grafo m -estrito, então $\chi_b(G) = m(G)$ se e somente se $\chi(G^*) = m(G)$.*

Demonstração. Suponha que G seja m -estrito, com $\chi_b(G) = m = m(G)$. Seja c uma b -coloração de G com m cores. Visto que $m \leq \omega(G^*) \leq \chi(G^*)$, temos que mostrar apenas que c é uma coloração própria de G^* para concluir que $\chi(G^*) = m(G)$. Considere uma aresta $uv \in E(G^*)$. Se $uv \in E(G)$, uma vez que c é uma coloração própria de G , temos $c(u) \neq c(v)$. Suponha, portanto, que $uv \notin E(G)$. Se u e v são ambos densos em G , como existem apenas m vértices densos, temos que $c(u) \neq c(v)$. Se u ou v é não-denso, a Definição 6.4 implica que u e v possuem um vizinho denso em comum, digamos d , em G . Como todo vértice denso de G possui grau $m - 1$ e c é uma b -coloração, u e v devem possuir cores distintas em c . Logo, c é uma coloração própria de G^* , e portanto $\chi(G^*) = m$.

Por outro lado, seja c' uma coloração própria de G^* com m cores. Nesse caso, como $E(G) \subseteq E(G^*)$, c' é também uma coloração própria de G . Resta apenas demonstrar que cada classe de cor de c' em G possui um b -vértice. Como os vértices densos de G formam uma clique em G^* , eles devem receber cores distintas em c' . Além disso, para um vértice denso d de G , temos que $N_G(d)$ é uma clique em G^* . Consequentemente d é um b -vértice. Assim, $\chi_b(G) = m$. \square

Como $\omega(G^*) > m(G)$ implica que $\chi(G^*) > m(G)$, temos:

Corolário 6.6. Se G é um grafo m -estrito e $\chi_b(G) = m(G)$, então $\omega(G^*) = \chi(G^*) = m(G)$.

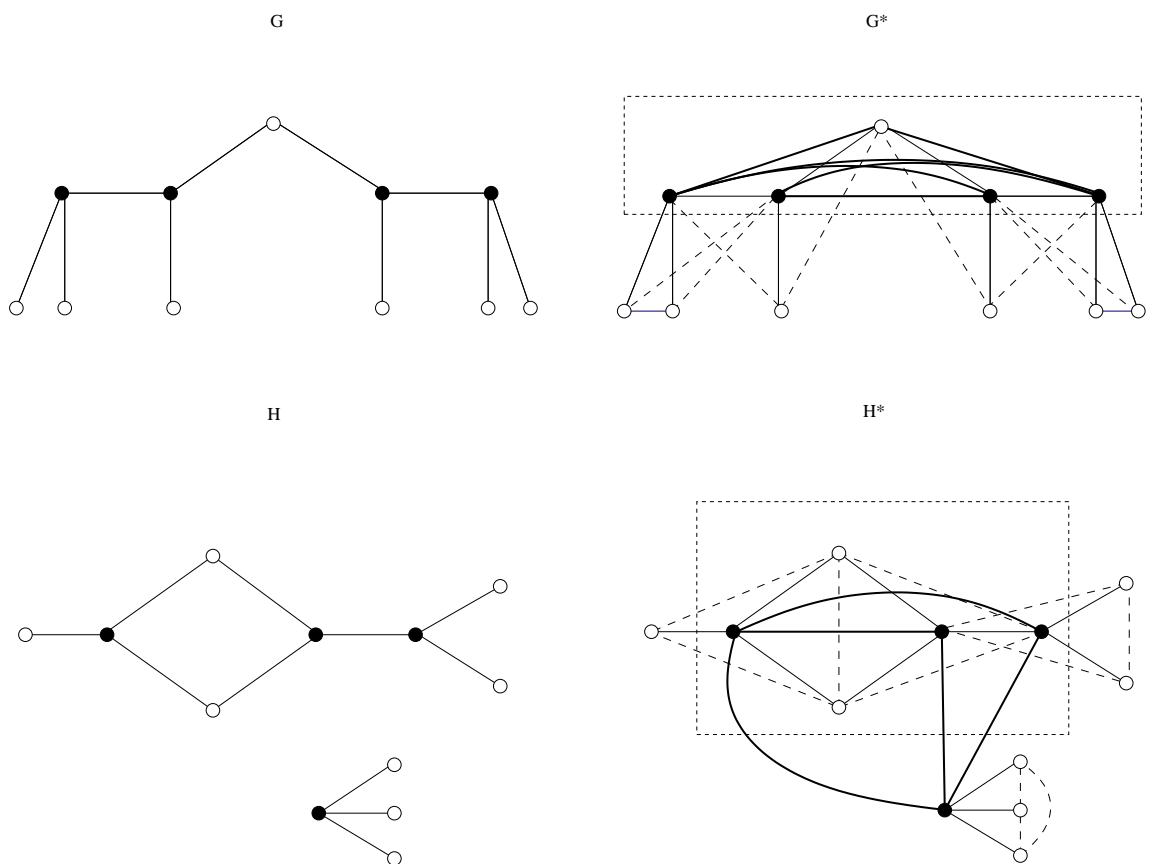


Figura 6.1: Dois grafos com $\chi_b < m$ e os seus respectivos b -fechos

Na Figura 6.3 são ilustrados dois grafos e os seus respectivos b -fechos. Nesta figura, as arestas escuras são as arestas adicionadas entre vértices densos e as tracejadas as que são adicionadas na vizinhança de cada vértice denso. As demais arestas pertencem ao grafo original. Note que os grafos do exemplo satisfazem $\chi_b(G) < m(G)$, e ambos possuem cliques de tamanho superior a $m(G)$ nos seus respectivos b -fechos (os vértices destas cliques são indicados na figura por um retângulo), implicando em $\chi(G^*) > m(G)$.

