



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO E DOUTORADO EM CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO**

CLÁUDIO SOARES DE CARVALHO NETO

EMBUTIMENTO DE ÁRVORES ORIENTADAS EM DIGRAFOS

**FORTALEZA-CE
2014**

CLÁUDIO SOARES DE CARVALHO NETO

EMBUTIMENTO DE ÁRVORES ORIENTADAS EM DIGRAFOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação, do Departamento de Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ciência da Computação. Área de concentração: Teoria dos Grafos (Teoria da Computação)

Orientadora: Dra. Cláudia Linhares Sales

Coorientador: Dr. Frédéric Havet

FORTALEZA-CE

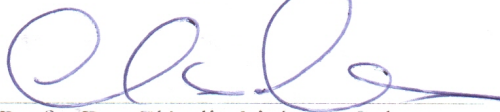
2014

CLÁUDIO SOARES DE CARVALHO NETO

Embutimento de Árvores Orientadas em Dígrafos

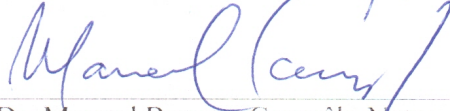
Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação, da Universidade Federal do Ceará, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dra. Cláudia Linhares Sales
(Orientadora)

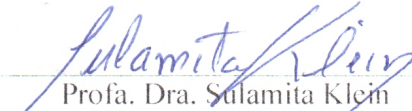
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Dr. Manoel Bezerra Campêlo Neto
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Dr. Ricardo Cordeiro Corrêa
Universidade Federal do Ceará – UFC



Prof. Dra. Sulamita Klein
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Fortaleza, 25 de abril de 2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me guiar e por permitir a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus professores pelo conhecimento transmitido, pelo profissionalismo. Principalmente, agradeço à minha orientadora, Professora Cláudia Linhares Sales, por quem tenho grande admiração, por ter se disponibilizado a me orientar, pelo incentivo, dedicação, compreensão e força que me deu, pela preocupação com os problemas por que passei durante vários momentos da realização deste trabalho. Espero seguir o seu exemplo no exercício da minha profissão.

Agradeço ao Frédéric Havet, pela oportunidade de trabalhar com ele no INRIA - Sophia Antipolis, pelas orientações para obtermos os resultados desta pesquisa. Também sou muito grato aos novos amigos que fiz durante este estágio, especialmente Júlio César Silva Araújo e Ana Karolinnna Maia de Oliveira.

Agradeço à minha família (meus irmãos, sobrinhos e primos mais próximos) pelo apoio. Em especial, agradeço e dedico este trabalho à minha sobrinha Andressa Araújo Carvalho (*in memoriam*), pelo incentivo, por ter sido a minha fonte de força para continuar.

Agradeço aos meus amigos, especialmente aos que estiveram mais próximos durante esta etapa da minha vida - Fabio Solón Tajra, George de Almeida Freitas, Wynston Lima Alexandrino. Sou também muito grato aos novos amigos que fiz durante o mestrado, pelo companheirismo, apoio, força. Especialmente Rafael Teixeira de Araújo e Tatiane Fernandes Figueiredo.

Por fim, agradeço à FUNCAP - Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio, fundamental para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho é um estudo geral da relação entre o embutimento de árvores orientadas em digrafos e alguns parâmetros dos mesmos. Dizer que uma árvore orientada está embutida em um digrafo é equivalente a dizer que o digrafo contém uma cópia da árvore como subdigrafo. No embutimento em digrafos podem ser considerados como parâmetros o número de vértices, o número cromático ou ainda o número de arcos do digrafo. Serão apresentados as principais conjecturas e resultados de cada abordagem, bem como as relações existentes entre elas. A Conjectura de Burr, uma das mais conhecidas sobre embutimento pelo número cromático, diz que toda árvore orientada com $n > 1$ vértices pode ser embutida em qualquer digrafo $(2n - 2)$ -cromático. Mostraremos que esta conjectura é válida para orientações de estrelas de ordem $n \geq 2$ e para qualquer árvore orientada de ordem $2 \leq n \leq 5$.

Palavras-chave: digrafos, árvores orientadas, coloração de grafos, embutimento.

ABSTRACT

This work is a comprehensive study on the relationship between the embedding of oriented trees in digraphs and some of their parameters. Saying that an oriented tree is embedded in a digraph is equivalent to say that the digraph contains a copy of that tree as a subdigraph. In the embedding in digraphs, we may consider as parameters the number of vertices, the chromatic number or the number of arcs of the digraph. The main conjectures and results of each approach will be presented, as well as the relations among them. Burr's Conjecture, which establishes the relationship with the chromatic number, says that every oriented tree with $n > 1$ vertices is embedded in any $(2n - 2)$ -chromatic digraph. We show that this conjecture holds for oriented stars of order $n \geq 2$ and for any oriented tree of order $2 \leq n \leq 5$.

Keywords: digraphs, oriented trees, graph colouring, embedding.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Grafos isomorfos	14
Figura 2 – Remoção de vértices e arestas	15
Figura 3 – Identificação de vértices e contração de arestas	15
Figura 4 – Grafos e digrafos	17
Figura 5 – Exemplo de torneio diregular de ordem 5	17
Figura 6 – Caminhos orientados	18
Figura 7 – Exemplos de digrafo conexo e fortemente conexo	18
Figura 8 – Exemplo de kernel e antikernel em um digrafo	19
Figura 9 – Componentes de retorno de uma árvore orientada	19
Figura 10 – Orientações de estrelas	20
Figura 11 – Exemplos de árvores orientadas	20
Figura 12 – Identificação de vértices e um digrafo	21
Figura 13 – Exemplo de subdivisão de digrafos	21
Figura 14 – Florestas geradoras de saída	26
Figura 15 – Decomposição em alças	27
Figura 16 – Embutimento em digrafos	30
Figura 17 – Exceções de Grünbaum	31
Figura 18 – Ilustração de um torneio de ordem $2i + 2j - 2$ que não contém $S_{i,j}$	44
Figura 19 – Caminhos antidirecionados em R_5	45
Figura 20 – Árvores orientadas A de ordem 5 com $ In(A) = 1$ e $ Out(A) = 2$	49
Figura 21 – Construção de Hajós	53

LISTA DE SÍMBOLOS

$\chi(G)$	número cromático do (di)grafo G
$V(G)$	conjunto de vértices do (di)grafo G
$E(G)$	conjunto de arestas do grafo G
$N_G(v)$	vizinhos de um vértice v no grafo G
$d_G(v)$	grau do vértice v no grafo G
$G[X, Y]$	grafo bipartido G com partição (X, Y)
$K_{m,n}$	grafo bipartido completo com partições de tamanhos m e n
S_n	estrela de ordem n
$G[Y]$	subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices Y
$G/\{u, v\}$	identificação dos vértices u e v não adjacentes no grafo G
G/e	contração da aresta e no grafo G
$\Delta(G)$	maior grau de um vértice no (di)grafo G
$\delta(G)$	menor grau de um vértice no (di)grafo G
$A(D)$	conjunto de arcos do digrafo D
$N_D^-(v)$	vizinhos de entrada do vértice v no digrafo D
$N_D^+(v)$	vizinhos de saída do vértice v no digrafo D
$N_D(v)$	vizinhos de um vértice v no digrafo D
$N_D^{--}(v)$	segunda vizinhança de entrada do vértice v no digrafo D
$N_D^{++}(v)$	segunda vizinhança de saída do vértice v no digrafo D
$d_D^-(v)$	grau de entrada do vértice v no digrafo D
$d_D^+(v)$	grau de saída do vértice v no digrafo D
$d_D(v)$	grau do vértice v no digrafo D
$\Delta^-(D)$	maior grau de entrada de um vértice no digrafo D
$\Delta^+(D)$	maior grau de saída de um vértice no digrafo D

$\delta^-(D)$	menor grau de entrada de um vértice no digrafo D
$\delta^+(D)$	menor grau de saída de um vértice no digrafo D
R_{2n+1}	torneio diregular de ordem $2n + 1$ (todos os vértices possuem graus de entrada e de saída iguais a n)
$P^-(b_1, \dots, b_k)$	caminho orientado com k blocos, sendo o primeiro de retorno
$P^+(b_1, \dots, b_k)$	caminho orientado com k blocos, sendo o primeiro de avanço
A_n^-	caminho antidirecionado de ordem n , sendo o primeiro arco de retorno
A_n^+	caminho antidirecionado de ordem n , sendo o primeiro arco de avanço
$In(A)$	conjunto de folhas de entrada da árvore A
$Out(A)$	conjunto de folhas de saída da árvore A
S_n^-	estrela de entrada de ordem n
S_n^+	estrela de saída de ordem n
$S_{i,j}$	estrela orientada com exatamente i folhas de entrada e j folhas de saída
$B(A)$	digrafo induzido pelo conjunto de arcos de retorno de uma árvore A
$b(A)$	número de arcos de retorno de uma árvore A
$c(A)$	número de componentes de retorno de uma árvore A
$V^-(A)$	conjunto de vértices do tipo sumidouro na árvore antidirecionada A
$V^+(A)$	conjunto de vértices do tipo fonte na árvore antidirecionada A
$mt(A)$	maior entre os conjuntos de fontes e sumidouros de uma árvore antidirecionada A
$Ad(G)$	grau médio de um (di)grafo G
$Mad(G)$	máximo grau médio de um (di)grafo G

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	DEFINIÇÕES E TERMINOLOGIA	13
2.1	Grafos	13
2.1.1	Passeios	14
2.1.2	Subgrafos	14
2.1.3	Identificação de vértices e contração de arestas	15
2.2	Digrafos	16
2.2.1	Relações entre grafos e digrafos	16
2.2.2	Caminhos e ciclos	17
2.2.3	Rei, kernel e antikernel	18
2.2.4	Árvores orientadas	19
2.2.5	Identificação de vértices, contração e subdivisão de arcos	21
2.3	Coloração de Vértices	21
3	FERRAMENTAS	24
3.1	Ordens Medianas	24
3.2	Floresta de Saída Geradora Final	25
3.3	Decomposição em Alças	26
3.4	Circuito Bom	27
4	CONDIÇÕES PARA A EXISTÊNCIA DE ÁRVORES ORIENTADAS EM DIGRAFOS	30
4.1	Embutimento em Torneios	30
4.1.1	Caminhos inevitáveis	30
4.1.2	Árvores inevitáveis	32
4.2	Embutimento pelo Número de Arcos	35
4.3	Embutimento pelo Número Cromático	37
4.3.1	Caminhos universais	37
4.3.2	Árvores universais	40
5	CASOS ESPECIAIS DA CONJECTURA DE BURR	43
5.1	Universalidade de Estrelas	43
5.2	Universalidade das Árvores Orientadas de Ordem 4	44
5.3	Universalidade das Árvores Orientadas de Ordem 5	45
6	CONCLUSÕES	52

6.1	Considerações Finais	52
6.2	Trabalhos Futuros	53
	Referências	55

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da relação entre o embutimento de árvores orientadas em digrafos e diversos parâmetros dos mesmos. De uma forma geral, a questão central nesse tipo de estudo é determinar condições suficientes para que um digrafo contenha uma cópia de qualquer árvore orientada. Isso permitiria, por exemplo, ao encontrar uma árvore orientada A que não pudesse ser embutida em um digrafo D , determinar que D não satisfaz às condições suficientes.

Observa-se que esse problema é mais geral do que o problema de isomorfismo de subdigrafos, onde se deseja determinar se um certo digrafo D possui como subdigrafo um digrafo isomorfo a uma árvore orientada A . No presente estudo, pretende-se encontrar condições suficientes para que D possua como subdigrafo todas as árvores orientadas. A complexidade do problema que tratamos depende da complexidade de checar as condições suficientes.

As condições que tratamos e estudamos, impostas sobre os digrafos, estão relacionadas a certos parâmetros dos mesmos, como será visto a seguir.

O estudo da relação entre embutimento e o número cromático, por exemplo, permite estudar o número cromático de um digrafo pela determinação de subdigrafos de ocorrência obrigatória. Esse tipo de abordagem foi iniciada após a demonstração de um teorema clássico de grafos (Gallai (1968), Roy (1967), Hasse (1964), Vitaver (1962)), inicialmente provado por Gallai e por Roy, que garante a existência de um caminho direcionado de tamanho $\chi(D) - 1$ em todo digrafo D , onde $\chi(D)$ é o seu número cromático.

Como um exemplo de aplicação desse resultado, tem-se que o fato de, para um certo grafo G , não ser possível orientá-lo de forma a produzir um caminho direcionado de tamanho k , garante que $\chi(G) \leq k$. O grande número de aplicações existentes para o problema de coloração em grafos, que trata de determinar o número cromático de um grafo, e a dificuldade de resolução do mesmo, justifica o interesse nessa abordagem.

Além das condições impostas sobre o número cromático do digrafo para a existência de árvores orientadas, estuda-se também o número de arcos suficientes, com respeito ao seu número de vértices, a um digrafo para garantir tal existência.

No que diz respeito às relações com o número cromático do digrafo, a partir do resultado Gallai-Roy-Hasse-Vitater, os primeiros digrafos estudados foram os torneios (grafos direcionados completos), cujo número cromático é exatamente a sua ordem. Em seguida, os estudos foram direcionados a digrafos quaisquer, na busca de provar a mais importante conjectura no tema, a Conjectura de Burr (1980), que propõe que qualquer árvore orientada de ordem n pode ser embutida em qualquer digrafo de número cromático $2n - 2$.

No que diz respeito ao seu número de arcos, os estudos estão ligados à teoria

extremal de grafos, aplicados a digrafos. Erdős (1965) conjecturou que se um grafo com n vértices possui pelo menos $n(k-2)/2$ arestas, então ele possui uma cópia de qualquer árvore de ordem k .

Nessa dissertação, fazemos um apanhado dos principais resultados sobre o embutimento de árvores orientadas em torneios e sobre as condições impostas ao número cromático do digrafo e ao seu número de arcos, a fim de garantir o embutimento de tais árvores. Observamos que a terminologia introduzida pelos autores dos resultados apresentados foi mantida, tornando esse estudo um documento de referência sobre o tema.

Além desse apanhado, provamos a Conjectura de Burr para as árvores orientadas com até 5 vértices e para orientações de estrelas de qualquer ordem.

A dissertação está organizada como segue. Inicialmente, no Capítulo 2, serão apresentados os principais conceitos relacionados a grafos, digrafos, árvores orientadas e coloração de vértices; bem como as notações que serão utilizadas neste estudo. No Capítulo 3 serão apresentadas algumas das técnicas utilizadas para se verificar o embutimento em digrafos.

Como será visto no Capítulo 4, o embutimento de árvores orientadas em digrafos pode ser abordado considerando como parâmetro o número de vértices, o número de arcos, ou ainda o número cromático do digrafo em que se deseja verificar o embutimento.

Seja A uma árvore de ordem n . Utiliza-se o número de vértices como parâmetro para verificar o embutimento em torneios. Neste caso, diz-se que A é $f(n)$ -inevitável, se todo torneio com $f(n)$ vértices contém uma cópia de A . Na segunda abordagem, caracteriza-se uma função $g(n)$ de modo que todo digrafo D com pelo menos $g(n) \cdot |V(D)|$ arcos contém uma cópia de A . Quando se utiliza o número cromático como parâmetro para embutimento, fala-se em digrafos universais. Diz-se que A é $h(n)$ -universal, se todo digrafo com número cromático pelo menos $h(n)$ contém uma cópia de A .

A primeira abordagem está relacionada com a terceira, uma vez que torneios de ordem n são casos particulares de digrafos n cromáticos. Portanto, todo digrafo $h(n)$ -universal é também $h(n)$ -inevitável. A segunda abordagem também está relacionada à terceira, pois, como será mostrado no Capítulo 4, todo digrafo D com número cromático $2g(n) + 1$ possui pelo menos $g(n) \cdot |V(D)|$ arcos.

No capítulo Capítulo 5, apresentamos os nossos resultados, ou seja, a prova da Conjectura de Burr para árvores orientadas de ordem n , $n \leq 5$ e para orientações de estrelas de qualquer ordem.