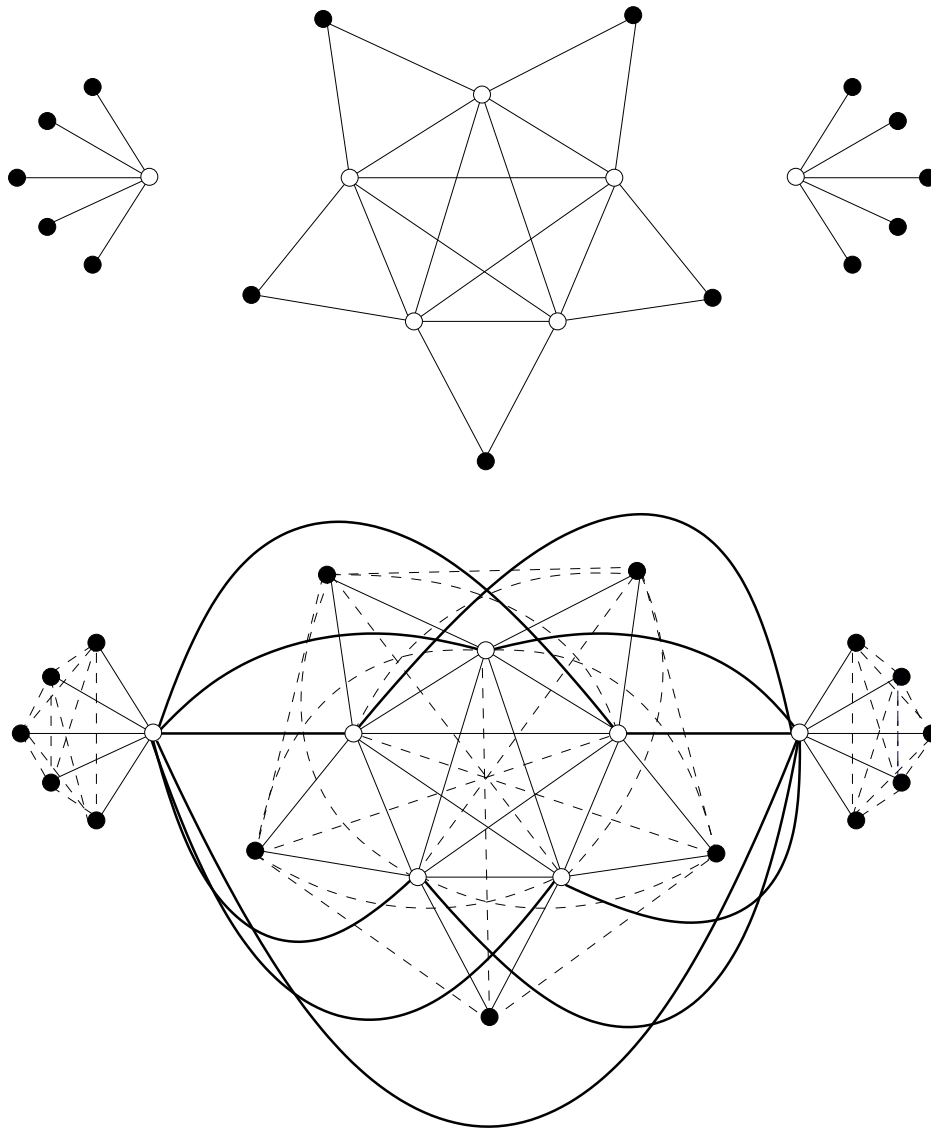


Figura 6.2: G é cordal, não-pivoteado, e satisfaz $\chi_b(G) < m(G)$ e $\chi(G^*) > \omega(G^*) = m(G)$

No Capítulo 4, mostramos que o conceito de árvore pivoteada é fundamental para determinarmos o número b -cromático das árvores. No que segue, vamos generalizar esse conceito, com o intuito de caracterizar uma família de grafos m -estritos satisfazendo $\chi_b(G) < m(G)$:

Definição 6.7 (Grafo m -estrito pivoteado). Seja G um grafo m -estrito. Dizemos que G é pivoteado se existe um conjunto $N \subset V(G)$ de vértices não-densos, $|N| = k$, e um conjunto de vértices densos $D \subseteq V(G)$, $|D| = m - k + 1$, que satisfazem:

- Para qualquer par $u, v \in N$, u é adjacente a v , ou existe um vértice denso w que é adjacente a u e a v ; e
- Para qualquer par $u \in N$, $d \in D$, u é adjacente a d ou u e d são ambos adjacentes a um vértice denso w (observe que w pode não pertencer a D).

Mostramos agora como a noção de grafo pivoteado está diretamente ligada à existência de cliques grandes, ou seja, de cardinalidade superior ao m -grau, no b -fecho de grafos:

Teorema 6.8. *Se G é um grafo m -estrito, então G é um grafo pivoteado se e somente se $\omega(G^*) > m(G)$.*

Demonstração. Primeiro, suponha que G é um grafo pivoteado, e sejam N e D os conjuntos apresentados na Definição 6.7. Mostramos que os vértices em $N \cup D$ formam uma clique em G^* . Sejam $u, v \in N \cup D$. Se $u, v \in D$, pela Definição 6.4 temos que $uv \in E(G^*)$. Se $u \in N, v \in N \cup D$, a Definição 6.7 implica que ou $uv \in E(G)$, ou existe um vértice denso que é adjacente a ambos. Segue, da Definição 6.4, que em ambos casos $uv \in E(G^*)$. Assim, o conjunto $N \cup D$ é uma clique de cardinalidade $m + 1$ em G^* .

Por outro lado, suponha que $\omega(G^*) > m$. Seja $S \subseteq V(G^*)$ uma clique de tamanho $m + 1$ em G^* . Seja $N = \{v \in S \mid v \text{ é não-denso em } G\}$ e $D = \{v \in S \mid v \text{ é denso em } G\}$. Mostramos agora que os conjuntos N e D satisfazem a Definição 6.7. Considere um par $u, v \in S$. Se $u, v \in D$ não há nada a demonstrar, pois a Definição 6.7 não impõe restrições entre os vértices de D . Se $u \in N, v \in D \cup N$, temos que $uv \in E(G)$ ou $ud, vd \in E(G)$, para algum vértice denso $d \in V(G)$. Logo, os conjuntos N e D satisfazem a Definição 6.7. \square

Corolário 6.9. *Se G é um grafo m -estrito pivoteado, então $\chi_b(G) < m(G)$.*

Demonstração. Como G é pivoteado, o Teorema 6.8 determina que $\omega(G^*) > m(G)$, e portanto $\chi(G^*) > m(G)$. Finalmente, o Lema 6.5 garante que $\chi_b(G) < m(G)$. \square

Logo, para um grafo pivoteado G temos $\chi_b(G) < m(G)$. Intuitivamente, espera-se que existam grafos que satisfaçam $\chi(G^*) > m(G)$, mas não $\omega(G^*) > m(G)$. O grafo G da Figura 6.2 é m -estrito, cordal e não-pivoteado, porém satisfaz $\chi_b(G) < m(G)$. Em contraste com o que acontece com os grafos pivoteados, onde uma clique de tamanho superior a $m(G)$ é formada no b -fecho dos mesmos, o b -fecho do grafo da Figura 6.2 possui tamanho de clique 7, mas contém um buraco ímpar (formado pelos cinco vértices não-densos da componente maior de G), que acarreta em $\chi(G^*) > 7$.

6.3 Algoritmos polinomiais para classes específicas de grafos

Relacionar o número b -cromático de um grafo G com o número cromático de G^* pode ser inútil, uma vez que determinar este último parâmetro é um problema NP-difícil. De fato, mesmo quando o número cromático de G pode ser determinado em tempo polinomial, este

pode não ser o caso para G^* . Por exemplo, o b -fecho de um grafo perfeito não necessariamente é perfeito. Esse é o caso do grafo na Figura 6.2. Uma maneira intuitiva de contornar esse problema consiste em acrescentar o número mínimo possível de arestas ao b -fecho de um grafo. Com esta motivação, definimos o b -fecho parcial como segue:

Definição 6.10 (b -fecho parcial de um grafo m -estrito). Seja G um grafo m -estrito. O b -fecho parcial de G , que denotamos G_p^* , é o grafo com vértices $V(G^*) = V(G)$ e arestas $E(G^*) = E(G) \cup \{uv \mid u \text{ e } v \text{ são vértices com um vizinho denso comum em } G\}$.

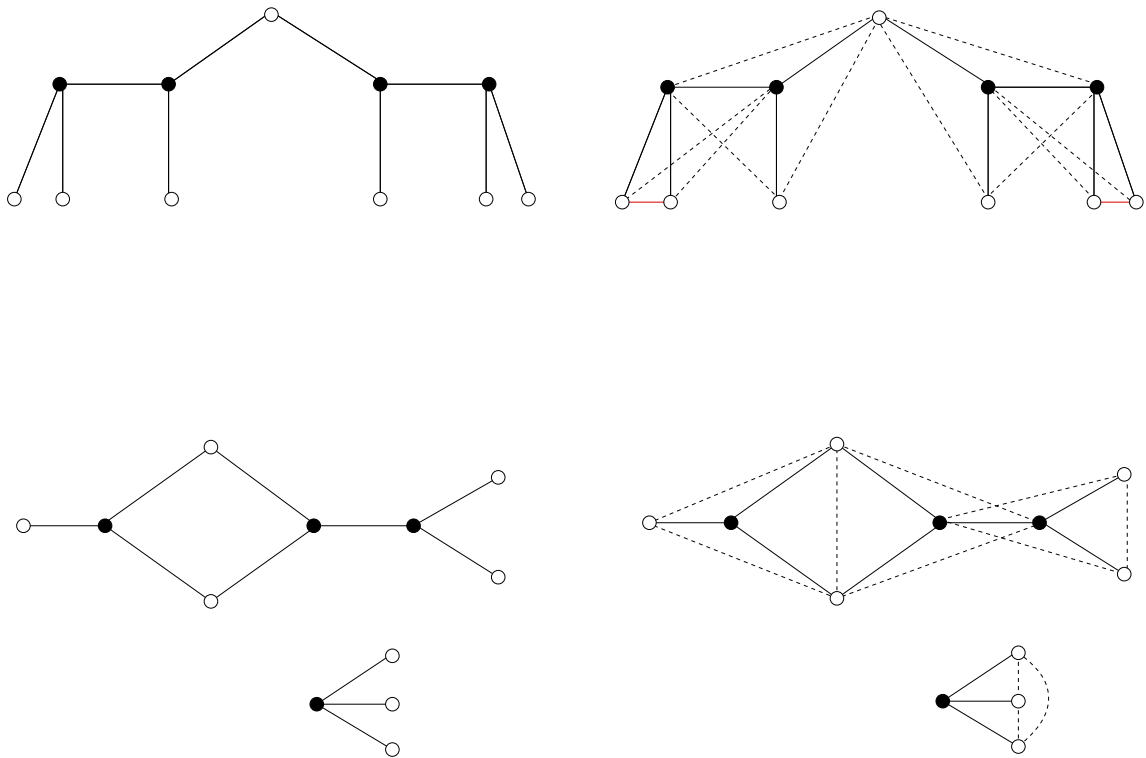


Figura 6.3: Dois grafos com $\chi_b < m$ e os seus respectivos b -fechos parciais