Concluimos esse trabalho, no Capítulo 6, apresentando direções para a continuação deste estudo.

2 DEFINIÇÕES E TERMINOLOGIA

Neste capítulo serão apresentados os conceitos gerais de grafos, digrafos e coloração de vértices, que serão utilizados no documento. Estes e outros conceitos podem ser encontrados em Bondy e Murty (2008), West (2001) e Bang-Jensen e Gutin (2007).

2.1 Grafos

Um grafo é definido por um par ordenado $G = (V(G), E(G))$, sendo $V(G)$ o conjunto de vértices e $E(G)$ o conjunto de arestas de G , e por uma função de incidência de G , ψ_G , que associa cada aresta com um par de vértices (não necessariamente distintos) de G . Se e é uma aresta, e u e v são os vértices tais que $\psi_G(e) = \{u, v\}$, diz-se que u e v são as extremidades de e . Se não existir mais de uma aresta incidente sobre um mesmo par de vértices u e v em G , cada aresta e pode ser representada por suas extremidades ($e = uv$). A ordem de um grafo é o seu número de vértices (denotada por n), e o tamanho é o seu número de arestas (denotado por m).

As extremidades de uma aresta são ditas incidentes a esta. Dois vértices são adjacentes se incidem sobre uma mesma aresta, e duas arestas são adjacentes se incidem sobre um mesmo vértice. Vértices adjacentes distintos são chamados de vizinhos. O conjunto dos vizinhos de um vértice v em um grafo G é representado por $N_G(v)$.

Um *laço* é uma aresta cujas extremidades são iguais. Se duas ou mais arestas incidem sobre o mesmo par de vértices, estas são chamadas de *múltiplas*. Um *grafo simples* não possui laços ou arestas múltiplas.

Um grafo simples é *completo* se quaisquer dois dos seus vértices são adjacentes. K_n representa um grafo completo com n vértices. Um grafo é *bipartido* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos X e Y de modo que toda aresta tenha uma extremidade em X e outra em Y . Denota-se um grafo bipartido G com partição (X, Y) por $G[X, Y]$. Se G é simples e todos os vértices de X são adjacentes a todos os vértices em Y , G é *bipartido completo*. $K_{m,n}$ representa um grafo bipartido completo com partições de tamanhos m e n , respectivamente. Um grafo G é *vazio* se $E(G) = \emptyset$.

O grau de um vértice v em um grafo simples G , denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas de G incidentes a v . Representa-se por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$, respectivamente, o menor e o maior dentre os graus dos vértices de G . Um grafo é *regular* quando todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Neste caso, se k é o grau destes vértices, então G é *k-regular*.

Dois grafos G e H são isomorfos ($G \cong H$), se há bijeções $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tais que $\psi_G(e) = \{u, v\}$ se, e somente se, $\psi_H(\phi(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\}$. Ha um exemplo de grafos isomorfos na Figura 1, onde $\theta := \{(1, b), (2, d), (3, f), (4, c), (5, e), (6, a)\}$.

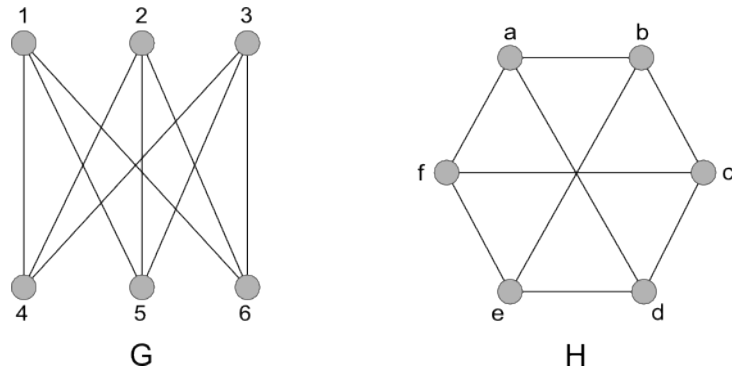


Figura 1 – Grafos isomorfos

2.1.1 Passeios

Em um grafo simples G , um *passeio* é uma sequência de vértices $P = v_0 \dots v_k$, onde $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq V(G)$ e $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G), 0 \leq i < k$. Os vértices v_0 e v_k são as extremidades de P , e os vértices v_1 a v_{k-1} são chamados de internos de P . O tamanho de um passeio é a quantidade de arestas deste. Se $v_0 = v_k$, então P é um passeio fechado. Caso contrário, P é aberto. Um *caminho* (resp. trilha) é um passeio aberto sem repetição de vértices (resp. arestas); e um *ciclo* (resp. circuito) é um passeio fechado sem repetição de vértices internos (resp. arestas). Um caminho que contém todos os vértices de um grafo é chamado de *caminho hamiltoniano*. A notação xPy indica que P é um caminho com extremidades x e y . A *distância* entre dois vértices x e y em um grafo G é o tamanho do menor caminho com extremidades x e y , caso exista um, ou infinita, caso contrário.

Seja C um ciclo em um grafo G . Uma *corda* em C é uma aresta $xy \in E(G)$ de modo que x e y estão em $V(C)$, mas $xy \notin E(C)$.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é *conexo* se há um caminho entre quaisquer dois vértices de $V(G)$. Um grafo conexo que não possui ciclos é chamado de *árvore*. Em uma árvore, uma *folha* é um vértice cujo grau é igual a um. Uma *estrela* de ordem n , denotada por S_n , é uma árvore com $n - 1$ folhas.

2.1.2 Subgrafos

Sejam G e H dois grafos. Diz-se que H é *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Seja H um subgrafo de G . Se H é isomorfo a um grafo H' , então G contém uma *cópia* de H' . Diz-se que H é uma *componente conexa* (ou simplesmente *componente*) de G se H é um subgrafo conexo maximal de G . Ou seja, não há um subgrafo de G , diferente de H , que seja conexo e contenha H .

Dado um grafo G , se e é uma aresta de G , então pode-se obter um subgrafo de G com $m - 1$ arestas removendo-se e de G . O grafo resultante desta operação é denotado por $G \setminus e$. Se v é um vértice de G , pode-se obter um subgrafo de G com $n - 1$ vértices

removendo-se v e todas as arestas incidentes a ele em G . O grafo resultante desta operação é denotado por $G \setminus \{v\}$ ou $G - v$. Estas operações estão ilustradas na Figura 2.

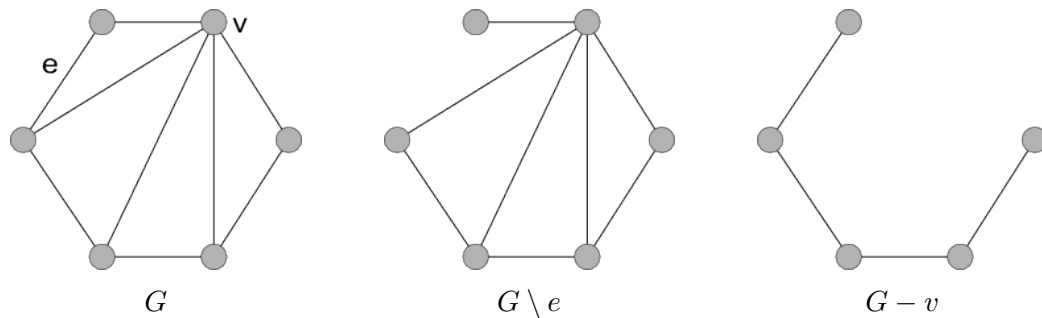


Figura 2 – Remoção de vértices e arestas

Um *subgrafo induzido* de um grafo G é obtido apenas por remoções de vértices. Se X é o conjunto de vértices removidos, o subgrafo resultante é denotado por $G - X$, e o subgrafo de G induzido por $Y = V(G) \setminus X$ é denotado por $G[Y]$. O conjunto de arestas é formado pelas arestas de G que possuem as duas extremidades em Y . Um conjunto de vértices que induz um grafo vazio é chamado de *estável* ou *independente*. Um conjunto de vértices que induz um grafo completo é chamado de *clique*.

Um *subgrafo gerador* de um grafo G é obtido apenas por remoções de arestas. Uma *árvore geradora* é um subgrafo gerador que é uma árvore.

2.1.3 Identificação de vértices e contração de arestas

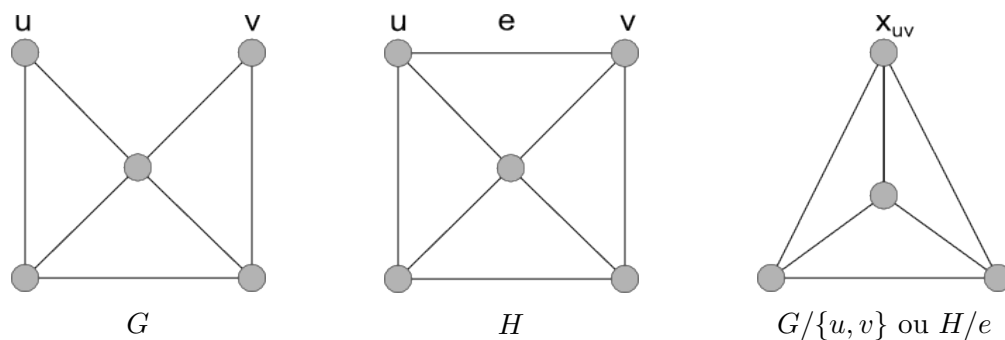


Figura 3 – Identificação de vértices e contração de arestas

A *identificação* de dois vértices não adjacentes u e v de um grafo G , denotada por $G/\{u, v\}$, consiste na substituição de u e v por um novo vértice x_{uv} que será a extremidade de todas as arestas incidentes anteriormente a u ou a v , removendo-se as arestas múltiplas. A *contração* de uma aresta e em um grafo G , denotada por G/e , consiste em remover a aresta e , caso esta não seja um laço, identificar suas extremidades. Na Figura 3 estão ilustradas estas operações.

2.2 Digrafos

Um *digrafo* é definido por um par ordenado $D = (V(D), A(D))$, sendo $V(D)$ o conjunto de vértices e $A(D)$ o conjunto de arcos de D , e por uma função de incidência de D , $\psi_D : A(D) \rightarrow V(D) \times V(D)$, que associa cada arco com um par ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de D . Se a é um arco, e $\psi_D(a) = (u, v)$, então diz-se que u *domina* v . Pode-se dizer ainda que u é a *cauda*, e v é a *cabeça* de a . Os vértices que dominam um vértice v são seus *vizinhos de entrada*. Já os dominados por ele são seus *vizinhos de saída*. Estes dois conjuntos são representados, respectivamente, por $N_D^-(v)$ e $N_D^+(v)$. A vizinhança de v em D é $N_D(v) = N_D^-(v) \cup N_D^+(v)$.

De forma complementar aos conceitos de vizinhança de entrada e vizinhança de saída, definem-se também *segunda vizinhança de entrada* e *segunda vizinhança de saída*. A primeira é definida como $N_D^{--}(v) = \{\cup_{x \in N_D^-(v)} N_D^-(x)\} \setminus N_D^-(v)$. Analogamente, a segunda é definida como $N_D^{++}(v) = \{\cup_{x \in N_D^+(v)} N_D^+(x)\} \setminus N_D^+(v)$.

Dados um digrafo D e um vértice $v \in V(D)$. O grau de entrada (resp. saída) de v em D , denotado por $d_D^-(v)$ (resp. $d_D^+(v)$), é o número de arcos com cabeça (resp. cauda) v . O grau de v em D é a soma dos seus graus de entrada e de saída ($d_D(v) = d_D^-(v) + d_D^+(v)$). Se $d_D^-(v) = 0$, então v é do tipo *fonte*. Se $d_D^+(v) = 0$, então v é um *sumidouro*. Se para todo vértice v de D , $d_D^+(v) = d_D^-(v)$, D é um *digrafo euleriano*. O grau mínimo de entrada (resp. saída) de D é representado por $\delta^-(D)$ (resp. $\delta^+(D)$). De forma análoga, o grau máximo de entrada (resp. saída) é representado por $\Delta^-(D)$ (resp. $\Delta^+(D)$). Um digrafo é dito *k-diregular* se $d_D^+(v) = d_D^-(v) = k$, para todo $v \in V(D)$.

O *reverso* de um digrafo D é o digrafo obtido a partir de D , invertendo-se cada um de seus arcos.

2.2.1 Relações entre grafos e digrafos

A qualquer digrafo D pode ser associado um grafo G com o mesmo conjunto de vértices, substituindo-se cada arco por uma aresta com as mesmas extremidades e removendo-se em seguida as arestas múltiplas. Este é o *grafo subjacente* de D , denotado por $G(D)$. Reciprocamente, qualquer grafo G pode ser transformado em um digrafo, substituindo cada aresta por dois arcos opostos com as mesmas extremidades. Este é o *digrafo associado* ou *simétrico* de G , representado por $D(G)$. Se cada aresta de G é substituída por apenas um arco com as mesmas extremidades, o digrafo obtido é uma *orientação* de G .

Uma orientação de um grafo simples é chamada de *grafo orientado*. Uma orientação de um grafo completo é chamada de *torneio*. Um *torneio bipartido* é uma orientação de um grafo bipartido completo. Na Figura 4, G é um grafo completo. H e I são torneios. Além disso, H é o reverso de I .

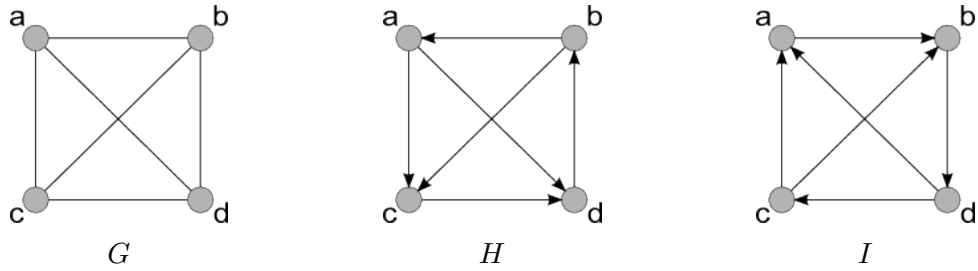


Figura 4 – Grafos e digrafos

Denotamos por R_{2n+1} um torneio diregular de ordem $2n + 1$ em que todo vértice tem graus de entrada e de saída iguais a n . Na Figura 5, temos um R_5 .

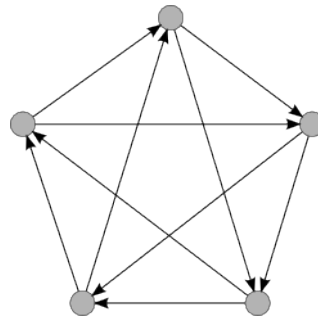


Figura 5 – Exemplo de torneio diregular de ordem 5

Os conceitos de *subdigrafo*, *subdigrafo induzido* e *subdigrafo gerador* são análogos aos conceitos de subgrafo, subgrafo induzido e subgrafo gerador (Subseção 2.1.2). Seja S um subconjunto dos vértices de um digrafo D . S é um conjunto estável (resp. uma clique) em D se, e somente se, S é um conjunto estável (resp. uma clique) em $G(D)$.

2.2.2 Caminhos e ciclos

Um *caminho orientado* é uma orientação de um caminho. Seja $P = v_1 \dots v_n$ um caminho orientado. Se v_i domina v_{i+1} , então (v_i, v_{i+1}) é um *arco de avanço*; caso contrário, é um *arco de retorno*. P é um *caminho direcionado* se todos os seus arcos são ou de avanço ou de retorno. Um *bloco* de P é um subcaminho direcionado maximal de P com tamanho maior que zero. Note que um caminho orientado é uma concatenação de blocos. Denota-se por $P^+(b_1, \dots, b_k)$ (resp. $P^-(b_1, \dots, b_k)$) um caminho com k blocos cujo primeiro bloco é de avanço (resp. de retorno), e b_i representa o tamanho do bloco i , para $1 \leq i \leq k$.

Se P é um caminho orientado de ordem n com $n - 1$ blocos, então ele é um *caminho antidirecionado*. Representamos por A_n^+ (resp. por A_n^-) um caminho antidirecionado de ordem n cujo primeiro arco é de avanço (resp. de retorno).