De maneira similar a que ocorre no caso do b -fecho, o b -fecho parcial de um grafo G também está relacionado à existência de determinadas colorações em G_p^* , o que é mostrado a seguir:

Lema 6.11. *Seja G um grafo m -estrito. Então $\chi_b(G) = m(G)$ se e somente se a pré-coloração de $\chi(G_p^*)$ onde cada vértice denso em G recebe uma dentre as $m(G)$ cores distintas pode ser estendida ao restante do grafo.*

Demonstração. O Lema 6.5 afirma que, para um grafo m -estrito G , $\chi_b(G) = m(G)$ se e somente se $\chi(G^*) = m(G)$. Nosso resultado segue trivialmente, observando-se que G^* admite uma $m(G)$ -coloração própria se e somente se os vértices que são densos de G são coloridos

com $m(G)$ cores distintas, pois os mesmos formam uma clique em G^* (pela definição de b -fecho). \square

No restante deste capítulo apresentamos um método geral para decidir, dado um grafo m -estrito G , se $\chi_b(G) < m(G)$. Obviamente, uma vez que este é um problema NP-completo, nosso método só pode ser aplicado a subclasses dos grafos m -estritos. Consideraremos nas próximas seções árvores, complementos de grafos bipartites e grafos P_4 -esparsos como ilustrações para o nosso método. Os resultados que apresentamos são conhecidos para árvores (como mostramos no Capítulo 4) e para grafos P_4 -esparsos (veja [3]). Entretanto, para os complementos de grafos bipartites o mesmo não era conhecido (uma caracterização para os complementos de grafos bipartites com $\chi_b(G) = k$, dada em [35], não leva a um algoritmo polinomial para o problema em questão).

6.3.1 Árvores

Lema 6.12. *Se T é uma árvore m -estrita, então T_p^* é cordal.*

Demonstração. Por contradição, suponha que T_p^* possui um ciclo induzido de tamanho k , $k > 3$. Seja $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ este ciclo (onde $v_i v_{i+1 \pmod k}$ são as arestas do mesmo). Afirmamos que, para cada par $v_i, v_{i+1 \pmod k}$, existe um caminho em T que conecta v_i a $v_{i+1 \pmod k}$. Como $v_i v_{i+1 \pmod k} \in E(T_p^*)$, temos que $v_i v_{i+1 \pmod k} \in E(T)$, e a afirmação é satisfeita, ou existe um vértice denso $d_i \in V(T)$ tal que $v_i d_i, d_i v_{i+1 \pmod k} \in E(T)$, e nesse caso nossa afirmação também é satisfeita. Observe que, uma vez que C não possui cordas, d_i não pode ser adjacente a nenhum outro vértice de C além de v_i e $v_{i+1 \pmod k}$. É fácil ver, a partir dessas observações, que existem dois caminhos distintos entre v_1 e v_k em T , contradizendo o fato de que T é uma árvore. \square

Teorema 6.13. *Se T é uma árvore m -estrita, podemos decidir em tempo polinomial se $\chi_b(T) = m(T)$.*

Demonstração. Seja S o conjunto dos vértices densos de T , e T_p^* o seu b -fecho parcial. Pelo Lema 6.11, para decidir se $\chi_b(T) = m(T)$ é suficiente colorir os vértices em S com $m(T_p^*)$ cores distintas e verificar se esta coloração parcial pode ser estendida ao restante do grafo. O grafo T_p^* é cordal, de acordo com o Lema 6.12, e portanto podemos verificar se a coloração pode ser estendida em tempo polinomial [11]. \square

6.3.2 Complementos de grafos bipartites

Lema 6.14. *Se G é um grafo m -estrito e complemento de um grafo bipartite, então G^* também é o complemento de um grafo bipartite.*

Demonstração. Seja $V(G) = X \cup Y$, onde X e Y são cliques em G . Como $V(G_p^*) = V(G)$, e uma vez que $E(G) \subseteq E(G_p^*)$, os conjuntos X e Y também são cliques em G_p^* , e portanto G_p^* é o complemento de um grafo bipartite. \square

Teorema 6.15. *Seja $G = (V, E)$ um grafo m -estrito e complemento de um grafo bipartite. Então existe um algoritmo polinomial para decidir se $\chi_b(G) = m(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo m -estrito e complemento de um grafo bipartite, e seja G^* o seu b -fecho. Pelo Lema 6.5, $\chi_b(G) = m(G)$ se e somente se $\chi(G^*) = m(G)$. O Lema 6.14 assegura que G^* é o complemento de um grafo bipartite, e portanto perfeito (um grafo G' é perfeito se $\chi(H) = \omega(H)$, para todo subgrafo induzido H de G'), podemos determinar o valor de $\chi(G^*)$ em tempo polinomial [21]. \square

6.3.3 Grafos P_4 -esparso

Lema 6.16. *Se G é um grafo m -estrito P_4 -esparso, então G_p^* é P_4 -esparso.*

Demonstração. Seja G um grafo m -estrito P_4 -esparso, e suponha, por contradição, que G_p^* não é P_4 -esparso. Então existe pelo menos um P_4 induzido em G_p^* que não existe em G , uma vez que G é P_4 -esparso. Seja $P = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 \in E(G_p^*)$, um tal P_4 em G_p^* . Mostraremos que, se isso ocorre, existe um conjunto de 5 vértices que induz dois P_4 's distintos em G . Para tanto, consideramos os seguintes casos:

Caso 1: $v_1v_2 \in E(G)$, $v_2v_3 \in E(G)$ e $v_3v_4 \notin E(G)$. Podemos concluir que v_3 e v_4 são ambos adjacentes a um vértice denso $w \in V(G)$. Note que $v_1w \notin E(G)$ (resp. $v_2w \notin E(G)$), caso contrário teríamos a aresta $v_1v_4 \in E(G_p^*)$ (resp. $v_2v_4 \in E(G_p^*)$), e P não poderia ser um P_4 induzido em G_p^* . Portanto $\{v_1, v_2, v_3, w, v_4\}$ induz um P_5 em G , uma contradição.

Caso 2: $v_1v_2 \in E(G)$, $v_2v_3 \notin E(G)$ e $v_3v_4 \in E(G)$. Então v_2 e v_3 são ambos adjacentes a um vértice denso $w \in V(G)$ (pela definição de b -fecho). Note que $v_1w, v_4w \notin E(G)$, pois isto implicaria que $v_1v_3 \in E(G_p^*)$ (resp. $v_2v_4 \in E(G_p^*)$), pela definição de b -fecho parcial. Dessa maneira, v_1, v_2, w, v_3, v_4 induz um P_5 em G , e temos a contradição desejada.

Caso 3: $v_1v_2 \notin E(G)$, $v_2v_3 \in E(G)$ e $v_3v_4 \notin E(G)$. Como $v_1v_2 \notin E(G)$, então v_1 e v_2 são ambos adjacentes a um vértice denso $w_1 \in V(G)$. Além disso, $w_1v_3 \notin E(G)$ (resp. $w_1v_4 \notin E(G)$), pois isto significaria que $v_1v_3 \in E(G_p^*)$ (resp. $v_1v_4 \in E(G_p^*)$), e P não seria um P_4 em G_p^* . Por um argumento semelhante, temos que v_3 e v_4 são ambos adjacentes a um vértice denso $w_2 \in V(G)$ (observe que w_1 e w_2 são distintos, pois do contrário, teríamos a aresta $v_1v_4 \in E(G_p^*)$). Caso $w_1w_2 \notin E(G)$, $\{v_1, w_1, v_2, v_3, w_2\}$ é um P_5 em G . Caso $w_1w_2 \in E(G)$, o conjunto $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_4\}$ possui dois P_4 's. Dessa forma, em ambos casos obtemos uma contradição.

Caso 4: $v_1v_2 \notin E(G)$, $v_2v_3 \notin E(G)$ e $v_3v_4 \in E(G)$. Como nos casos anteriores, existem vértices densos $w_1, w_2 \in V(G)$ tais que $v_1w_1, v_2w_1, v_2w_2, v_3w_2 \in E(G)$, e $v_1w_2, v_4w_2, v_3w_1, v_4w_1 \notin E(G)$. Se $w_1w_2 \in E(G)$, $\{v_1, w_1, w_2, v_3, v_4\}$ induz um P_5 em G . Do contrário, se $w_1w_2 \notin E(G)$, o conjunto $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3\}$ induz um P_5 em G . Em ambos casos, temos uma contradição.

Caso 5: $v_1v_2 \notin E(G)$, $v_2v_3 \notin E(G)$ e $v_3v_4 \notin E(G)$. Novamente, por argumentos similares aos que utilizamos nos casos anteriores, existem vértices densos $w_1, w_2, w_3 \in V(G)$ tais que $v_1w_1, v_2w_1, v_2w_2, v_3w_2, v_3w_3, v_4w_3 \in E(G)$, e $v_3w_1, v_4w_1, v_1w_2, v_4w_2, v_1w_3, v_2w_3 \notin E(G)$. Se $w_1w_3 \in E(G)$, o conjunto $\{v_1, w_1, w_3, v_3, v_4\}$ induz dois P_4 's em G . Se $w_1w_3 \notin E(G)$ e $w_1w_2, w_2w_3 \in E(G)$, então o conjunto $\{v_1, w_1, w_2, w_3, v_4\}$ induz dois P_4 's em G . Se $w_1w_3, w_1w_2 \notin E(G)$ e $w_2w_3 \in E(G)$, o conjunto $\{v_1, w_1, v_2, w_2, w_3\}$ induz dois P_4 's em G . Se $w_1w_3, w_1w_2, w_2w_3 \notin E(G)$, o conjunto $\{v_1, w_1, v_2, w_2, v_3\}$ induz dois P_4 's em G . Finalmente, se $w_1w_3, w_1w_2 \notin E(G)$ e $w_2w_3 \in E(G)$, o conjunto $\{v_1, w_1, v_2, w_2, w_3\}$ induz dois P_4 's em G . Em todos os casos, obtemos uma contradição. \square

Teorema 6.17. *Se G é um grafo m -estrito P_4 -esparso, então, existe algoritmo polinomial para decidir se $\chi_b(G) = m(G)$.*

Demonstração. Seja S o conjunto dos vértices densos de G , e G_p^* o seu b -fecho parcial. Pelo Lema 6.11, para decidir se $\chi_b(G) = m(G)$ é suficiente colorir os vértices em S com $m(G)$ cores distintas e verificar se esta coloração parcial pode ser estendida ao restante do grafo. O grafo G_p^* é P_4 -esparso, de acordo com o Lema 6.16, e portanto podemos verificar se a coloração pode ser estendida em tempo polinomial [28]. \square

7 O número b -cromático do produto lexicográfico de grafos

7.1 O produto lexicográfico

De maneira geral, o produto de dois grafos, digamos G e H , é o grafo cujo conjunto de vértices é $V(G) \times V(H)$ e cujas arestas são determinadas em função de $E(G)$ e $E(H)$. Dentre os produtos mais conhecidos pode-se citar o *produto cartesiano*, o *produto direto* e o *produto lexicográfico* de grafos. Colorações de grafos obtidos por meio destes produtos têm sido amplamente estudadas e o leitor interessado pode consultar [31].

Em [34] as b -colorações de grafos obtidos por meio do produto cartesiano são examinadas. Apresentamos neste capítulo os resultados que obtivemos acerca do número b -cromático do produto lexicográfico de grafos.

O produto lexicográfico é definido como segue:

Definição 7.1 (Produto lexicográfico). O produto lexicográfico $G[H]$ dos grafos G e H é o grafo com vértices $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ e arestas $E(G[H]) = \{((a,x), (b,y)) \mid ab \in E(G), \text{ ou } a = b \text{ e } xy \in E(H)\}$.

Alguns exemplos são apresentados na Figura 7.1. Nessa figura pode-se observar que os grafos $G[H]$ e $H[G]$ podem ser distintos e que portanto o produto lexicográfico não é comutativo.

Sejam G e H grafos, e considere o produto $G[H]$. Se $v \in V(G)$, o conjunto $X(v) = \{u \in V(G[H]) \mid u = (v, w) \text{ e } w \in H\}$ é o *conjunto dos vértices com origem em v* , enquanto $X^N(v) = \bigcup_{w \in N_G(v)} X(w)$ é o *conjunto dos vértices com origem em um vizinho de v* . É fácil de ver que, para $u, v \in V(G)$, temos $X(u) \cap X(v) = \emptyset$. Além disso, $V(G[H]) = \bigcup_{v \in G} X(v)$.

Denotamos por $G[H](v)$ o subgrafo de $G[H]$ induzido pelos vértices em $X(v)$. Pode-se verificar, pela Definição 7.1, que $G[H](v)$ é isomorfo a H e portanto pode-se referir a $G[H](v)$ como a *cópia de H com origem em v* .

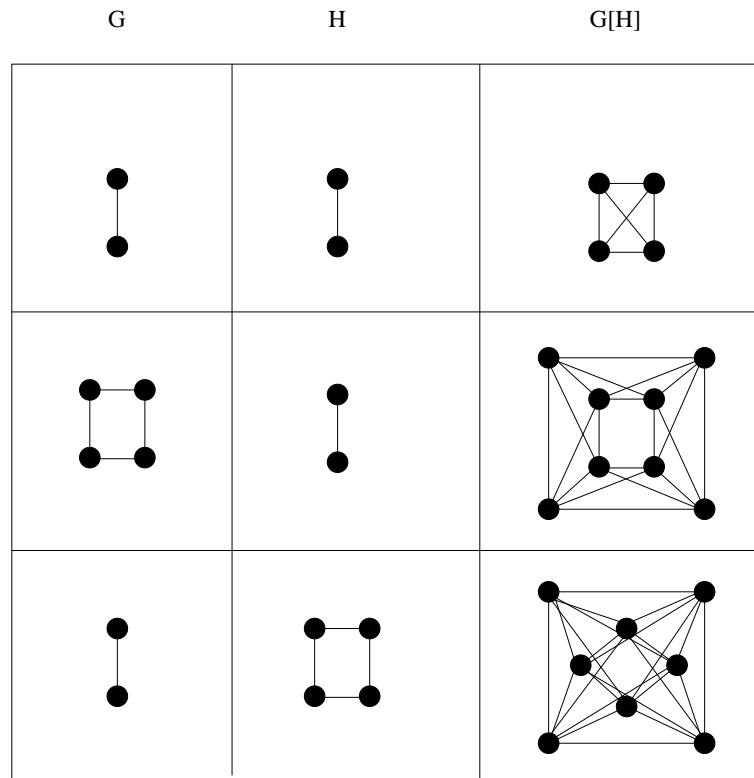


Figura 7.1: O produto lexicográfico de alguns grafos

No restante deste capítulo nos concentramos em determinar o valor de $\chi_b(G[H])$ em função dos valores $\chi_b(G)$ e $\chi_b(H)$. Tendo esse objetivo em vista, mostramos no lema a seguir como b -colorações de $G[H]$ podem ser obtidas a partir de b -colorações existentes de G e H :

Lema 7.2. *Sejam G e H grafos. Se G e H admitem b -colorações com p e q cores, respectivamente, então $G[H]$ admite uma b -coloração com $p \cdot q$ cores.*

Demonstração. Seja c_G uma b -coloração de G cujas cores são $\{1, 2, \dots, q\}$. Além disso, seja C_i , para $1 \leq i \leq q$, um conjunto de cores com cardinalidade p . Considere que esses conjuntos de cores são escolhidos de maneira que $C_j \cap C_k = \emptyset$, para $j \neq k$. No que segue, é apresentada uma b -coloração de $G[H]$ que utiliza as $p \cdot q$ cores em $\bigcup_{1 \leq i \leq q} C_i$.