Na Figura 6, P_1 é um $P^+(1, 2, 1, 1)$, P_2 é direcionado, P_3 é um $P^+(3, 2)$ e P_4 é um caminho antidirecionado (A_6^+).

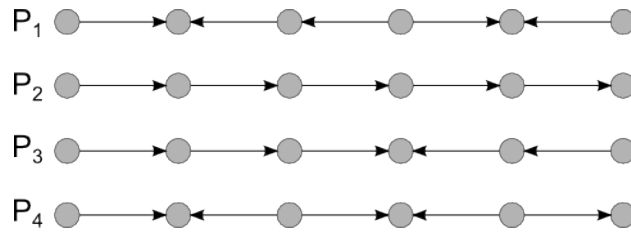


Figura 6 – Caminhos orientados

De forma análoga às definições para caminho, definem-se *ciclo orientado*, *ciclo direcionado* e *ciclo orientado com dois blocos*. A *cintura* de um digrafo D é o tamanho do seu menor ciclo direcionado.

Um digrafo D é conexo se $G(D)$ é conexo. Adicionalmente, D é *fortemente conexo* se, para quaisquer dois vértices distintos $u, v \in V(D)$, há um caminho direcionado de u para v . Na Figura 7, G é um digrafo conexo e H é um digrafo fortemente conexo. Seja H um subdigrafo de D . Diz-se que H é uma componente de D se $G(H)$ é uma componente de $G(D)$.



Figura 7 – Exemplos de digrafo conexo e fortemente conexo

2.2.3 Rei, kernel e antikernel

Em um digrafo D , diz-se que um vértice x é um *rei* (*king*) se o tamanho do menor caminho direcionado de x a qualquer vértice em $V(D) \setminus \{x\}$ é no máximo dois. Ou seja, se $\{x\} \cup N_D^+(x) \cup N_D^{++}(x) = V(D)$.

Seja D um digrafo. Um *kernel* em D é um conjunto independente $S \subseteq V(D)$ de modo que todo vértice em $V(D) \setminus S$ domina pelo menos um vértice em S . D é *kernel-perfeito* se todos os seus subdigrafos induzidos possuem um kernel.

Um *antikernel* em um digrafo D é um conjunto independente $S \subseteq V(D)$ de modo que todo vértice em $V(D) \setminus S$ é dominado por pelo menos um vértice em S . Por analogia ao conceito de kernel-perfeito, é definido *antikernel-perfeito*.

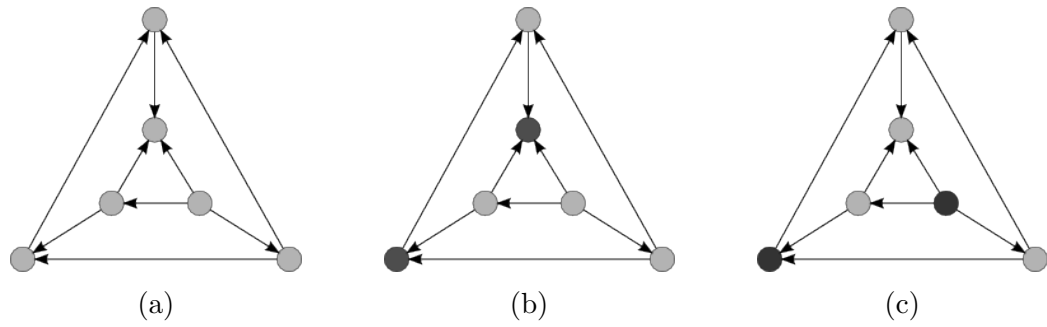


Figura 8 – Exemplo de kernel e antkernel em um digrafo

Se um digrafo D é, simultaneamente, kernel-perfeito e antkernel-perfeito, ele é chamado de *bikernel-perfeito*. Na Figura 8, os vértices destacados em (b) (resp. (c)) representam um *kernel* (resp. antkernel) no digrafo em (a).

2.2.4 Árvores orientadas

Uma *árvore orientada* é definida como uma orientação de uma árvore. Uma *árvore orientada enraizada* é uma árvore orientada em que um vértice é designado como raiz. Ademais, se este é uma *fonte*, então a árvore é *bem enraizada*.

O *nível* de um vértice v em uma árvore enraizada A é a sua distância à raiz em $G(A)$. Um arco (x, y) de A é um *arco de retorno* se o nível de y for menor que o nível de x . Denota-se por $B(A)$ o subdigrafo induzido de A por seus arcos de retorno, por $b(A)$ o número de arcos de $B(A)$, e por $c(A)$ o número de componentes de $B(A)$. Estas são as *componentes de retorno* de A . No exemplo da Figura 9, $b(A) = 5$ e $c(A) = 3$.

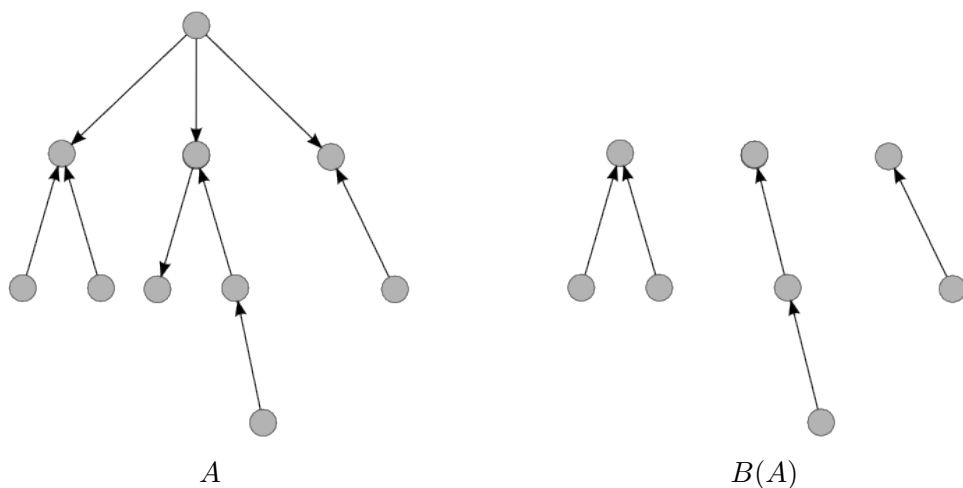


Figura 9 – Componentes de retorno de uma árvore orientada

Seja A uma árvore orientada. As *folhas de entrada* de A são os vértices v tais que $d_A^+(v) = 1$ e $d_A^-(v) = 0$. Analogamente, as *folhas de saída* de A são os vértices v tais

que $d_A^+(v) = 0$ e $d_A^-(v) = 1$. O conjunto das *folhas de entrada* (resp. *de saída*) de A é representado por $In(A)$ (resp. $Out(A)$).

Uma *estrela de entrada* (resp. *de saída*) é uma orientação de uma estrela de ordem n onde todas as folhas são de entrada (resp. de saída), e é representada por S_n^- (resp. S_n^+). Denota-se por $S_{i,j}$ uma estrela orientada que possui exatamente i folhas de entrada e j folhas de saída, onde $i + j = n - 1$. A Figura 10 ilustra essas orientações de estrelas.

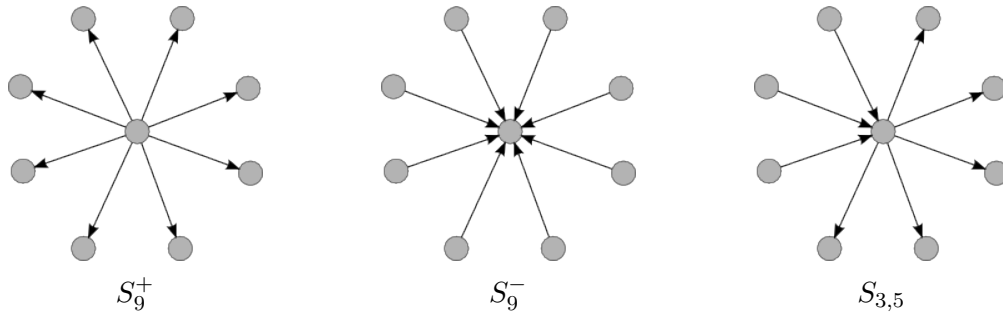


Figura 10 – Orientações de estrelas

Seja A uma árvore enraizada em um vértice s . Segundo Bang-Jensen e Gutin (2007), A é uma *arborescência de entrada* (resp. *arborescência de saída*) se $d_A^+(s) = 0$ (resp. $d_A^-(s) = 0$) e, para todo vértice $x \neq s$, $d_A^+(x) = 1$ (resp. $d_A^-(x) = 1$).

Como apresentado em Burr (1982), uma árvore orientada A é *antidirecionada* se, para todo $v \in V(A)$, $d_A^+(v) = 0$ ou $d_A^-(v) = 0$. Este tipo de árvore pode também ser chamado de *árvore fonte-sumidouro* (do inglês, *source-sink tree*) pois, pela definição, todos os seus vértices são fontes ou sumidouros.

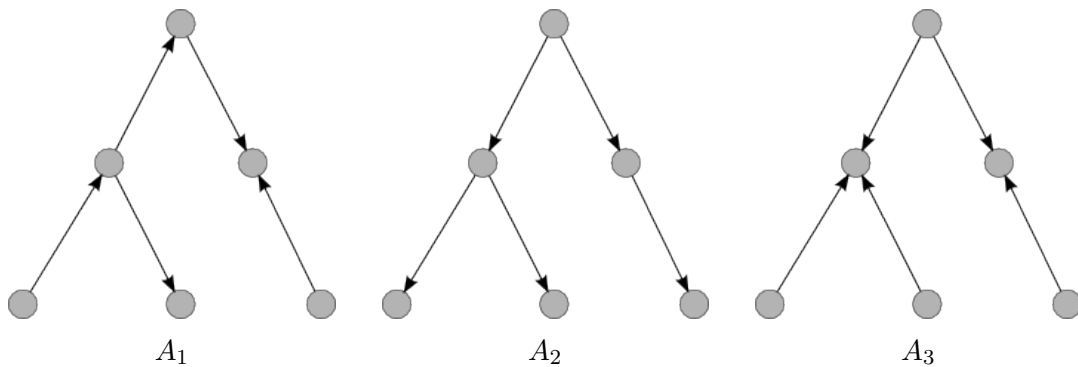


Figura 11 – Exemplos de árvores orientadas

Na Figura 11, A_1 , A_2 e A_3 são árvores orientadas. Mais especificamente, A_2 é uma arborescência de saída, e A_3 é uma árvore orientada antidirecionada.

2.2.5 Identificação de vértices, contração e subdivisão de arcos

Similarmente ao que é feito em grafos não orientados, identificar dois vértices não adjacentes a e b de um digrafo D consiste em substituir estes vértices por um único vértice v_{ab} , dominando todos os vértices que são dominados por a ou por b , e sendo dominado por todos os vértices que dominam a ou b . O digrafo resultante é denotado por $D/\{a, b\}$. A Figura 12 ilustra esta operação.

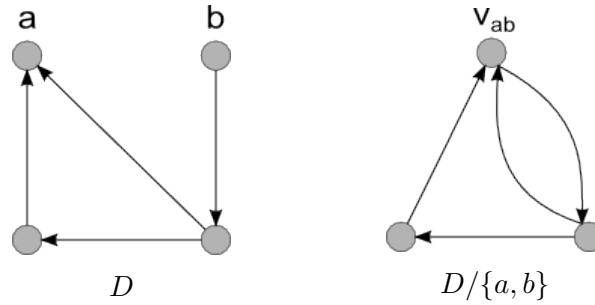


Figura 12 – Identificação de vértices e um digrafo

Contraír um arco em um digrafo D é equivalente a contraír uma aresta no seu grafo subjacente. Uma *subdivisão* de um arco (a, b) de um digrafo D consiste na substituição de (a, b) por um caminho direcionado de a para b de forma que todo vértice interno deste caminho tenha grau dois. A subdivisão de um digrafo D é o digrafo D' obtido a partir de D pela subdivisão de um ou mais de seus arcos. Na Figura 13, D' é uma subdivisão de D .

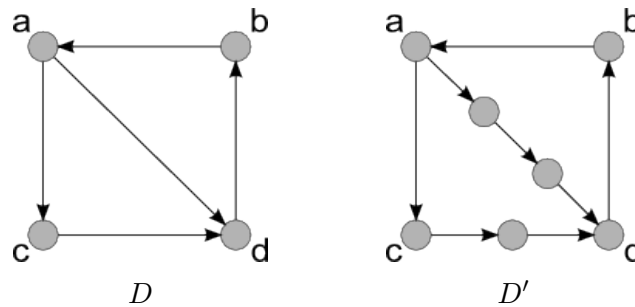


Figura 13 – Exemplo de subdivisão de digrafos

2.3 Coloração de Vértices

Uma k -coloração de vértices, ou simplesmente uma k -coloração, é uma atribuição de k cores distintas aos vértices de um grafo, onde a cada vértice é atribuída uma cor. Usualmente, o conjunto de cores costuma ser $\{1, 2, \dots, k\}$. Uma coloração é própria se não há vértices adjacentes com a mesma cor.

Uma k -coloração pode ser vista como uma partição $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ do conjunto de vértices do grafo, onde cada parte V_i possui os vértices com a cor i . Dizemos que V_i representa uma *classe de cor*. Uma k -coloração é *própria* se cada classe de cor é um conjunto estável. Um grafo é k -colorível se ele tem uma k -coloração própria. Um digrafo D é k -colorível se, e somente se, $G(D)$ é k -colorível.

O menor valor de k para o qual um (di)grafo G tem uma k -coloração própria é chamado de *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$. Neste caso, o (di)grafo é chamado de k -cromático. Problemas de coloração de (di)grafos estão entre os mais estudados em Teoria dos Grafos pela sua relevância, tanto do ponto de vista teórico quanto do de aplicações. Segundo Karp (1972), decidir se um (di)grafo é k -colorível é um problema \mathcal{NP} -Completo. De acordo com Lund e Yannakakis (1994), encontrar uma aproximação para o número cromático de um grafo é um problema computacionalmente difícil.

Um (di)grafo é k -crítico se o seu número cromático é k , enquanto todos os seus sub(di)grafos próprios são $(k - 1)$ -coloríveis.

Proposição 2.3.1. *Se D é um digrafo k -crítico, então $\delta(D) \geq k - 1$.*

Demonstração. Seja D um digrafo k -crítico. Suponha, por contradição, que existe um vértice v em $V(D)$ tal que $d_D(v) < k - 1$. Como D é k -crítico, $\chi(D - v) = k - 1$. Uma vez que v é adjacente a no máximo $k - 2$ vértices, pode-se atribuir a ele uma cor em $\{1, \dots, k - 1\}$. Portanto, $\chi(D) = k - 1$, uma contradição. \square

Proposição 2.3.2. *Se D é um digrafo k -cromático com dois vértices não adjacentes a e b , então $\chi(D/\{a, b\}) \geq k$.*

Demonstração. Sejam $D' = D/\{a, b\}$ e $x \in V(D')$ o vértice correspondente à identificação de a e b em D . Por contradição, suponha que $\chi(D') \leq k - 1$. Uma vez que a e b não são adjacentes, eles podem receber a mesma cor de x , obtendo-se uma $(k - 1)$ -coloração própria de D , uma contradição. \square

Teorema 2.3.3 (Brooks). *Se G é um grafo conexo, e G não é um ciclo ímpar e nem completo, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

O *grau médio* de um digrafo D , denotado por $Ad(D)$, é $\frac{\sum_{v \in V(D)} d(v)}{|V(D)|}$. Sabe-se que $\sum_{v \in V(D)} d(v) = \sum_{v \in V(D)} (d_D^-(v) + d_D^+(v))$ e que $\sum_{v \in V(D)} d_D^-(v) = \sum_{v \in V(D)} d_D^+(v)$. Portanto, temos $Ad(D) = 2 \frac{\sum_{v \in V(D)} d_D^+(v)}{|V(D)|}$. O *grau médio máximo* of D , denotado por $Mad(D)$, é $\max\{Ad(H) \mid H \subseteq D\}$.

Lema 2.3.4 (Addario-Berry et al.). *Se G é um grafo de grau médio máximo menor ou igual a k , $k \geq 3$, então $\chi(G) \leq k$ ou G contém um grafo completo de ordem $k + 1$.*

Demonstração. Se $\chi(G) > k$, então G contém um grafo $(k + 1)$ -crítico H . Uma vez que, pela Proposição 2.3.1, $\delta(H) \geq k$ e $Mad(G) \leq k$, o subgrafo H deve ser k -regular. Como $\chi(H) = k + 1$ e $k \geq 3$, pelo Teorema 2.3.3, H é um grafo completo de ordem $k + 1$. \square

3 FERRAMENTAS

Neste capítulo serão apresentadas algumas ferramentas utilizadas para verificar o embutimento de árvores em digrafos, tais como *ordem mediana*, *floresta de saída geradora final*, *decomposição em alças* e *circuito bom*.

3.1 Ordens Medianas

Seja $T = (V(T), A(T))$ um torneio. Uma *ordem* de T é uma enumeração $L = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ dos vértices de T . Segundo L , $\{(v_i, v_j) \in A(T) : i < j\}$ são os *arcos para frente*. Os demais arcos são *arcos para trás*. De acordo com Bang-Jensen e Gutin (2007), uma ordem L que maximiza o número de arcos para frente é chamada de *ordem mediana*. Seja $[v_i, v_j] = \{v_i, \dots, v_j\}$. L é uma *ordem mediana local* se, para todos $1 \leq i < j \leq n$, valem as seguintes desigualdades:

$$|N_T^+(v_i) \cap [v_i, v_j]| \geq |N_T^-(v_i) \cap [v_i, v_j]| \quad (3.1)$$

$$|N_T^-(v_j) \cap [v_i, v_j]| \geq |N_T^+(v_j) \cap [v_i, v_j]| \quad (3.2)$$

De uma forma geral, sejam L e L' ordenações dos vértices de um digrafo D . L e L' são *ordens vizinhas* se uma pode ser obtida a partir da outra pela movimentação de um único vértice. Ou seja, duas ordens são vizinhas se, após a remoção de um mesmo vértice de ambas, elas se tornarem iguais. Por exemplo, sejam as ordens $L_1 = \langle v_2, v_4, v_1, v_3 \rangle$, $L_2 = \langle v_3, v_2, v_4, v_1 \rangle$ e $L_3 = \langle v_3, v_2, v_1, v_4 \rangle$. As ordens L_1 e L_2 , como também L_2 e L_3 , são vizinhas, pois $L_1 - v_3 = L_2 - v_3$ e $L_2 - v_4 = L_3 - v_4$. Já as ordens L_1 e L_3 não são vizinhas.

Observe que se a desigualdade (3.1) não for válida, para algum $i < j$, então pode-se obter uma ordem vizinha melhor colocando-se v_i imediatamente após v_j . De forma análoga, se a desigualdade (3.2) não for válida, então pode-se obter uma ordem vizinha melhor colocando-se v_j imediatamente antes de v_i . Em outras palavras, se uma ordem L não é mediana local, então ela possui uma ordem vizinha melhor que ela.

Segundo Havet e Thomassé (2000b), pelas desigualdades (3.1) e (3.2), $v_1 \dots v_n$ é um caminho hamiltoniano sempre que $L = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ for uma ordem mediana local. De fato, para $1 \leq i \leq n - 1$, se v_i não domina v_{i+1} (por se tratar de um torneio, temos que v_{i+1} domina v_i), então L não é uma ordem mediana local, pois é possível encontrar uma vizinha melhor que ela colocando-se v_i após v_{i+1} .

De acordo com Bang-Jensen e Gutin (2007), há uma diferença significativa entre os problemas de determinação de uma *ordem mediana* e de uma *ordem mediana local*. A determinação da primeira é um problema \mathcal{NP} -difícil. Já a última pode facilmente ser construída em tempo polinomial por meio de um algoritmo guloso (Algoritmo 1) em

tempo $O(n^4)$. No Algoritmo 1, $v(L) = |\{(v_i, v_j) : 1 \leq j < i \leq n\}|$ e $N(L)$ é o conjunto de ordens vizinhas de uma ordem L .

Algoritmo 1: LocalMedianOrder

Entrada: Um digrafo $D = (V(D), A(D))$

Saída: Uma ordem mediana local de $V(D)$

início

1. $S :=$ Permutação aleatória dos vértices de $V(D)$
2. Enquanto existir $S' \in N(S)$ tal que $v(S') < v(S)$, faça
 $S := S'$ nova solução corrente
3. Retorne S

fim

Seja T um torneio de ordem n . Segundo o conceito de rei apresentado na Subseção 2.2.3, uma *ordem de reis* em T é definida como sendo uma sequência $S = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ onde v_i é um rei no torneio $T[\{v_j | j \geq i\}]$. Toda ordem mediana é uma ordem mediana local; e toda ordem mediana local é uma ordem de reis. De fato, seja $L = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ uma ordem mediana local de T . Se existir um vértice v_i que não é um rei no torneio $T[\{v_{i+1}, \dots, v_n\}]$, $1 \leq i < n$, então existe um vértice v_j , $i < j \leq n$, que domina v_i e todos os seus vizinhos de saída no intervalo $[v_{i+1}, v_n]$. Neste caso, L não é uma ordem mediana local, pois é possível obter uma ordem melhor que ela, colocando-se v_i logo após v_j .

3.2 Floresta de Saída Geradora Final

De acordo com El-Sahili (2004b) e Addario-Berry, Havet e Thomassé (2007), uma *floresta de saída* é uma união disjunta de *arborescências de saída*. Seja F uma *floresta de saída* e x um vértice de F . O nível de x em F é o seu nível na arborescência de F a que ele pertence. Por exemplo, o nível 0 compreende todas as raízes das arborescências de F . Denota-se por F_i o conjunto de vértices com nível i em F . Um vértice y é descendente de x em F se há um caminho direcionado de x para y em F .

Seja F uma *floresta de saída geradora* de um digrafo D . Se há um arco (x, y) em D de F_i para F_j , com $i \geq j$, e x não é descendente de y , então a floresta de saída F' obtida com a adição de (x, y) e a remoção dos arcos de F que dominam y , caso exista algum, é chamada de *melhoramento elementar* de F . Uma *floresta de saída* F' é um melhoramento de F se ela pode ser obtida a partir de F após uma sequência de melhoramentos elementares. A observação chave é que pelo menos um vértice tem o seu nível em F' maior do que em F . O conjunto de vértices de D é finito e, portanto, não é possível realizar melhoramentos infinitamente. Se F é uma *floresta de saída geradora*

para a qual não há melhoramentos elementares, então F é uma *floresta de saída geradora final*.

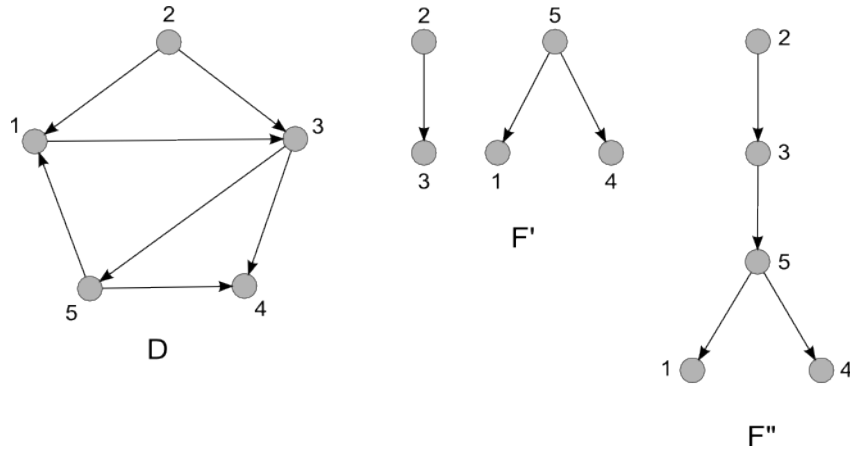


Figura 14 – Florestas geradoras de saída

Na Figura 14, F' é uma floresta de saída geradora para D . O vértice 3 domina o 5 em D e 3 não é descendente de 5 em F' . Portanto, F'' é um melhoramento de F' . Não há mais melhoramentos elementares para F'' . Esta é, portanto, uma floresta de saída geradora final de D . Da definição de floresta de saída geradora final, El-Sahili (2004b) mostrou o seguinte:

Proposição 3.2.1. *Sejam D um digrafo e F uma floresta de saída geradora final de D . Se um vértice $x \in F_i$ domina, em D , um vértice $y \in F_j$, $j \leq i$, então x é um descendente de y em F . Em particular, cada nível de F é um conjunto estável em D .*

Demonstração. Todo digrafo possui pelo menos uma floresta geradora de saída que é uma floresta sem arcos. Então, escolha uma floresta geradora de saída F em D que gere a menor sequência $(F_0, \dots, F_{|D|})$ na ordem lexicográfica. Seja S um nível qualquer de F . Afirmamos que S é um conjunto estável de D . Por contradição, suponha que exista um arco $a = (x, y)$ em D com $x, y \in S$. Sejam f o arco de F com cabeça y , caso exista, e $F' = F + a - f$. Suponha que $S = F_i$. Então, para todo $k \geq 1$, temos: $F'_k = F_k$, para $k < i$, e $F'_i = F_i - 1$. Assim, na ordem lexicográfica, $(F'_0, F'_1, \dots, F'_{|D|}) < (F_0, F_1, \dots, F_{|D|})$. Uma contradição. \square

3.3 Decomposição em Alças

Seja um digrafo D . Uma *decomposição em alças* de D é uma sequência H_1, \dots, H_r de digrafos de modo que:

1. H_1 é um ciclo direcionado de D ;

2. Para $i = 2, \dots, r$, H_i é uma *alça*, isto é, um caminho ou um ciclo direcionado de D começando e terminando em $V(H_1, \dots, H_{i-1})$, mas sem vértices internos neste conjunto;
3. $D = H_1 \cup \dots \cup H_r$.

Uma alça H_i que é um arco é chamada de *alça trivial*. Segundo Addario-Berry, Havet e Thomassé (2007), o valor de r é invariante para toda *decomposição em alças* de um digrafo D . De fato, $r := m - n + 1$ (número de arcos menos o número de vértices mais um). Entretanto, o número de alças não triviais não é invariante. Na Figura 15 a seguir, são apresentadas duas decomposições (H e H'), cada uma com 4 alças ($r = 4$), para o digrafo D .

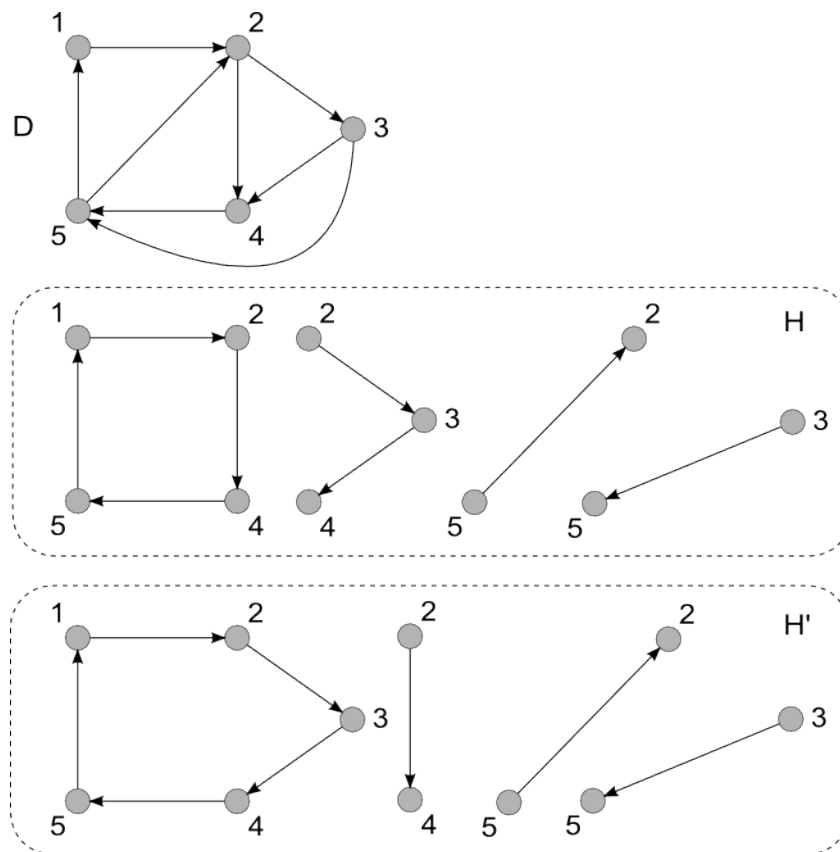


Figura 15 – Decomposição em alças

3.4 Circuito Bom

De acordo com Addario-Berry, Havet e Thomassé (2007), sejam D um digrafo e k um inteiro positivo. Um circuito direcionado C de D é dito *k-bom* se $|C| \geq k$ e $\chi(D[V(C)]) \leq k$.

Bondy (1976) apresentou a seguinte extensão para o Teorema de Gallai-Roy (Teorema 4.3.3), que será apresentado na Seção 4.3.1, para digrafos fortemente conexos:

Teorema 3.4.1. *Todo digrafo D fortemente conexo possui um circuito cujo tamanho é pelo menos $\chi(D)$.*

Seja D um digrafo fortemente conexo. Pelo Teorema 3.4.1, D possui um circuito de tamanho pelo menos $\chi(D)$ e, portanto, um circuito $\chi(D)$ -bom. Addario-Berry, Havet e Thomassé (2007) mostraram que:

Lema 3.4.2. *Sejam D um digrafo fortemente conexo e um inteiro $k \in \{3, \dots, \chi(D)\}$. Então, D possui um circuito k -bom.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.4.1, há um circuito com tamanho pelo menos $\chi(D)$. Suponha $k < \chi(D)$. Em particular $\chi(D) > 3$. Considere o menor circuito C com tamanho pelo menos k . Afirmamos que C é k -bom. Suponha, por contradição, que $\chi(D[V(C)]) \geq k+1$. Por indução no número de vértices, assumamos que $D = D[V(C)]$. Além disso, se D contém um circuito de tamanho 2, podemos remover um de seus arcos de modo que C e $\chi(D)$ permaneçam inalterados. Assim, assumimos que D não tem circuito de tamanho 2, e que todo circuito de tamanho pelo menos k é hamiltoniano. Nosso objetivo é encontrar uma contradição.

Observe que, para todo vértice $u \in V(D)$, $N_D^-(u) \leq k-2$. De fato, se v_1, \dots, v_{k-1} fossem vizinhos de entrada de u de modo que v_1, \dots, v_{k-1}, u aparecessem nesta ordem em C , o circuito obtido de C considerando o arco (v_{k-2}, u) teria tamanho pelo menos k , uma vez que o vizinho de saída de u em C não é um dos seus vizinhos de entrada. Pela minimalidade de C , isto é uma contradição. Pelo mesmo argumento, temos que todo vértice tem grau de saída no máximo $k-2$ em D .

Consideremos H_1, \dots, H_r uma decomposição em alças de D que minimiza o número de alças triviais. Podemos enumerar primeiro as alças não triviais, assumindo que H_1, \dots, H_p são alças não triviais, e H_{p+1}, \dots, H_r são arcos. Seja $D' = H_1 \cup \dots \cup H_p$. Claramente, D' é um subgrafo gerador de D e fortemente conexo. Uma vez que $\chi(D) > 3$, D não é um circuito induzido. Em particular, $p > 1$.

Denotamos por $x_1 \dots x_q$ a alça H_p sem as suas extremidades.

Se $q = 1$, o digrafo $D' - x_1$ é fortemente conexo. Portanto, $D - x_1$ é também fortemente conexo. Além disso, seu número cromático é pelo menos k . Assim, pelo Teorema 3.4.1, existe um circuito de tamanho pelo menos k em $D - x_1$, uma contradição.