Dado um vértice $v \in V(G)$, $G[H](v)$ é isomorfo a H e portanto existe uma b -coloração de $G[H](v)$ com p cores. Reproduza essa coloração em $G[H](v)$, utilizando as cores do conjunto C_i , onde $i = c_G(v)$. Denote por $c_{G[H]}$ a coloração de $G[H]$ obtida procedendo dessa forma com cada vértice de $V(G)$.

Afirmamos que $c_{G[H]}$ é própria. Do contrário, suponha que $(u, v), (u', v') \in V(G[H])$ são vértices adjacentes com cores idênticas em $c_{G[H]}$. Se $u = u'$, então $(u, v), (u', v') \in V(G[H](u))$, e a b -coloração de H assegura que (u, v) e (u', v') recebem cores distintas. Logo, $u \neq u'$. Se

$c_G(u) \neq c_G(u')$, então $C_{c_G(u)} \cap C_{c_G(u')} = \emptyset$, e as cores de (u, v) e (u', v') são necessariamente distintas em $c_{G[H]}$. Logo, $c_G(u) = c_G(u')$ e uma vez que c_G é própria, $uu' \notin E(G)$. Nesse caso, a Definição 7.1 implica que (u, v) e (u', v') são adjacentes em $G[H]$ se e somente se $u = u'$ e $vv' \in E(H)$, uma contradição com o fato de que $u \neq u'$. Logo, $c_{G[H]}$ é própria.

Mostramos agora que $c_{G[H]}$ é uma b -coloração de $G[H]$. Para tanto é suficiente mostrar que toda cor em $c_{G[H]}$ possui um b -vértice. Considere a cor i e suponha, sem perda de generalidade, que $i \in C_k$ e que u é o b -vértice de cor k em c_G . Pela maneira como definimos $c_{G[H]}$, o grafo $G[H](u)$ foi colorido de maneira que existe um vértice $(u, v) \in G[H](v)$ que é b -vértice de cor i com relação às cores em C_k . Afirmamos que (u, v) possui um vizinho de cor k' , para $1 \leq k' \neq i \leq p \cdot q$. Suponha, sem perda de generalidade, que $k' \in C_t$. Se $t = k$, já havíamos comentado que (u, v) é b -vértice com relação às cores em C_k , e a afirmação é satisfeita. Resta considerar o caso $t \neq k$. Como u é b -vértice em c_G , o mesmo possui um vizinho, digamos $u' \in V(G)$, tal que $c_G(u') = t$. Pela Definição 7.1, (u, v) é adjacente a todos os vértices em $G[H](u')$. Portanto, uma vez que todas as cores em C_t aparecem em $G[H](u')$ e $k' \in C_t$, (u, v) possui um vizinho colorido com a cor k' em $c_{G[H]}$ e a afirmação é satisfeita. Consequentemente, toda classe de cor de $c_{G[H]}$ possui um b -vértice, e o lema está demonstrado. \square

Como consequência do Lema 7.2, temos:

Corolário 7.3. *Sejam G e H grafos. Então $\chi_b(G[H]) \geq \chi_b(G) \cdot \chi_b(H)$.*

Uma vez que $\chi_b(K_k) = k$, temos também:

Corolário 7.4. *Seja G um grafo. Então $\chi_b(G[K_k]) \geq k \cdot \chi_b(G)$.*

7.2 O produto $G[K_k]$

De agora em diante restringimos nosso estudo ao produto $G[K_k]$. Iniciamos por determinar o valor $m(G[K_k])$:

Lema 7.5. *Para todo grafo G , $m(G[K_k]) = k \cdot m(G)$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $m(G[K_k]) > k \cdot m(G)$. Considere um vértice denso $(u, v) \in V(G[K_k])$. Pela Definição 7.1 temos que $d_{G[H]}((u, v)) = k \cdot d_G(u) + k - 1$. Além disso, como supomos que $m(G[K_k]) > k \cdot m(G)$, é válida a desigualdade $k \cdot d_G(u) + k - 1 > k \cdot m(G)$. Dividindo por k em ambos lados da desigualdade, obtemos que $d_G(u) > m(G) - 1 + \frac{1}{k}$. Uma vez que o grau de um vértice é um número inteiro, pode-se concluir que $d_G(u) \geq m(G)$. Dessa

forma, todo vértice denso em $G[H]$ é originado por um vértice de grau superior ou igual a $m(G)$ em G . Como supomos que existem mais de $k \cdot m(G)$ vértices densos em $G[H]$, e uma vez que um vértice $u \in G$ origina exatamente $|X(u)| = k$ vértices em $G[H]$, existem mais de $\frac{k \cdot m(G) + 1}{k} > m(G)$ vértices distintos em G que originam algum vértice denso em $G[H]$. Consequentemente, existem mais de $m(G)$ vértices com grau superior ou igual a $m(G)$ em G , um absurdo. \square

Finalmente, pode-se determinar o valor do produto $G[K_k]$ no caso em que $\chi_b(G) = m(G)$:

Teorema 7.6. *Seja G um grafo tal que $\chi_b(G) = m(G)$. Então $\chi_b(G[K_k]) = k \cdot m(G)$.*

Demonstração. É uma consequência direta do Corolário 7.3 e do Lema 7.5. \square

7.2.1 Árvores

Nesta seção, o produto $T[K_k]$, onde T é uma árvore, é examinado. No Capítulo 4 foi mostrado que uma árvore não-pivoteada T satisfaz $\chi_b(T) = m(T)$. Portanto, nesse caso, o Teorema 7.6 afirma que $\chi_b(T[K_k]) = k \cdot m(T)$. Resta determinar o que acontece quando a árvore em questão é pivoteada. Necessitamos da seguinte definição, antes de prosseguirmos:

Definição 7.7 (vértice obstruído). *Seja T uma árvore pivoteada. Um vértice denso em T é obstruído se é adjacente ao pivô e a algum vértice denso de T .*

No que segue, para uma árvore pivoteada T , determinamos o valor $\chi_b(T[K_k])$ em função do parâmetro $m(T)$ e da quantidade de vértices obstruídos existentes em T . Para tanto, primeiramente mostramos o seguinte limite superior:

Lema 7.8. *Seja T uma árvore pivoteada com q vértices obstruídos. Então $\chi_b(T[K_k]) \leq k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$.*

Demonstração. Seja T uma árvore pivoteada cujo pivô é o vértice v . Suponha, por contradição, que c é uma b -coloração de $T[K_k]$ com l cores, $l > k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$. Nesse caso pode-se supor, sem perda de generalidade, que $c(X(v)) = \{1, 2, \dots, k\}$. Como c é uma coloração própria, se u é um vértice denso em T adjacente a v , $c(X(u)) \cap c(X(v)) = \emptyset$. Logo, qualquer b -vértice de c colorido com uma das cores no conjunto $c(X(v))$ é originado por um vértice que não é vizinho de v , e que consequentemente é vizinho de um vértice obstruído de T . Existem apenas q vértices obstruídos em T , e consequentemente existe pelo menos um vértice obstruído, digamos $d \in T$, com mais de $\lceil \frac{k}{q} \rceil$ cores no conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ que aparecem em $c(X^N(d))$. Porém nesse caso existem mais de $\lceil \frac{k}{q} \rceil$ cores repetidas em $c(X^N(d))$. Consequentemente, nenhum dos

k vértices em $X(d)$ é b -vértice, afinal os mesmos possuem grau $k \cdot m(T) - 1$. Logo, restam apenas $k \cdot m(T) - k$ vértices densos que podem ser b -vértices em c . Entretanto já foi observado, na demonstração do Teorema 4.5, que toda árvore pivoteada possui pelo menos dois vértices obstruídos, e portanto $q \geq 2$. Consequentemente, $k \cdot m(T) - k < l = k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$, e portanto c não é uma b -coloração. \square

Finalmente determinamos o valor $\chi_b(T[K_k])$, quando T é uma árvore pivoteada:

Teorema 7.9. *Seja T uma árvore pivoteada com q vértices obstruídos. Então $\chi_b(T[K_k]) = k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$.*

Demonstração. O Lema 7.8 afirma que $\chi_b(T[K_k]) \leq km(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$. Resta demonstrar que $T[K_k]$ admite uma b -coloração com $k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$ cores.

Seja $\{d_1, d_2, \dots, d_q\}$ o conjunto dos vértices obstruídos de T , e seja $\{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ um conjunto de vértices tais que w_i é um vizinho denso de d_i , $1 \leq i \leq q$. Observe que se d_i é adjacente a mais de um vértice denso, o vértice w_i é escolhido arbitrariamente. Mostramos agora como construir uma b -coloração c de $T[K_k]$ com $k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$ cores.

Seja v o pivô de T . Atribua cores arbitrariamente aos vértices em $X(v)$, de tal forma que $c(X(v)) = \{1, 2, \dots, k\}$. Seja S_1, S_2, \dots, S_q uma partição das cores em $c(X(v))$, onde $|S_1| = \lceil \frac{k}{q} \rceil$, $|S_i| \leq \lceil \frac{k}{q} \rceil$, para $2 \leq i \leq q$. Associe cores arbitrariamente a $|S_i|$ vértices em $X(w_i)$, de maneira que $S_i \subseteq c(X(w_i))$, para cada $1 \leq i \leq q$. Uma vez que w_i , $1 \leq i \leq q$, não é adjacente a v , nenhum par de vértices adjacentes coloridos possui cores idênticas. Atribua cores aos vértices em $X(d_1)$ e $X(d_2)$, de modo que $\{k+1, k+2, \dots, k + \lceil \frac{k}{q} \rceil\} \subseteq c(X(d_1))$ e $\{k+1, k+2, \dots, k + \lceil \frac{k}{q} \rceil\} \subseteq c(X(d_2))$. O vértice d_1 não é adjacente a d_2 , pois do contrário d_1, d_2 e v formam um ciclo em T . Assim, a pré-coloração é própria. Restam $k \cdot m(T) - k - 2 \cdot \lceil \frac{k}{q} \rceil$ vértices densos descoloridos e pode-se colorir os mesmos com cores distintas no conjunto $\{k + \lceil \frac{k}{q} \rceil, k + \lceil \frac{k}{q} \rceil + 1, \dots, k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil\}$. É fácil de ver que, de acordo com a pré-coloração descrita, nenhum vértice denso possui mais do que $\lceil \frac{k}{q} \rceil$ cores repetidas em sua vizinhança. Isso ocorre porque nenhum vértice denso é adjacente a dois vértices em $\{w_1, w_2, \dots, w_q\}$ e nem a ambos vértices d_1 e d_2 .

Agora estendemos a pré-coloração obtida no parágrafo anterior de maneira que todo vértice denso seja b -vértice. Para tanto, consideramos cada vértice denso que ainda não é b -vértice e colorimos sua vizinhança de maneira apropriada, para o que mesmo se torne b -vértice. Além disso, desejamos assegurar que seja mantida a propriedade de que nenhum vértice denso possui mais de $\lceil \frac{k}{q} \rceil$ vizinhos com cores repetidas. Seja d um vértice denso que não é b -vértice em nossa pré-coloração, e considere os conjuntos $P = \{u \in N(d) \mid u \text{ não está colorido}\}$, $Q = \{v \in N(d) \mid v \text{ está colorido}\}$ e $R = \{k \in C \mid k \neq c(d) \text{ e a cor } k \text{ não é cor de nenhum vizinho de } d\}$. Uma

vez que d é denso, $|N(d)| \geq k \cdot m(T) - 1$ e como nenhum vértice denso possui mais de $\lceil \frac{k}{q} \rceil$ cores repetidas em sua vizinhança, temos que $|Q| + |P| \geq k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$ e $|R| \leq k \cdot m(T) - \lceil \frac{k}{q} \rceil$. Pode-se atribuir cada cor em R a exatamente um vizinho de d , escolhido de maneira arbitrária. Resta assegurar que procedendo desta forma obtemos uma coloração que ainda é própria. Até o momento os únicos vértices que estão coloridos são os que têm origem em um vértice denso, ou em algum vizinho de um vértice denso. Como nenhum par de vértices adjacentes e não densos podem ser ambos adjacentes a um vértice denso, nossa coloração parcial permanece própria. Além disso, os vizinhos de qualquer vértice denso diferente de d não são afetados. Repetindo o mesmo procedimento para os outros vértices densos, obtemos que c é uma b -coloração parcial de $T[K_k]$.

Note que alguns vértices não-densos podem permanecer descoloridos. Mas esses vértices possuem grau no máximo $k \cdot m - k - 1$, pois eles possuem grau no máximo $m - 2$ em T . Assim, podemos associar aos mesmos alguma cor que não apareça em suas vizinhanças. \square

7.2.2 Grafos m -estritos

Nesta seção o produto $\chi_b(G[K_k])$ é analisado, onde G é um grafo m -estrito. Novamente, é suficiente considerar os grafos com $\chi_b(G) < m(G)$, uma vez que o Teorema 7.6 determina que $\chi_b(G[K_k]) = k \cdot m(G)$, quando $\chi_b(G) = m(G)$.

Lema 7.10. *Se G é um grafo m -estrito, então $G[K_k]$ é m -estrito.*

Demonstração. Deve-se mostrar que $G[K_k]$ possui $m(G[K_k])$ vértices densos e que os mesmos possuem grau $m(G[K_k]) - 1$. Pelo Lema 7.5, temos que $m(G[K_k]) = k \cdot m(G)$. Além disso, se (u, v) é um vértice denso em $G[K_k]$, $d_{G[H]}((u, v)) = k \cdot d_G(u) + k - 1 \geq k \cdot m(G) - 1$, o que implica que u é denso. Uma vez que G é m -estrito, $d_{G[H]}((u, v)) = k \cdot m(G) - 1$. Para ver que não existem mais do que $k \cdot m(G)$ vértices densos em $G[H]$ basta observar que, pela Definição 7.1, um vértice denso de G origina exatos k vértices densos em $G[K_k]$. \square

Assim, se G é m -estrito, o grafo $G[K_k]$ é também m -estrito e consequentemente o b -fecho de $G[K_k]$, $G[K_k]^*$, está bem definido. Pode-se mostrar que:

Lema 7.11. *Seja G um grafo m -estrito. Então $G[K_k]^*$ é isomorfo a $G^*[K_k]$.*

Demonstração. Primeiro deve-se mostrar que $V(G[K_k]^*) = V(G^*[K_k])$. A Definição 6.4 afirma que $V(G[K_k]^*) = V(G[K_k])$ e portanto, pela Definição 7.1, $V(G[K_k]^*) = V(G) \times V(K_k)$. Por

outro lado, as Definições 6.4 e 7.1 implicam que $V(G^*[K_k]) = V(G^*) \times V(K_k) = V(G) \times V(K_k)$. Logo, $V(G[K_k]^*) = V(G^*[K_k])$.