Se $q = 2$, observe que x_2 é o único vizinho de saída de x_1 . Caso contrário, poderíamos ter duas alças não triviais de H_p , contradizendo a maximalidade do número de alças não triviais. Similarmente, x_1 é o único vizinho de entrada de x_2 . Uma vez que o grau de entrada de todo vértice é pelo menos $k-2$, x_1 e x_2 têm grau no máximo $k-1$ no grafo subjacente de D . Uma vez que $\chi(D) > k$, segue que $\chi(D \setminus \{x_1, x_2\}) > k$. $D \setminus \{x_1, x_2\}$ é fortemente conexo e, pelo Teorema 3.4.1, contém um circuito de tamanho pelo menos k , o que contradiz a minimalidade de C .

Daí, podemos supor que $q > 2$. Para todo $i = 1, \dots, q-1$, pela maximalidade de p , o único arco em D saindo de $\{x_1, \dots, x_i\}$ é (x_i, x_{i+1}) . Caso contrário, poderíamos ter duas alças não triviais de H_p . Similarmente, para todo $j = 2, \dots, q$, o único arco em D entrando em $\{x_j, \dots, x_q\}$ é (x_{j-1}, x_j) . Em particular, como para $q = 2$, x_1 tem grau de saída 1 em D e x_q tem grau de entrada 1 em D .

Uma outra consequência é que $G(D)$ tem duas componentes conexas, $D_1 = D \setminus \{x_1, \dots, x_q\}$ e $D_2 = D[\{x_2, \dots, x_{q-1}\}]$. Uma vez que os graus de x_1 e x_q em $G(D)$ são no máximo $k-1$ e D é pelo menos $(k+1)$ -cromático, segue que $\chi(D_1) \geq k+1$ ou $\chi(D_2) \geq k+1$. Observe que D_1 é fortemente conexo e, portanto, não podemos ter $\chi(D_1) \geq k+1$, caso contrário, pelo Teorema 3.4.1, D_1 teria um circuito de tamanho pelo menos k e menor que C , o que é impossível. Assim, $\chi(D_2) \geq k+1$. Além disso, uma vez que H_p não pode ser decomposta em duas alças não triviais em D , os arcos (x_i, x_j) em D_2 , com $i < j$, são exatamente os arcos (x_i, x_{i+1}) . Em particular, as componentes conexas de D_2 são da forma $\{x_i, \dots, x_{i+j}\}$, e assim há no máximo um arco entrando nelas e um arco saindo delas. Assim, uma componente fortemente conexa de D_2 tem número cromático pelo menos $k+1$, e obtemos uma contradição pelo Teorema 3.4.1. \square

4 CONDIÇÕES PARA A EXISTÊNCIA DE ÁRVORES ORIENTADAS EM DIGRAFOS

Neste capítulo são apresentados alguns tipos de embutimentos, juntamente com alguns dos principais resultados sobre cada um destes tipos.

Sejam D e D' digrafos. Um *embutimento* de D' em D é uma função injetiva $f : V(D') \rightarrow V(D)$ tal que $(f(x), f(y)) \in A(D)$ sempre que $(x, y) \in A(D')$. Ou seja, dizer que D' está embutido em D é equivalente a dizer que D contém uma cópia de D' .

Na Figura 16, pode-se observar que A_1 e A_2 podem ser embutidas no torneio T . A função injetiva $f_1 : V(A_1) \rightarrow V(T)$ pode ser definida como $f_1 = \{(1, c), (2, d), (3, a)\}$. Seguindo a mesma ideia, pode-se definir $f_2 : V(A_2) \rightarrow V(T) = \{(1, d), (2, a), (3, c)\}$

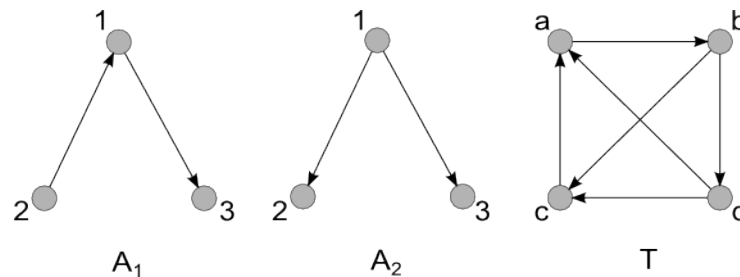


Figura 16 – Embutimento em digrafos

Nos estudos relacionados a embutimento de árvores orientadas A em digrafos D , podem ser considerados o número cromático, o número de arcos, ou ainda a ordem (no caso de torneios) para caracterização dos digrafos D que contêm cópias de A .

4.1 Embutimento em Torneios

Um grafo orientado D é *x-inevitável* se, para todo torneio T de ordem x , existe um embutimento de D em T . A ideia geral é determinar o menor valor de uma função $f(n)$ de modo que todo torneio de ordem $f(n)$ contém uma cópia de qualquer árvore orientada de ordem n .

Uma vez que um torneio é uma orientação qualquer de um grafo completo, pela simetria direcional temos:

Proposição 4.1.1. *Seja D um grafo orientado. Se D é l -inevitável, então o reverso de D é também l -inevitável.*

4.1.1 Caminhos inevitáveis

Rédéi (1934) apresentou o resultado a seguir, um dos primeiros relacionados a caminhos inevitáveis.

Teorema 4.1.2. *Todo torneio contém um número ímpar de caminhos direcionados hamiltonianos.*

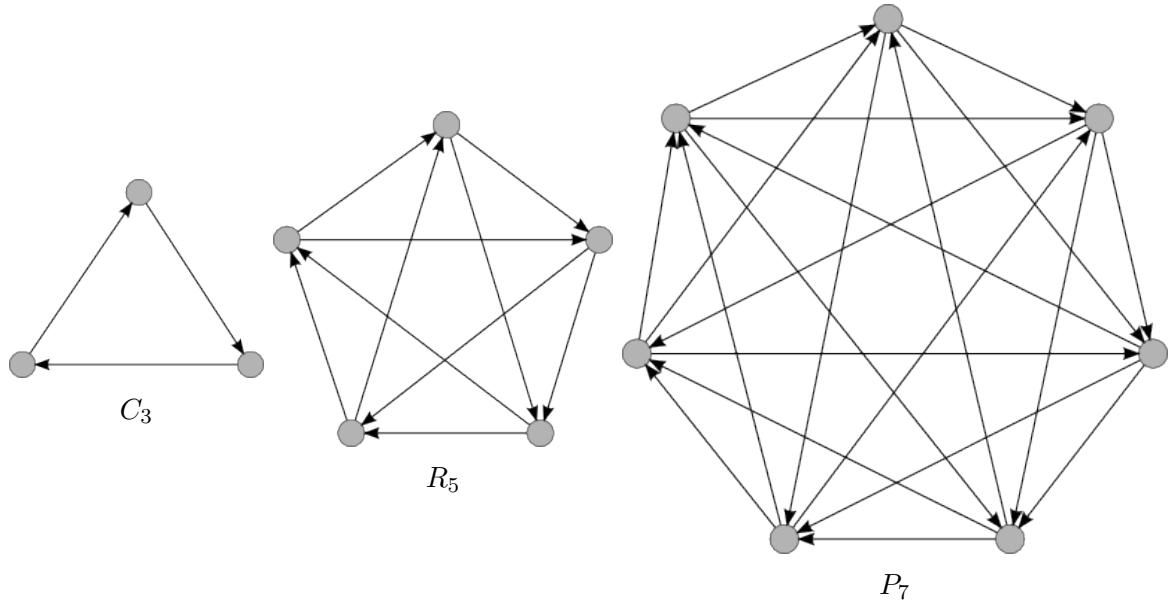


Figura 17 – Exceções de Grünbaum

Considere os torneios da Figura 17. C_3 , R_5 e P_7 são torneios direculares de ordens, respectivamente, 3, 5 e 7. Este último é conhecido como Torneio de Paley de ordem 7. Grünbaum (1971) mostrou que:

Teorema 4.1.3. *Exceto para o C_3 , R_5 e P_7 , todo torneio contém um caminho hamiltoniano antidirecionado.*

Este resultado é conhecido como as Exceções de Grünbaum. Estas podem ser representadas pelos pares: (C_3, A_3^+) , (C_3, A_3^-) , (R_5, A_5^+) , (R_5, A_5^-) , (P_7, A_7^+) e (P_7, A_7^-) .

Rosenfeld (1972) apresentou um resultado mais forte que o do Teorema 4.1.3. Ele mostrou que em um torneio com $n \geq 12$ vértices, cada vértice é a origem de um caminho hamiltoniano antidirecionado. Ele ainda conjecturou o seguinte:

Conjectura 4.1.4. *Há um inteiro $N > 7$ tal que todo torneio de ordem $n \geq N$ contém uma cópia de qualquer orientação de um caminho hamiltoniano.*

A condição $N > 7$ resulta dos contraexemplos apresentados no Teorema 4.1.3. A Conjectura 4.1.4 foi verificada por Thomason (1986) para N suficientemente grande. Ele mostrou que N existe e é menor que 2^{128} .

Teorema 4.1.5. *Para n suficientemente grande, todo torneio de ordem n contém todo caminho com n vértices.*

Havet e Thomassé (2000a) apresentaram um refinamento para o Teorema 4.1.5:

Teorema 4.1.6. *Seja T um torneio de ordem n e P um caminho orientado de ordem n . Se (T, P) não é uma exceção de Grünbaum, então T contém uma cópia de P .*

Com esse resultado, Havet e Thomassé (2000a) mostraram que $N = 8$ e que, para torneios de ordem inferior a 8, as únicas exceções são as apresentadas no Teorema 4.1.3, provando assim a Conjectura 4.1.4.

4.1.2 Árvores inevitáveis

Segundo Kühn, Mycroft e Osthus (2011a), em 1971, David Sumner conjecturou o seguinte:

Conjectura 4.1.7. *Toda árvore orientada A de ordem $n \geq 2$ é $(2n - 2)$ -inevitável.*

Essa conjectura continua em aberto. Este é um dos problemas mais conhecidos sobre torneios. O limite $(2n - 2)$ é o melhor possível. Para ver isso, seja $A = S_n^+$ e T um torneio regular de ordem $2n - 3$. Todos os vértices de T possuem $n - 2$ vizinhos de entrada e de saída. Portanto, T não contém uma cópia de A .

Kühn, Mycroft e Osthus (2011a) provaram uma versão assintótica da Conjectura 4.1.7, na qual todo torneio de ordem $(2 + o(1))n$ contém uma cópia de qualquer árvore direcionada de ordem n . Usando ideias e resultados deste trabalho, Kühn, Mycroft e Osthus (2011b) provaram que a Conjectura de Sumner vale para todo n suficientemente grande. Juntamente com Stephan Thomassé, Havet (2003) fez a seguinte conjectura:

Conjectura 4.1.8. *Toda árvore orientada de ordem n com k folhas é $(n+k-1)$ -inevitável.*

A Conjectura 4.1.8 implica a Conjectura 4.1.7, uma vez que toda árvore orientada de ordem n possui no máximo $k = n - 1$ folhas.

As ordens medianas são muito utilizadas como ferramentas para verificação do embutimento de árvores orientadas em torneios. Sejam T um torneio de ordem n , e $L = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ uma ordem mediana local de T . As vizinhanças de entrada $(N_L^-(v_i))$ e de saída $(N_L^+(v_i))$ de um vértice v_i em T , segundo L , são definidas a seguir:

$$N_L^-(v_i) = N_T^-(v_i) \cap [v_1, v_{i-1}] \quad (4.1)$$

$$N_L^+(v_i) = N_T^+(v_i) \cap [v_{i+1}, v_n] \quad (4.2)$$

Sejam A uma árvore orientada, T um torneio, L uma ordem mediana local de T , f um embutimento de A em T e $f(A)$ o conjunto de vértices em T mapeados para os vértices de A . De acordo com Havet e Thomassé (2000b), f é um L -embutimento se, para todo vértice $x \in V(T)$, valem as seguintes desigualdades:

$$|N_L^-(x) \cap f(A)| \leq |N_L^-(x) \setminus f(A)| + 1 \quad (4.3)$$

$$|N_L^+(x) \cap f(A)| \leq |N_L^+(x) \setminus f(A)| + 1 \quad (4.4)$$

Pelas desigualdades acima, observa-se que todo vértice $x \in V(T)$ possui mais vizinhos de entrada e de saída do que o necessário para fazer o embutimento de A em T .

Partindo das desigualdades (4.3) e (4.3), El-Sahili (2004c) diz que um L -embutimento de uma árvore A em T pode ser visto como um embutimento de A em T tal que, para toda seção final $I := [v_{i+1}, v_n]$ de L , vale a seguinte desigualdade:

$$|f(A) \cap I| < \frac{1}{2}|I| + 1 \quad (4.5)$$

Um número considerável de resultados parciais para a Conjectura de Sumner tem sido obtido. Alguns destes serão apresentados a seguir.

Havet e Thomassé (2000b) provaram que a conjectura de Sumner vale para um caso particular de árvores orientadas - as arborescências - pelo seguinte teorema:

Teorema 4.1.9. *Toda arborescência A de ordem $n > 1$ é $(2n - 2)$ -inevitável.*

Demonstração. Por indução em n , um resultado mais forte foi provado. A desigualdade (4.3) é sempre satisfeita para qualquer torneio T de ordem $2n - 2$ e qualquer ordem mediana local L de T . O resultado é trivial se A é apenas um arco. Se $n > 2$, sejam T um torneio de ordem $2n - 2$ e $L = \langle x_1, \dots, x_{2n-2} \rangle$ uma ordem mediana local de T . Denota-se por (T', L') a restrição de (T, L) para $[x_1, \dots, x_{2n-4}]$. Sejam x uma folha de saída de A , y o vizinho de entrada de x e $A' = A \setminus \{x\}$. Pela hipótese de indução, há um L' -embutimento f de A' em T' . Seja $x_i = f(y)$. Temos:

$$|N_L^+(x_i) \cap f(A')| = |N_{L'}^+(x_i) \cap f(A')| \leq |N_{L'}^+(x_i) \setminus f(A')| + 1 = |N_L^+(x_i) \setminus f(A')| - 1.$$

Em particular, temos que $|N_L^+(x_i) \cap f(A')| < |N_L^+(x_i) \setminus f(A')|$. Aplicando as propriedades de ordem mediana ao intervalo $[x_i, x_{2n-2}]$ de L , garante-se que pelo menos um vértice de $|N_L^+(x_i) \setminus f(A')|$ pertence a $N_L^+(x_i)$. Estendemos o mapeamento f , fazendo $f(x) = x_j$. Esta extensão é um L -embutimento de A em T (são adicionados dois vértices ao topo de L' , enquanto $f(A')$ é incrementada de apenas um vértice). \square

Segundo El-Sahili (2004c), um digrafo D é m -embutível se, para todo torneio T de ordem m e toda ordem mediana L de T , D possui um L -embutimento em T . Mostrar que um digrafo D é m -embutível é mais forte do que mostrar que ele é m -inevitável.

El-Sahili (2004c) faz uso da seguinte proposição, implícita em Havet e Thomassé (2000b), para demonstração de seus resultados:

Proposição 4.1.10. *Seja T um torneio de ordem $n \geq 3$, e $L = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ uma ordem mediana de T . Sejam T' e L' as restrições, respectivamente, de T e L para o intervalo $[v_1, v_2, \dots, v_{n-2}]$. Seja A um digrafo com um arco (x, y) onde y é uma folha. Suponha que $A' = A - y$ tem um L' -embutimento f' em T' . Então, A tem um L -embutimento f em T que estende f' .*

Demonstração. Seja f' um L' -embutimento de A' em T' . Suponha que $f'(x) = v_i$. Seja $I' = [v_{i+1}, v_{n-2}]$. Então temos $|f'(A') \cap I'| < \frac{1}{2}|I'| + 1$.

Façamos agora $I = [v_{i+1}, v_n]$. Pela definição de ordem mediana, temos:

$$|N_T^+(v_i) \cap I| \geq \frac{1}{2}|I| = \frac{1}{2}|I'| + 1. \text{ Portanto, } |N_T^+(v_i) \cap I| > |f'(A') \cap I'| = |f'(A') \cap I|.$$

Em outras palavras, v_i tem um vizinho de saída $v_j \in I \setminus f'(A')$. Definimos

$$f : V(A) \rightarrow V(T) \text{ por: } f(v) := \begin{cases} f'(v), & \text{se } v \in V(A') \\ v_j, & \text{se } v = y \end{cases} \quad \square$$

O Teorema 4.1.9 é uma consequência direta da Proposição 4.1.10.

Como definido na Subseção 2.2.4, seja A uma árvore orientada, $b(A)$ é o número de arcos de retorno e $c(A)$ o número de componentes de retorno de $B(A)$. Os principais resultados apresentados por El-Sahili (2004c) para árvores inevitáveis são os seguintes:

Teorema 4.1.11. *Toda árvore orientada bem enraizada A de ordem n é $(2n + 2d)$ -embutível, onde $d := b(A) - c(A)$.*

Demonstração. Procedemos por indução em $c(A)$. Se $c(A) = 0$, então A é uma arborescência e o resultado segue do Teorema 4.1.9. Seja A uma árvore orientada bem enraizada de ordem $n \geq 2$, com raiz r e $c(A) \geq 1$. Se A tem uma folha de saída y , então simplesmente removemos y e aplicamos a Proposição 4.1.10. Podemos então assumir que toda folha de A é de entrada.

Seja T um torneio de ordem $2n + 2d$ e $L = \langle v_1, v_2, \dots, v_{2n+2d} \rangle$ uma ordem mediana de T . Assuma que A tem um L -embutimento f em T . Seja B' uma componente de retorno de A que contém uma folha de A e raiz y . Observe que $y \neq r$, pois r é uma fonte. Seja x o vértice que domina y em A . Se B' tem m vértices, $A' = A - B'$ tem $n - m$ vértices, $b(A') = b(A) - (m - 1)$ e $c(A') = c(A) - 1$. Seja $T' = T[\{v_1, v_2, \dots, v_{2n+2d-4m+4}\}]$ e $L' = \langle v_1, v_2, \dots, v_{2n+2d-4m+4} \rangle$ uma ordem mediana de T' . Por indução, A' tem um L' -embutimento f' em T' .

Denote por A'' a árvore orientada obtida de A' adicionando-se $2m - 2$ vértices com cauda x , e por S o conjunto das $2m - 2$ novas folhas. Pela Proposição 4.1.10, A'' possui um L -embutimento f'' em T como extensão de f' . O subtorneio de T induzido por $f''(S)$ possui $2m - 2$ vértices e, portanto, contém uma cópia B'' de B' , pelo Teorema 4.1.9. Seja $g : V(B') \rightarrow V(B'')$ um isomorfismo de B' para B'' . Temos um L -embutimento f de A em T definido por: $f(v) := \begin{cases} f'(v), & \text{se } v \in V(A') \\ g(v), & \text{se } v \in V(B') \end{cases} \quad \square$

Teorema 4.1.12. *Toda árvore orientada bem enraizada A de ordem $n \geq 2$, cujas componentes de retorno são todas caminhos, é $(2n - 2)$ -embutível.*

A prova do Teorema 4.1.12 é essencialmente a mesma do Teorema 4.1.11. A única diferença é que é preciso adicionar apenas m arcos com cauda x a A' , em vez de $2m - 2$, pois, pelo Teorema 4.1.2, todo torneio contém um caminho hamiltoniano

direcionado. Com este resultado, El-Sahili (2004c) mostrou que a Conjectura 4.1.7 vale para mais um tipo especial de árvores orientadas. O resultado a seguir, para árvores orientadas em geral, é uma consequência direta do Teorema 4.1.11.

Corolário 4.1.13. *Toda árvore orientada A de ordem $n \geq 2$ é $(3n - 3)$ -embutível.*

Demonstração. Seja A uma árvore orientada de ordem $n \geq 2$. Pode-se assumir que A tem pelo menos tantos arcos para frente quanto para trás com relação a alguma raiz. Caso contrário, considera-se o oposto de A . Se A for uma arborescência, pelo Teorema 4.1.9 ela é $(2n - 2)$ -embutível. Supõe-se então que A não é uma arborescência. Pode-se enraizar A de forma a minimizar $d(A)$. A raiz r de A é necessariamente uma fonte, pois se algum vértice v dominasse r , escolhendo-se v para raiz reduziria o valor de $d(A)$. Assim, A é bem enraizada. Uma vez que $b(A) \leq (n - 1)/2$ e $c(A) \geq 1$, $d(A) \leq (n - 3)/2$. Pelo Teorema 4.1.11, obtém-se o resultado. \square

4.2 Embutimento pelo Número de Arcos

O foco agora é encontrar o menor valor de uma função $g(n)$ de modo que todo dígrafo D com pelo menos $g(n) \cdot |V(D)|$ arcos contém uma cópia de toda árvore orientada de ordem n . Em um de seus trabalhos sobre árvores antidirecionadas, Burr (1982) mostrou o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1. *Seja A uma árvore antidirecionada de ordem n . Se D é um dígrafo com pelo menos $(4n - 4) \cdot |V(D)|$ arcos, então D contém uma cópia de A .*

A prova deste teorema é baseada nos Lemas 4.2.2 e 4.2.3 a seguir, segundo Burr (1982), atribuídos a Erdős, adaptados para dígrafos.

Lema 4.2.2. *Todo dígrafo tem um subdígrafo bipartido com pelo menos metade dos arcos.*

Demonstração. Por indução no número p de vértices. Para $p \leq 2$ o resultado é trivial. Suponha que o resultado é válido para $p - 1$, e sejam D um dígrafo com p vértices e $v \in V(D)$. Pela hipótese de indução, $D - v$ contém um subdígrafo bipartido $B[X_1, X_2]$ com pelo menos metade de seus arcos. Sejam A_1 e A_2 os conjuntos de arcos que têm uma extremidade v e a outra em X_1 e X_2 respectivamente. Um dos conjuntos (A_1 ou A_2) tem pelo menos metade dos arcos que incidem em v . Adicionando este conjunto e o vértice v a B , obtém-se um dígrafo bipartido com pelo menos metade dos arcos de D . \square

Lema 4.2.3. *Se D for um dígrafo com p vértices e q arestas, então existe um subdígrafo D' de D cujo grau mínimo é pelo menos q/p .*

Demonstração. Sucessivamente, remove-se de D um vértice com grau menor que q/p até que não haja mais um vértice que satisfaça essa condição. Isto, claramente, não esgota todos arcos do dígrafo, restando assim um subdígrafo D' satisfazendo ao Lema. \square

Demonstração do Teorema 4.2.1. Primeiro, usando o Lema 4.2.2, podemos encontrar um subdigrafo bipartido gerador D_1 de D com pelo menos $(2n - 2) \cdot |V(D)|$ arcos. Sejam X e X' as partes de D_1 . Claramente, algum conjunto de pelo menos $(n - 1) \cdot |V(D)|$ arcos é direcionado de X para X' ou no sentido contrário. Portanto, não existe caminho direcionado de tamanho 2. Pelo Lema 4.2.3, há um digrafo $D_2 \subseteq D_1$ com grau mínimo pelo menos $(n - 1)$, e claro, sem caminhos direcionados de tamanho 2. Claramente, D_2 contém uma cópia de A . \square

Burr (1982) ainda complementa que o valor $(4n - 4) \cdot |V(D)|$ pode ser melhorado. Ele mostra que o melhor limite inferior encontrado para $g(n)$ é $(n - 2) \cdot |V(D)|$. Para ver este resultado, seja $A = S_n^+$, e $G = K_{2n-4, 2n-4}$ com metade dos arcos em cada direção. Tem-se que $|V(D)| = 4n - 8$ e $|A(D)| = (2n - 4)^2 = (n - 2) \cdot |V(D)|$ arcos, e portanto D não possui cópia de A .

Erdős (1965) conjecturou o seguinte:

Conjectura 4.2.4. *Seja G um grafo. Se $|E(G)| > \frac{1}{2}(n - 2) \cdot |V(G)|$, então G contém toda árvore de ordem n .*

A Conjectura 4.2.4 foi provada para grafos que não contêm ciclos de tamanho 4, por Saclé e Woźniak (1997), e para árvores de diâmetro no máximo 4, por McLennan (2005). Addario-Berry et al. (2013) fizeram a seguinte conjectura:

Conjectura 4.2.5. *Seja D um digrafo. Se $|A(D)| > (n - 2) \cdot |V(D)|$, então D contém toda árvore antidirecionada de ordem n .*

Conforme mostrado por Burr (1982), o valor $(n - 2)$ como limite inferior para $g(n)$ é o melhor possível. Considere também o digrafo $D(K_{n-1})$ que tem $(n - 1)$ vértices e $(n - 2)(n - 1)$ arcos, mas não contém nenhuma árvore orientada de ordem n . Para grafos orientados, a Conjectura 4.2.5 implica a Conjectura 4.3.10. De fato, todo digrafo $(2n - 2)$ -crítico D é um grafo orientado e tem grau mínimo pelo menos $2n - 3$. Consequentemente, tem $\frac{(2n-3)}{2} \cdot |V(D)| > (n - 2) \cdot |V(D)|$ arcos.

Para digrafos simétricos D , as Conjecturas 4.2.4 e 4.2.5 são equivalentes. Considere um grafo G e o digrafo associado $D(G)$. Note que $|E(G)| > \frac{1}{2}(n - 2) \cdot |V(G)|$ se, e somente se, $|A(D(G))| > (n - 2) \cdot |V(D(G))|$. Além disso, se A é uma árvore de ordem n e A' é uma de suas duas orientações antidirecionadas, então pode-se verificar que G contém uma cópia de A se, e somente se, $D(G)$ contém uma cópia de A' .

Não há conjectura análoga à Conjectura 4.2.5 para árvores que não são antidirecionadas. Observe, por exemplo, que uma bipartição (X, Y) de modo que todos os arcos tenham cauda em X e cabeça em Y não possui caminhos de tamanho 2. Seja $2C$ o tamanho de cada partição. O número de arcos é no máximo $4C^2 = C \cdot |V(D)|$. Daí, para uma árvore orientada A que não seja antidirecionada e qualquer constante C , há um digrafo D com pelo menos $C \cdot |V(D)|$ arcos que não contém uma cópia de A .

Seja A uma árvore antidirecionada. Considere a definição de $m(A)$ (Seção 4.3.2). Addario-Berry et al. (2013) mostraram o seguinte resultado:

Teorema 4.2.6. *Se A é uma árvore antidirecionada e D é um digrafo com pelo menos $(4m(A) - 4)|V(D)|$ arcos, então D contém uma cópia de A .*

4.3 Embutimento pelo Número Cromático

Um grafo orientado D é x -universal se há um embutimento dele em qualquer digrafo x -cromático. O foco principal dos estudos é determinar o menor valor de $h(n)$ de modo que todo digrafo $h(n)$ -cromático contém uma cópia de qualquer árvore orientada de ordem n .

O número cromático de um digrafo independe da orientação dos seus arcos. Portanto, a Proposição 4.1.1 pode ser estendida para digrafos universais.

Proposição 4.3.1. *Seja D um digrafo orientado. Se D é l -universal, então o reverso de D é também l -universal.*

Como um torneio de ordem n é um caso particular de digrafo n -cromático, digrafos $h(n)$ -universais são também $h(n)$ -inevitáveis. A relação entre embutimento pelo número de arcos e pelo número cromático se dá segundo a seguinte proposição:

Proposição 4.3.2. *Se toda árvore A de ordem n pode ser embutida em todo digrafo D com pelo menos $g(n) \cdot |V(D)|$ arcos, então A é $(2g(n) + 1)$ -universal.*

Demonstração. Seja D um digrafo $(2g(n) + 1)$ -cromático. D possui um subdigrafo D' $(2g(n) + 1)$ -crítico. Pela Proposição 2.3.1, todos os vértices de D' possuem grau pelo menos $2g(n)$. Sabendo-se que a soma dos graus dos vértices de um digrafo é igual ao dobro do número de arcos deste, D' possui pelo menos $g(n) \cdot |V(D')|$ arcos e, portanto, D' (e também D) possui uma cópia de A . \square

Erdős (1959) mostrou que há grafos de número cromático n com cintura arbitrariamente grande. Por esta razão, apenas árvores orientadas podem ser universais.

4.3.1 Caminhos universais

Ao contrário do embutimento de caminhos em torneios, são poucos os resultados sobre a universalidade de caminhos orientados de uma forma geral. Um dos primeiros resultados apresentados sobre caminhos universais é mostrado pelo teorema a seguir, de Gallai (1968), Roy (1967), Hasse (1964), Vitaver (1962).

Teorema 4.3.3. *Todo digrafo D contém um caminho direcionado com $\chi(D)$ vértices.*

Demonstração. Seja k o número de vértices no caminho direcionado mais longo de D , com $k < \chi(D)$. Colore-se D com k cores, atribuindo-se ao vértice v a cor $c(v)$ correspondente ao número de vértices do caminho direcionado mais longo começando em v . Será mostrado que esta coloração é própria, servindo como argumento para demonstrar o teorema por contradição.

Considere um subdígrafo D' de D maximal acíclico. Pelo fato de D' ser um subdígrafo de D , todo caminho direcionado em D' tem no máximo k vértices. Considere qualquer arco (x, y) de D . Se (x, y) é um arco de D' , seja yPw o caminho direcionado mais longo, começando em y , em D' . Então, $x \notin V(P)$; caso contrário, $yPxy$ seria um ciclo direcionado em D' . Assim, $xyPw$ é um caminho direcionado em D' e $c(x) > c(y)$.

Se (x, y) não é um arco de D' , então $D' + (x, y)$ contém um ciclo direcionado; pois D' é acíclico maximal. Então D' contém um caminho direcionado P de y para x . Seja Q o maior caminho direcionado começando em x em D' . $V(P) \cap V(Q) = \{x\}$. Então PQ é um caminho direcionado iniciando por y em D' , implicando que $c(y) > c(x)$. Em ambos os casos, $c(x) \neq c(y)$. \square

A noção de floresta de saída geradora final, vista na Seção 3.2, é muito útil no contexto de dígrafos universais. Por exemplo, é possível obter uma outra prova do Teorema 4.3.3. Considere a floresta de saída geradora final F de um dígrafo n -cromático D . Pela Proposição 3.2.1, cada nível em F é um conjunto estável em D . Logo, F possui pelo menos n níveis. Daí D contém um caminho direcionado de ordem pelo menos n .

Como exemplo de aplicação deste resultado, tome um grafo bipartido $G[X, Y]$. Considere D uma orientação de G onde $(u, v) \in A(D)$ se, e somente se, $u \in X$ e $v \in Y$. Pelo Teorema 4.3.3, $\chi(G) = \chi(D) \leq 2$.

Sobre caminhos com dois blocos, consideremos aqueles em que o primeiro arco é de avanço, denotados por $P^+(k, l)$. Pela Proposição 4.3.1, os resultados também valem para os caminhos $P^-(k, l)$. El-Sahili (2004b) mostrou que:

Teorema 4.3.4. *Seja n um inteiro maior que três. Então, qualquer dígrafo n -cromático contém um $P^+(n - 2, 1)$.*

Demonstração. Seja D um dígrafo n -cromático. Sem perda de generalidade, suponha que D é n -crítico. Como este resultado já está provado para torneios, suponha então que D não é um torneio. Provaremos que D contém um $P^+(n - 2, 1)$.

Seja $Q = v_1v_2 \dots v_t$ o maior caminho direcionado em D . Pelo Teorema 4.3.3, temos $t \geq n$. Se w é um vizinho de v_t fora de Q , então w domina v_t (caso contrário, Qw é um caminho direcionado maior que Q em D). Assim, D contém um $P^+(n - 2, 1)$.