Resta mostrar que $E(G[K_k]^*) = E(G^*[K_k])$. Para tanto, é suficiente mostrar que $((u, v), (u', v')) \in E(G^*[K_k])$ se e somente se $((u, v), (u', v')) \in E(G[K_k]^*)$. Por conveniência, assumamos que $e = ((u, v), (u', v'))$. É fácil ver que $E(G[K_k]) \subseteq E(G^*[K_k])$ e $E(G[K_k]) \subseteq E(G[K_k]^*)$. Logo, se $e \in E(G[K_k])$, temos trivialmente que $e \in E(G^*[K_k])$ e $e \in E(G[K_k]^*)$. Assim, podemos supor que $e \notin E(G[K_k])$. Além disso, pode-se supor que $u \neq u'$, pois do contrário têm-se necessariamente que $e \in E(G[K_k])$.

Suponha que $e \in E(G^*[K_k])$. Como $e \notin E(G[K_k])$, pode-se concluir que $uu' \notin E(G)$ e $uu' \in E(G^*)$. De acordo com a Definição 6.4, se isso ocorre significa que ou u e u' são ambos densos, ou são ambos adjacentes a um vértice denso em G . Caso u e u' sejam densos em G , é fácil de observar que (u, v) e (u', v') são densos em $G[K_k]$. Consequentemente, a Definição 6.4 implica que $e \in E(G[K_k]^*)$, como queríamos demonstrar. De modo similar, se u e u' são adjacentes a um vértice denso $w \in V(G)$, a Definição 7.1 implica que (u, v) e (u', v') são adjacentes a todos os vértices em $X(w)$ no grafo $G[K_k]$. Uma vez que $X(w)$ é um conjunto de vértices densos em $G[K_k]$, a Definição 6.4 implica que $e \in E(G[K_k]^*)$, como desejado.

Suponha agora que $e \in E(G[K_k]^*)$. Nesse caso, como $e \notin E(G[K_k])$, a Definição 6.4 implica que ou (u, v) e (u', v') são ambos densos, ou ambos adjacentes a um vértice denso em $G[K_k]$. Se (u, v) e (u', v') são ambos densos em $G[K_k]$, a Definição 7.1 implica que u e u' são densos em G . Consequentemente a Definição 6.4 assegura que $uu' \in E(G^*)$. Finalmente, a Definição 7.1 implica que (u, v) e (u', v') são adjacentes em $G^*[K_k]$. Resta considerar o caso em que (u, v) e (u', v') são adjacentes a um vértice denso, digamos (x, y) , em $G[K_k]$. Nesse caso, como (x, y) é denso em $G[K_k]$, o vértice x é necessariamente denso em G , pela Definição 7.1. Uma vez que $u \neq u'$, a Definição 7.1 implica que u e u' são ambos adjacentes a x no grafo G . Logo, pela Definição 6.4, $uu' \in E(G^*)$. Finalmente, a Definição 7.1 assegura que $e \in E(G^*[K_k])$.

□

Pode-se então demonstrar:

Teorema 7.12. *Seja G um grafo m -estrito pivoteado. Então $\chi_b(G[K_k]) < k \cdot m(G)$.*

Demonstração. Uma vez que G é pivoteado, o Teorema 6.8 implica que $\omega(G^*) > m(G)$. Consequentemente, é fácil de ver que $\omega(G^*[K_k]) > k \cdot m(G)$ e portanto $\chi(G^*[K_k]) > k \cdot m(G)$. Suponha, por contradição, que $\chi_b(G[K_k]) = k \cdot m$. Nesse caso, o Lema 6.5 afirma que $\chi(G[K_k]^*) = k \cdot m$. Finalmente, pelo Lema 7.11, temos que $G[K_k]^* \equiv G^*[K_k]$ e portanto $\chi(G[K_k]^*) = \chi(G^*[K_k])$,

uma contradição.

□

7.3 Considerações acerca do produto lexicográfico

Os resultados nas seções anteriores podem sugerir que, de maneira geral, se um grafo satisfaz $\chi_b(G) < m(G)$ então é válida a desigualdade $\chi_b(G[K_k]) < k \cdot m(G)$. Veremos agora que isso não é verdade para todo grafo.

O grafo de Petersen, que iremos denotar por P , é o grafo com conjunto de vértices $V(P) = \{u_0, u_1, \dots, u_4, v_0, v_1, \dots, v_4\}$ e conjunto de arestas $E(P) = \{u_i u_{i+1 \pmod{5}}, u_i v_i, v_i v_{i+2 \pmod{5}} \mid 0 \leq i \leq 4\}$. Pode-se verificar que o grafo de Petersen é cúbico, possui número cromático 3 e satisfaz $\chi_b(P) = 3 < m(P) = 4$. Além disso, pode-se mostrar que:

Teorema 7.13 (Linhares Sales, Maffray [41]). *Seja P o grafo de Petersen e $k \geq 1$ um inteiro. Então $m(P[K_k]) = 4k$ e:*

$$\chi_b(P[K_k]) = \begin{cases} 4k, & \text{se } k \text{ é par} \\ 4k - 1, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Como visto na Seção 7.2.1, o produto $\chi_b(T[K_k])$ depende fortemente de propriedades estruturais da árvore em questão. No caso do grafo de Petersen, a paridade do valor k é o único fator determinante de $\chi_b(P[K_k])$.

É natural questionar que características do grafo de Petersen determinam este comportamento singular com relação ao produto lexicográfico. Pode-se verificar que o grafo de Petersen é o único dentre os quatro grafos cúbicos que satisfazem $\chi_b(G) < 4$ com esse comportamento.

8 *Considerações finais e trabalhos futuros*

Estudamos as b -colorações por meio de diferentes abordagens. No que se refere aos grafos m -estritos, conseguimos obter algoritmos polinomiais para decidir se $\chi_b(G) < m(G)$ quando G é uma árvore, um grafo P_4 -esparso ou o complemento de um grafo bipartite. Como citado anteriormente, à exceção dos complementos de grafos bipartites, esses resultados não são originais. Entretanto, o método geral sugerido por essas demonstrações pode ser utilizado para provar resultados similares em outras classes de grafos.

Além disso, generalizamos o conceito de árvore pivoteada, definindo a família dos grafos m -estritos pivoteados. Mostramos que esses grafos satisfazem $\chi_b(G) < m(G)$ e que isso acontece devido à existência de cliques com tamanho superior a $m(G)$ em G^* . Por outro lado, observamos que existem grafos m -estritos não pivoteados que satisfazem $\chi_b(G) < m(G)$. Dessa forma, uma questão em aberto consiste em caracterizar os grafos m -estritos não pivoteados que satisfazem $\chi_b(G) < m(G)$, o que equivale a caracterizar os grafos m -estritos tais que $\chi_b(G) = m(G)$.

Com relação ao produto lexicográfico de grafos, conseguimos determinar exatamente o valor de $\chi_b(T[K_k])$, onde T é uma árvore. Seria interessante obter resultados similares em grafos com estrutura semelhante à das árvores. Em particular, um problema em aberto consiste em determinar o valor de $\chi_b(G[K_k])$, quando G é um cactus ou um grafo cordal. Finalmente, uma outra questão em aberto consiste em caracterizar os grafos tais que $\chi_b(G[K_k]) = k \cdot \chi_b(G)$.