Agora, suponha que $N_D(v_t) \subseteq V(Q)$. Seja v_s o vizinho de v_t de menor índice. Uma vez que D é n -crítico, $d_D(v_t) \geq n - 1$ e, então, $t - s \geq n - 1$. Se v_s domina v_t então o caminho $v_{t-n+2} \dots v_tv_s$ é um $P^+(n - 2, 1)$. Caso contrário, se $s > 1$ então temos

um $P^+(n-2, 1)$ contido no caminho $v_{s+1} \dots v_t v_s v_{s-1}$. Se $s = 1$, então temos um ciclo direcionado $C = v_1 v_2 \dots v_t v_1$. Consideremos dois casos:

1. $V(D) \neq \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$. Seja $w \in N_D(v_i) \setminus V(Q)$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Então, D contém um caminho direcionado de tamanho t , uma contradição;
2. $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$. Como D não é um torneio, temos $t \geq n+1$. Seja $v_i v_j$ uma corda em $G(C)$ interceptando um caminho de tamanho mínimo de C . Vamos supor que $i = 1$ e, portanto, $v_1 \dots v_j$ é o caminho direcionado minimal que é interceptado por $v_i v_j$ em $G(C)$. Afirmamos que $t - j + 2 \geq n$. Isto é trivial se $j = 3$. Se $j > 3$, temos $N_D(v_2) \setminus \{v_1, v_3\} \subseteq \{v_{j+1}, \dots, v_{t-j+3}\}$. Uma vez que D é n -crítico, $d_D(v_2) \geq n-1$. Assim: $t - j + 2 \geq d_D(v_2) + 1 \geq n$.

Se $(v_1, v_j) \in A(D)$, então $v_{j+1} \dots v_t v_1 v_j v_{j-1}$ contém um $P^+(n-2, 1)$. Caso contrário, $(v_j, v_1) \in A(D)$ e, portanto, $v_{j+1} \dots v_t v_1 v_j$ contém um $P^+(n-2, 1)$.

□

Corolário 4.3.5. *Todo dígrafo 4-cromático contém um $P^+(k, l)$ de ordem 4.*

O Corolário 4.3.5 é uma consequência direta do Teorema 4.3.4, levando-se em conta que um caminho de dois blocos com 4 vértices é um $P^+(1, 2) \cong P^+(2, 1)$.

Em outro trabalho sobre caminhos com dois blocos, El-Sahili e Kouider (2007) apresentaram os seguintes resultados:

Teorema 4.3.6. *Seja D um dígrafo. Então D contém um $P^+(k, l-1)$ ou um $P^+(k-1, l)$ com $k+l = \chi(D)$. Em particular, D contém um $P^+(k-1, l-1)$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.1, D contém uma árvore de saída geradora final F , com p níveis, em que os conjuntos de vértices de cada nível são conjuntos estáveis de D . Seja S_i o conjunto de vértices de F no nível i , $1 \leq i \leq p$. Note que $p \geq \chi(D) = k+l$. Para $0 \leq j \leq l-1$, faça $X_j = \bigcup_{r \geq 0} S_{k+l+r}$. Então, $(S_1, S_2, \dots, S_{k-1}, X_0, \dots, X_{l-1})$ é uma partição de $V(D)$ em $k+l-1$ conjuntos. Como $\chi(D) = k+l$, algum conjunto X_j não é estável. Portanto $D[X_j]$ contém vértices x e y adjacentes. Assim, $x \in S_{k+j+sl}$ e $y \in S_{k+j+tl}$, onde $s \neq t$, pois os conjuntos S_i são estáveis. Sem perda de generalidade, assumamos que $s < t$. Denote por T_x e T_y as arborescências de saída de F que contêm, respectivamente, x e y . É possível que x e y estejam na mesma árvore ($T_x = T_y$). Seja P o caminho direcionado em T_x , da sua raiz até x , e seja Q o caminho direcionado em T_y até y , do seu ancestral em $S_{k+j+sl+1}$. Então, P tem tamanho $k+j+sl-1 \geq k-1$, e Q tem tamanho $(t-s)l-1 \geq l-1$. Portanto, D tem um $P^+(k, l-1)$, se x domina y , ou um $P^+(k-1, l)$, se y domina x . □

Uma consequência trivial deste resultado é que $h(n) \leq n+1$. Segue daí a prova do Corolário 4.3.7.

Corolário 4.3.7. *Todo digrafo $(k + l + 2)$ -cromático contém um $P^+(k, l)$.*

El-Sahili e Kouider (2007) ainda conjecturaram o seguinte:

Conjectura 4.3.8. *Para caminhos $P^+(k, l)$, onde $k + l = n - 1$, $h(n) = n$.*

Addario-Berry, Havet e Thomassé (2007), utilizando as noções de floresta de saída geradora final e circuito bom, provaram a Conjectura 4.3.8, para $n \geq 4$:

Teorema 4.3.9. *Se $k + l = n - 1 \geq 3$ e D é um digrafo n -cromático, então D contém um $P^+(k, l)$.*

4.3.2 Árvores universais

Burr (1980), considerando a função h de modo que toda árvore orientada de ordem n é $h(n)$ -universal, provou que $h(n) \leq (n - 1)^2$ e conjecturou o seguinte:

Conjectura 4.3.10 (Conjectura de Burr). *Toda árvore orientada de ordem n é $(2n - 2)$ -universal.*

Addario-Berry et al. (2013) apresentaram um refinamento para o limite superior apresentado por Burr, considerando subdigrafos bikernel-perfeitos.

Teorema 4.3.11. *Toda árvore orientada de ordem n está contida em todo digrafo bikernel perfeito n -cromático.*

Demonstração. Assuma que o teorema é falso e considere A um contraexemplo de ordem mínima. Seja k a ordem de A , trivialmente $k \geq 2$. Sejam D um digrafo k -cromático bikernel-perfeito, v uma folha de A e w o único vizinho de v em A . Por simetria, assuma que v domina w . Uma vez que D é bikernel-perfeito, ele tem um kernel S . O digrafo $D - S$ tem número cromático pelo menos $k - 1$ e, por indução, ele contém uma cópia A' de $A - v$. Pela definição de um kernel, o vértice w' em A' , correspondente a w , é dominado por um vértice v' de S . Portanto, D contém A . Uma vez que isto é válido para todo D , A não é um contraexemplo para o teorema, uma contradição. \square

Algumas classes de digrafos bikernel-perfeitos são conhecidas. Uma dessas é a classe dos digrafos simétricos. Richardson (1946 apud ADDARIO-BERRY et al., 2013) provou que digrafos acíclicos e digrafos sem ciclo ímpar direcionado são bikernel-perfeitos. Addario-Berry et al. (2013) obtiveram melhores limites superiores para $h(n)$, provando que todo digrafo com número cromático suficientemente grande possui um subdigrafo acíclico (e portanto bikernel-perfeito) n -cromático. Surgem então os seguintes problemas:

- Qual o menor inteiro $h'(n)$ tal que todo digrafo $h'(n)$ -cromático tem um subdigrafo acíclico n -cromático?

- Qual o menor inteiro $h''(n)$ tal que todo digrafo $h''(n)$ -cromático tem um subdigrafo bikernel-perfeito n -cromático?

O Teorema 4.3.11 implica que $h(n) \leq h''(n)$ e, trivialmente, $h''(n) \leq h'(n)$.

Proposição 4.3.12. $h'(n) \leq n^2 - 2n + 2$

Demonstração. Seja D um digrafo $(n^2 - 2n + 2)$ -cromático. Seja $\langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle$ uma ordenação dos vértices de D . Sejam D_1 e D_2 digrafos tais que $V(D_1) = V(D_2) = V(D)$, $E(D_1) = \{(v_i, v_j) | i < j\}$ e $E(D_2) = \{(v_i, v_j) | i > j\}$. Claramente, D_1 e D_2 são acíclicos e $\chi(D_1) \times \chi(D_2) \geq \chi(D)$. Daí D_1 ou D_2 tem número cromático pelo menos $\lceil \sqrt{(n^2 - 2n + 2)} \rceil = n$. \square

A Proposição 4.3.12 implica diretamente $h(n) \leq n^2 - 2n + 2$. Addario-Berry et al. (2013) deram então um melhor limite superior para $h(n)$.

Teorema 4.3.13. $h(n) \leq n^2/2 - n/2 + 1$

Demonstração. Vamos provar que $h(n) \leq h(n-1) + n - 1$. $h(1) = 1$. Sejam D um digrafo $(h(n-1) + n - 1)$ -cromático e A uma árvore orientada de ordem n . Seja D' um subdigrafo maximal acíclico de D . Se $\chi(D') \geq n$, pelo Teorema 4.3.11, D' contém uma cópia de A . Se $\chi(D') \leq n - 1$, então $\chi(D - D') \geq h(n - 1)$. Seja v uma folha de A . O digrafo $D - D'$ contém uma cópia de $A - v$. Pela maximalidade de D' , para todo $x \in V(D - D')$, há vértices y e z de D' de modo que há arcos (x, y) e (x, z) . Estendemos $A - v$ para A adicionando um vértice a D' . \square

A seguir, outros resultados também apresentados por Addario-Berry et al. (2013) que tratam da universalidade das árvores antidirecionadas. Seja A uma árvore antidirecionada. Considere $V^+(A)$ (resp. $V^-(A)$) o conjunto de vértices com grau de entrada (resp. saída) igual a 0, e $m(A) := \max\{|V^+(A)|, |V^-(A)|\}$.

Teorema 4.3.14. *Se A é uma árvore antidirecionada de ordem n , que não seja uma estrela, então A é $(10n - 8m(A) - 11)$ -universal.*

Como consequência direta do Teorema 4.2.6 e da Proposição 4.3.2, temos:

Corolário 4.3.15. *Toda árvore antidirecionada A é $(8m(A) - 7)$ -universal.*

No Teorema 4.3.14, o valor de $h(n)$ decresce à medida que $m(A)$ aumenta. Já no Corolário 4.3.15, o valor de $h(n)$ cresce com o valor de $m(A)$. As funções se igualam quando $m(A) = \frac{5n-2}{8}$. Portanto:

Corolário 4.3.16. *Toda árvore antidirecionada A de ordem $n \geq 3$ é $(5n - 9)$ -universal.*

Addario-Berry et al. (2013) ainda mostraram que:

Proposição 4.3.17. *Todo grafo orientado com grau mínimo pelo menos $2n - 5$ contém toda árvore antidirecionada de ordem n com diâmetro 3.*

Corolário 4.3.18. *Toda árvore antidirecionada de ordem n e diâmetro 3 é $(2n - 4)$ -universal.*

Demonstração. Se D é um dígrafo $(2n - 4)$ -cromático, então D contém um dígrafo D' $(2n - 4)$ -crítico, cujos vértices têm grau pelo menos $2n - 5$. Assim, pela Proposição 4.3.17, D' (e também D) contém toda árvore antidirecionada de ordem n com diâmetro 3. \square

5 CASOS ESPECIAIS DA CONJECTURA DE BURR

Seja A uma árvore orientada de ordem n . Definimos $univ(A) = \min\{k \mid \text{todo digrafo } k\text{-cromático contém uma cópia de } A\}$. Uma vez que um torneio de ordem n é n -cromático, $univ(A)$ deve ser pelo menos n .

Como visto na Subseção 4.3.2, a Conjectura de Burr (Conjectura 4.3.10) diz que toda árvore de ordem $n \geq 2$ é $(2n - 2)$ -universal. Neste capítulo, são apresentados os nossos resultados que mostram a validade desta para estrelas orientadas de ordem maior que 2, e para árvores orientadas em geral de ordem no máximo 5.

Árvores orientadas de ordem 2 ou 3 são caminhos orientados com no máximo dois blocos. Para caminhos direcionados (caminho orientado com apenas um bloco) ou orientados com dois blocos, os resultados seguem, respectivamente, dos Teoremas 4.3.3 e 4.3.9. Mostramos a validade da Conjectura para árvores de ordem 4 e 5.

5.1 Universalidade de Estrelas

Como visto na Subseção 2.2.4, denota-se por $S_{i,j}$ uma orientação de uma estrela de ordem n com exatamente i folhas de entrada e j folhas de saída, onde $i + j = n - 1$. Portanto, $S_n^+ = S_{0,n-1}$ e $S_n^- = S_{n-1,0}$.

Segundo Addario-Berry et al. (2013), a Proposição 5.1.1 a seguir é um resultado bem conhecido que trata da universalidade de estrelas de ordem n cujas folhas são ou de entrada (S_n^-) ou de saída (S_n^+). Pela Proposição 4.3.1, é suficiente enunciar o resultado para um dos casos.

Proposição 5.1.1. $univ(S_n^+) = 2n - 2$, para $n \geq 2$.

Demonstração. Uma vez que o torneio R_{2n-3} não possui vértice com grau de saída $n - 1$ e, conseqüentemente, não possui cópia de S_n^+ , temos que $univ(S_n^+) \geq 2n - 2$. Para $n = 2$, o resultado é trivial. Se $n = 3$ então $S_n^+ = P^-(1, 1)$ está contida em um caminho orientado com dois blocos de ordem 4. O resultado segue do Teorema 4.3.9.

Vamos assumir que $n > 3$. Seja D um digrafo $(2n - 2)$ -crítico. Suponha, por contradição, que D não possui vértice com grau de saída pelo menos $n - 1$. Assim, $Mad(D) \leq 2n - 4$ e então, pelo Lema 2.3.4, $\chi(D) \leq 2n - 3$, uma contradição. \square

Na Figura 18 temos uma ilustração representando dois torneios regulares - o primeiro é um R_{2i-1} (todo vértice tem graus de entrada e de saída iguais a $i - 1$) e o segundo é um R_{2j-1} (todo vértice tem graus de entrada e de saída iguais a $j - 1$) - com arcos de cada vértice do primeiro para cada vértice do segundo. Seguindo essa ilustração, forma-se um torneio de ordem $2i + 2j - 2$. Este não possui um vértice com grau de entrada pelo menos i e grau de saída pelo menos j , portanto não possui uma cópia de $S_{i,j}$.

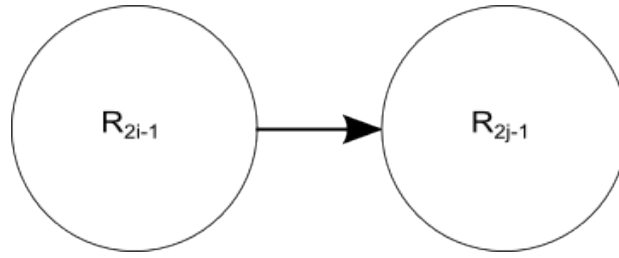


Figura 18 – Ilustração de um torneio de ordem $2i + 2j - 2$ que não contém $S_{i,j}$

O resultado a seguir trata da universalidade de estrelas orientadas que possuem pelo menos uma folha de entrada e uma folha de saída.

Proposição 5.1.2. $univ(S_{i,j}) = 2i + 2j - 1$, para $i \geq 1$ e $j \geq 1$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $1 \leq i \leq j$. Caso contrário, pela Proposição 4.3.1, pegamos o reverso de $S_{i,j}$. Uma vez que existe um torneio de ordem $2i + 2j - 2$ que não contém $S_{i,j}$ (Figura 18), temos que $univ(S_{i,j}) \geq 2i + 2j - 1$. Seja D um digrafo $(2i + 2j - 1)$ -crítico. Pela Proposição 2.3.1, $\delta(D) \geq 2i + 2j - 2$. Sejam $S = \{v \in V(D) \mid d_D^-(v) \geq i\}$ e $H = D - S$.

Afirmamos que $\chi(H) < 2i$. Caso contrário, pelas Proposições 4.3.1 e 5.1.1, H teria um vértice com grau de entrada pelo menos i . Assim, $\chi(D[S]) \geq 2j$. Pela Proposição 5.1.1, $D[S]$ (e conseqüentemente D) contém um vértice com grau de saída pelo menos j e, portanto, contém uma cópia de $S_{i,j}$. \square

Teorema 5.1.3. Se S é uma estrela orientada de ordem $n \geq 2$, então $univ(S) \leq 2n - 2$.

Demonstração. Se $S = S_{i,j}$, com $i \geq 1$ e $j \geq 1$, pela Proposição 5.1.2, $univ(S) = 2n - 3$. Caso contrário, todas as folhas de S são ou de entrada ou de saída. Pela Proposição 5.1.1, $univ(S) = 2n - 2$. \square

Com esse resultado, fica provada a validade da Conjectura de Burr para estrelas orientadas de ordem $n \geq 2$ em geral.

5.2 Universalidade das Árvores Orientadas de Ordem 4

Uma árvore orientada de ordem 4 pode ser uma orientação de um caminho ou de uma estrela. Temos, portanto, os seguintes resultados:

Proposição 5.2.1. Se P é um caminho orientado de ordem 4, então $univ(P) = 4$.