Índice Remissivo

- a*-coloração, 16
- b*-coloração, 16
- b*-espectro, 33
- b*-fecho, 40
- b*-fecho parcial, 44
- b*-vértice, 16
- m*-grau, 18
- árvore, 11
 - pivoteada, 25
- algoritmo guloso, 13
- aresta, 10
- bloco, 11
- cactos, 11
- caminho, 10
- ciclo, 11
- classe de cor, 12
- clique, 11
- cografo, 11
- coloração, 12
 - de Grundy, 13
 - própria, 12
- componente conexa, 10
- conjunto
 - bom, 28
- conjunto independente, 11
- emparelhamento, 11
- floresta, 11
- grafo, 10
 - P_4 -esparso, 11
 - b*-contínuo, 35
 - b*-imperfeito, 23
- b*-perfeito, 23
- m*-estrito, 39
- m*-estrito pivoteado, 42
- bipartite, 11
- completo, 11
- conexo, 10
- cordal, 11
- crítico, 19
- perfeito, 46
- número
 - a*-cromático, 16
 - b*-cromático, 16
 - cromático, 12
 - de Grundy, 13
- problema
 - ℓ -PrEXT, 14
 - B-COLORAÇÃO, 22
 - B-CROMÁTICO, 22
 - C3C, 23
 - PrEXT, 13
- produto
 - lexicográfico, 48
- subgrafo, 10
- subgrafo induzido, 10
- vértice, 10
 - denso, 18
 - descolorido, 13
 - extremo, 37
 - obstruído, 51
 - pré-colorido, 13
 - simplicial, 11

Lista de Figuras

2.1	Um exemplo de um cactos	p. 12
3.1	Aplicação da estratégia a	p. 15
3.2	Aplicação da estratégia b	p. 16
3.3	Um grafo com $\chi(G) = 2$ e $\chi_a(G) = \chi_b(G) = 5$	p. 17
3.4	Respectivamente, $\Gamma(G) = 4 < \chi_b(G) = 5$ e $\Gamma(H) = 3 > \chi_b(H) = 2$	p. 18
3.5	O grafo completo bipartite $K_{4,4}$ satisfaz $m(K_{4,4}) = 5$ e $\chi_b(K_{4,4}) = 2$	p. 19
3.6	O grafo G satisfaz $\chi_b(G) = 2$, mas contém H , onde $\chi_b(H) = 4$	p. 20
3.7	Um grafo que só admite b -colorações com $k \in \{2, 4\}$ cores	p. 20
4.1	Um exemplo de árvore pivoteada, com $m(T) = 4$	p. 26
4.2	O conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ obstrui v , enquanto $\{a, b, c, e, f\}$ é um conjunto bom	p. 28
5.1	Um grafo com b -espectro $\{2, 4, 6\}$	p. 33
6.1	Dois grafos com $\chi_b < m$ e os seus respectivos b -fechos	p. 41
6.2	G é cordal, não-pivoteado, e satisfaz $\chi_b(G) < m(G)$ e $\chi(G^*) > \omega(G^*) = m(G)$	p. 42
6.3	Dois grafos com $\chi_b < m$ e os seus respectivos b -fechos parciais	p. 44
7.1	O produto lexicográfico de alguns grafos	p. 49

Referências Bibliográficas

- [1] D. Barth, J. Cohen, and T. Faik. Complexity of determining the b-continuity property of graphs, 2003.
- [2] D. Barth, J. Cohen, and T. Faik. On the b-continuity property of graphs. *Discrete Appl. Math.*, 155(13):1761–1768, 2007.
- [3] F. Bonomo, G. Durán, F. Maffray, J. Marenco, and M. Valencia-Pabon. On the b-coloring of cographs and p_4 -sparse graphs. *Graphs and Combinatorics*, 25(2):153–167, 2009.
- [4] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37:194–197, 1941.
- [5] N. Cairnie and K. Edwards. Some results on the achromatic number. *J. Graph Theory*, 26(3):129–136, 1997.
- [6] F. Chaouche and A. Berrachedi. Some bounds for the b-chromatic number of a generalized hamming graphs. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 26:375–391, 2007.
- [7] A. Chaudhary and S. Vishwanathan. Approximation algorithms for the achromatic number. *J. Algorithms*, 41(2):404–416, 2001.
- [8] Fred C. Chow and J. L. Hennessy. The priority-based coloring approach to register allocation. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, 12(4):501–536, 1990.
- [9] C. A. Christen and S. M. Selkow. Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 27:49–59, August 1979.
- [10] S. Corteel, M. Valencia-Pabon, and J. Vera. On approximating the b-chromatic number. *Discrete Appl. Math.*, 146(1):106–110, 2005.
- [11] M. Daniel. Precoloring extension on chordal graphs. In *Graph Theory in Paris. Proceedings of a Conference in Memory of Claude Berge, Trends in Mathematics*, pages 255–270. Birkhäuser, 2004.
- [12] D. de Werra. An introduction to timetabling. *European Journal of Operational Research*, 19(2):151–162, 1985.
- [13] B. E. and H. Kheddouci. Exact values for the b-chromatic number of a power complete k-ary tree. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 8(1):117–129, 2005. Lyon1.
- [14] B. Effantin. The b-chromatic number of power graphs of complete caterpillars. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 8(3):483–502, 2005. Lyon1.

- [15] B. Effantin and H. Kheddouci. The b -chromatic number of power graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 6(1):45–54, 2003.
- [16] B. Effantin and H. Kheddouci. *A Distributed Algorithm for a b -Coloring of a Graph*, volume 4330/2006. 2006.
- [17] T. Faik. About the b -continuity of graphs. In *Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, volume 17, pages 151–156, 2004.
- [18] D. R. Fulkerson and O. A. Gross. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific J. Math*, 15(3):835–855, 1965.
- [19] A. Gamst. Some lower bounds for a class of frequency assignment problems. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 35(1):8–14, 1986.
- [20] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1990.
- [21] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57)*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 2004.
- [22] J.L. Gonzalez-Velarde and M. Laguna. Tabu search with simple ejection chains for coloring graphs. *Annals of Operations Research*, 117:165–174(10), November 2002.
- [23] J. Hamiez and J. Hao. Scatter search for graph coloring. In *Selected Papers from the 5th European Conference on Artificial Evolution*, pages 168–179. Springer-Verlag, 2002.
- [24] F. Harary and S. T. Hedetniemi. The achromatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Theory*, 8:154–161, 1970.
- [25] C. T. Hoang and M. Kouider. On the b -dominating coloring of graphs. *Discrete Appl. Math.*, 152(1-3):176–186, 2005.
- [26] C. T. Hoàng, C. Linhares Sales, and F. Maffray. On minimally b -imperfect graphs. *Discrete Applied Mathematics*, In Press, Corrected Proof, 2009.
- [27] I. Holyer. The np -completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):718–720, 1981.
- [28] M. Hujter and Z. Tuza. Precoloring extension iii: Classes of perfect graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5(01):35–56, 1996.
- [29] R. W. Irving and D. F. Manlove. The b -chromatic number of a graph. *Discrete Appl. Math.*, 91(1-3):127–141, 1999.
- [30] R. Javadi and B. Omoomi. On b -coloring of the kneser graphs. *Discrete Mathematics*, In Press, Corrected Proof, 2009.
- [31] S. Klavzar. Coloring graph products - a survey. *Discrete Math.*, 155(1-3):135–145, 1996.
- [32] S. Klavzar and M. Jakovac. The b -chromatic number of cubic graphs. Preprint Version.

- [33] M. Kouider and M. Mahéo. The b-chromatic number of the cartesian product of two graphs. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 44:49–55.
- [34] M. Kouider and M. Maheo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph. *Discrete Math.*, 256(1-2):267–277, 2002.
- [35] M. Kouider and M. Zaker. Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs. *Discrete Mathematics*, 306(7):617–623, 2006.
- [36] J. Kratochvil, Z. Tuza, and M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. In *Revised Papers from the 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 310–320. Springer-Verlag, 2002.
- [37] C. Lucet, F. Mendes, and A. Moukrim. An exact method for graph coloring. *Comput. Oper. Res.*, 33(8):2189–2207, 2006.
- [38] C. Lund and M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. *J. ACM*, 41(5):960–981, 1994.
- [39] C. Lund and M. Yannakakis. On the hardness of approximating minimization problems. *J. ACM*, 41(5):960–981, 1994.
- [40] F. Maffray and M. Mechebbek. On b-perfect chordal graphs. *CoRR*, abs/0711.3959, 2007.
- [41] F. Maffray and C. Linhares Sales. b-colorings and the lexicographic product. Manuscript.
- [42] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [43] J. Sacle and T. Faik. Some b-continuous classes of graph. 2003.
- [44] Z. Tuza. Graph colorings with local constraints - a survey. *Math. Graph Theory*, 17:161–228, 1997.
- [45] A. Wigderson. A new approximate graph coloring algorithm. In *STOC '82: Proceedings of the fourteenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 325–329, New York, NY, USA, 1982. ACM.
- [46] J. Kara Z. Tuza and M. Voigt. b-continuity. Technical report, 2004.
- [47] M. Zaker. Results on the Grundy chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*, 306:3166–3173, December 2006.