Demonstração. P deve ser ou um caminho direcionado, ou um caminho orientado com dois blocos, ou um caminho antidirecionado. Portanto, temos $univ(P) = 4$, de acordo com os Teoremas 4.3.3 e 4.3.9 e com o Corolário 4.3.18, respectivamente. \square

Teorema 5.2.2. Se A é uma árvore orientada de ordem 4, então $univ(A) \leq 6$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $|Out(A)| \geq |In(A)|$ (caso contrário, consideramos o reverso de A). Seja k o número de folhas de A . Se $k = 2$, então A é um caminho orientado e, pela Proposição 5.2.1, $univ(A) = 4$. Se $k = 3$, então A é uma orientação de uma estrela. Se $A = S_{1,2}$ então, pela Proposição 5.1.2, $univ(A) = 5$. Se $A = S_{0,3} = S_4^+$ então, pela Proposição 5.1.1, $univ(A) = 6$. \square

Com esses resultados, fica provada a Conjectura de Burr para árvores orientadas de ordem 4.

5.3 Universalidade das Árvores Orientadas de Ordem 5

Consideremos, de início, os caminhos antidirecionados de ordem 3 (caminhos destacados nas Figuras 19c a 19f) ou 4 (caminho destacado na Figura 19b) que podem ser encontrados em um R_5 (Figura 19a).

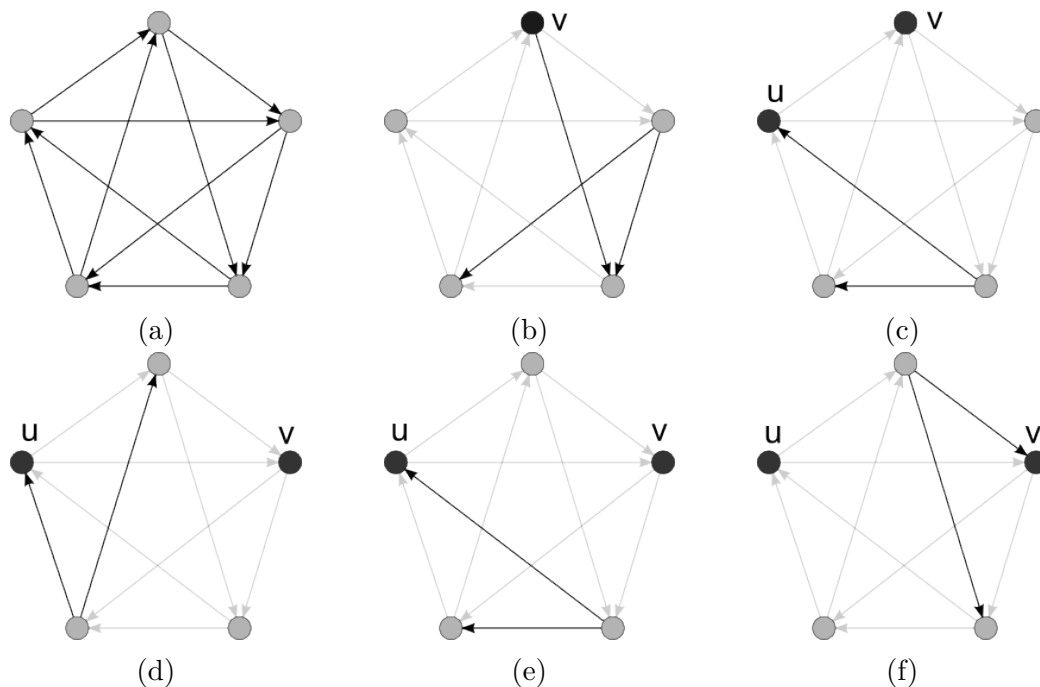


Figura 19 – Caminhos antidirecionados em R_5

Considerando caminhos antidirecionados de ordem 5, El-Sahili (2004a) mostrou que:

Teorema 5.3.1. *Seja D um digrafo conexo 5-cromático diferente de R_5 e com grau mínimo de saída pelo menos dois. Se D contém R_5 , então D contém uma cópia de A_5^- .*

Observamos que, se o digrafo D contém R_5 , é suficiente mostrar que se ele possuir pelo menos um vértice fora da cópia de R_5 , mas conectado a esta, e com grau de saída pelo menos dois, então D contém uma cópia de A_5^- . Portanto, temos o seguinte refinamento para o Teorema 5.3.1:

Teorema 5.3.2. *Se um digrafo D contém uma cópia R de R_5 , e existe $x \in V(D) \setminus V(R)$ tal que $D[V(R) \cup \{x\}]$ é conexo e $d_D^+(x) \geq 2$, então D contém uma cópia de A_5^- .*

Demonstração. Observe que:

1. Para todo vértice v em $V(R)$, é possível encontrar um A_4^- e, conseqüentemente, um A_3^- em R que termina em v (Figura 19b).
2. Para quaisquer dois vértices distintos u e v em $V(R)$, é possível encontrar um A_3^- em R que termina em um dos vértices e não intercepta o outro (Figuras 19c a 19f).

Por conta da simetria dos vértices de R_5 , é suficiente mostrarmos os caminhos destacados na Figura 19.

Uma vez que $D[V(R) \cup \{x\}]$ é conexo, existe $y \in V(R)$ tal que (x, y) ou (y, x) é um arco de D . Se $(y, x) \in A(D)$, então, por (1), há uma cópia P de A_4^- em R que termina em y . Seja $P = P'y$, então $P'yx$ é uma cópia de A_5^- em D .

Suponha que $(x, y) \in A(D)$. Uma vez que $d_D^+(x) \geq 2$, há pelo menos um vizinho de saída z de x diferente de y . Temos de considerar dois casos, a saber: z pertence ou não a $V(R)$. Se $z \notin V(R)$ então, por (2), existe uma cópia P_1 de A_3^- em R terminando em y e, conseqüentemente, P_1xz é uma cópia de A_5^- em D . Se $z \in V(R)$ então, por (2), para os vértices y e z , há uma cópia P_2 de A_3^- em R terminando em um e não contendo o outro. Portanto, ou P_2xz ou P_2xy é uma cópia de A_5^- em D . \square

Proposição 5.3.3. *Sejam D um digrafo e $P = v_1v_2v_3v_4$ uma cópia de $P^+(1, 2)$ em D de modo que $d_D^+(v_i) \geq 3$, para $1 \leq i \leq 4$, e $d_D^-(v_2) = 3$. Se $N^+(v_4) \setminus V(P) \neq \emptyset$ ou v_1 e v_3 são adjacentes, então D contém uma cópia de $P^+(1, 2, 1)$.*

Demonstração. Se existe $x \in N_D^+(v_4) \setminus V(P)$, então Px é uma cópia de $P^+(1, 2, 1)$ em D . Agora, suponha que $N_D^+(v_4) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se v_1 e v_3 são adjacentes, por simetria, pode-se dizer que $(v_1, v_3) \in A(D)$. Uma vez que $d_D^+(v_1) \geq 3$, existe $y \in N_D^+(v_1) \setminus V(P)$. Então, $v_4v_2v_3v_1y$ é uma cópia de $P^+(1, 2, 1)$ em D . \square

Proposição 5.3.4. *Se P é um caminho orientado de ordem 5 com 3 blocos, sendo o segundo bloco de tamanho 2, então $\text{univ}(P) \leq 7$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que P é um $P^+(1, 2, 1)$. Consideremos um contraexemplo mínimo D de um digrafo 7-crítico. Presuma, por contradição, que D não contém uma cópia de P . Seja $S = \{v \in V(D) \mid d_D^-(v) \geq 4\}$ e $H = D - S$. Como D é 7-crítico, pela Proposição 2.3.1, $\delta(D) \geq 6$. Assim, todo vértice em H tem grau de saída pelo menos 3. Primeiro afirmamos que $\chi(H) \geq 4$. Suponha que não. Então, $\chi(D[S]) \geq 4$ e, pela Proposição 5.2.1, ele contém uma cópia P' de $P^-(2, 1)$. Seja v o primeiro vértice de P' . Uma vez que $d_D^-(v) \geq 4$, há pelo menos um vizinho de entrada u de v que não está em $V(P')$. Conseqüentemente, uP' é uma cópia de P , uma contradição.

Pela Proposição 5.2.1, H contém uma cópia P' de $P^+(1, 2)$. Seja $P' = abcd$. Temos que $N_D^+(d) = \{a, b, c\}$ e que a e c não são adjacentes, caso contrário, pela Proposição 5.3.3, D contém uma cópia de P . Em particular, uma vez que $b \in V(H)$ e todo vértice em $V(H)$ tem grau de saída no máximo 3, $N_D^-(b) = \{a, c, d\}$.

Sejam $D' = D/\{a, c\}$ e z o vértice correspondente à identificação de a e c . Pela Proposição 2.3.2, temos $\chi(D') \geq \chi(D) = 7$. Pela minimalidade de D , D' contém uma cópia P' de P . Mostramos que D também contém uma cópia de P . Seja $P' = v_1v_2v_3v_4v_5$. Assim, $z \in \{v_2, v_3, v_4\}$, pois, caso contrário, P' também estaria em D . Identificamos três casos distintos, de acordo com a posição de z em P' , a saber:

1. Se $z = v_2$ então, sem perda de generalidade, D contém os caminhos $P_1 = v_1a$ e $P_2 = cv_3v_4v_5$. Temos que $d \neq v_4$, pois $N_D^+(d) = \{a, b, c\}$ e $a \notin \{v_3, v_5\}$. Além disso, $b \notin \{v_3, v_5\}$, pois $N_D^-(b) = \{a, c, d\}$ e $v_4 \notin \{a, c\}$. Se $d \notin \{v_3, v_5\}$, então $dcv_3v_4v_5$ é uma cópia de P em D . Se $d \in \{v_3, v_5\}$, então $b \neq v_4$. Assim, seja w o vértice de $\{v_3, v_5\} \setminus \{d\}$, $cbdv_4w$ é uma cópia de P em D . Em ambos os casos, temos uma contradição.
2. Se $z = v_3$ então, sem perda de generalidade, D contém os caminhos $P_1 = v_1v_2a$ e $P_2 = cv_4v_5$. Se $d = v_1$, então $b = v_2$, pois $N_D^-(b) = \{a, c, d\}$ e $v_1 \notin \{a, c\}$. Assim, $dbcv_4v_5$ é uma cópia de P em D . Se $d \neq v_1$, então v_1v_2adc é uma cópia de P em D . Em ambos os casos, temos uma contradição.
3. Se $z = v_4$ então, sem perda de generalidade, D contém os caminhos $P_1 = v_1v_2v_3a$ e $P_2 = cv_5$. Temos que $b \neq v_2$, pois $N_D^-(b) = \{a, c, d\}$ e $\{a, c\} \cap \{v_1, v_3\} = \emptyset$. Além disso, $d \notin \{v_1, v_3, v_5\}$, pois D é orientado e $N_D^+(d) = \{a, b, c\}$. Se $b \in \{v_1, v_3\}$ então, como D é orientado, $d \neq v_2$. Assim, seja w o vértice de $\{v_1, v_3\} \setminus \{b\}$, wv_2bdc é uma cópia de P em D . Se $b \notin \{v_1, v_3\}$, então $v_1v_2v_3ab$ é uma cópia de P em D . Em ambos os casos, temos uma contradição.

□

Proposição 5.3.5. *Se P é um caminho orientado de ordem 5 com 3 blocos, sendo o último bloco de tamanho 2, então $\text{univ}(P) \leq 7$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.1, podemos assumir que P é um $P^+(1, 1, 2)$. Seja D um digrafo 7-crítico. Pela Proposição 2.3.1, temos $\delta(D) \geq 6$. Seja $S = \{v \in V(D) \mid d_D^+(v) \geq 3\}$. Se $\chi(D[S]) \geq 4$ então, pela Proposição 5.2.1, D contém uma cópia P' de um A_4^+ . Seja u o último vértice de P' . Como $d_D^+(u) \geq 3$, existe $v \in N_D^+(u) \setminus V(P')$. Assim, $P'v$ é uma cópia de P .

Se $\chi(D[S]) \leq 3$ então, $\chi(D - S) \geq 4$. Assim, pela Proposição 5.2.1, $(D - S)$ contém uma cópia P' de $P^-(1, 2)$. Seja u o primeiro vértice de P' . Como $d_D^-(u) \geq 4$, existe $v \in N_D^-(u) \setminus V(P')$. Assim, vP' é uma cópia de um P . □

Teorema 5.3.6. *Se P é um caminho orientado de ordem 5 e com 3 blocos, então $univ(P) \leq 7$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que P é um $P^+(k, l, m)$. Então, ou P é um $P^+(1, 2, 1)$ ou um $P^+(1, 1, 2)$ ou um $P^+(2, 1, 1)$. Este último é o reverso do segundo (pela Proposição 4.3.1, é suficiente analisarmos um dos casos). Se P é um $P^+(1, 2, 1)$ ou um $P^+(1, 1, 2)$, respectivamente, pela Proposição 5.3.4 e pela Proposição 5.3.5, $univ(P) \leq 7$. \square

Proposição 5.3.7. *Se P é um caminho orientado antidirecionado de ordem 5, então $univ(P) \leq 8$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.1, podemos assumir que P é um A_5^- . Pelas Exceções de Grünbaum, Teorema 4.1.3, temos que R_5 não contém uma cópia de P . Portanto, $univ(P) \geq 6$.

Seja D um digrafo 8-crítico. Suponha por contradição que D não contém uma cópia de P . Sejam $S = \{v \in V(D) \mid d_D^+(v) \geq 3\}$ e $H = D - S$. Inicialmente, afirmamos que $\chi(D[S]) \leq 3$. Uma vez que $d_D^+(v) \leq 2$ para todo vértice $v \in V(H)$, temos $Mad(H) \leq 4$. Pelo Lema 2.3.4, H contém um torneio de ordem 5.

Então, $\chi(D[S]) \geq 4$. Pela Proposição 5.2.1, $D[S]$ contém uma cópia P' of A_3^+ . Seja $P' = xvy$. Como D é orientado, sem perda de generalidade, podemos presumir que $(x, y) \notin A(D)$. Observe que y tem pelo menos um vizinho de saída b que não esta em $V(P')$. Além disso, como $N_D^+(x) \cap V(P') = \{v\}$, existe $a \in N_D^+(x) \setminus \{v, y, b\}$. Assim, $aP'b$ é uma cópia de P , uma contradição.

Pelo Teorema 5.3.2, todo torneio de ordem 5 em H deve ser cópia de R_5 . Seja p o número de cópias de R_5 em H . Denotamos estas cópias por R_5^i , para cada $1 \leq i \leq p$. Observemos alguns fatos:

1. Como $d_H^+(v) \leq 2$, não existe arco deixando nenhuma cópia R_5^i . Para $1 \leq i < j \leq p$, R_5^i e R_5^j são disjuntas em vértices, e não há arcos de R_5^i para R_5^j ;
2. Pelo fato de D ser 8-crítico, cada vértice de R_5^i tem pelo menos três vizinhos de entrada que não estão em $V(R_5^i)$. Seja N_i o conjunto dos vizinhos de entrada dos vértices de R_5^i em $D \setminus R_5^i$; e
3. Para todo vértice x em N_i , $d_D^+(x) = 1$. Caso contrário, pelo Teorema 5.3.2, D contém uma cópia de P .

Sejam $R = V(R_5^1) \cup \dots \cup V(R_5^p)$ e $N = N_1 \cup \dots \cup N_p$. Agora construímos H' a partir de H , como segue:

- $V(H') = (V(H) \setminus R) \cup \{x, y\}$;

- $A(H') = A(H \setminus R) \cup \{(n, x), (n, y) \mid n \in N\}$

Uma vez que $d_H^+(v) \leq 2$, para todo $v \in V(H')$, temos $Mad(H') \leq 4$. Além disso, H' não contém torneios de ordem 5. Assim, pelo Lema 2.3.4, $\chi(H') \leq 4$. Podemos encontrar uma coloração própria $c_1 : V(H') \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$. Sem perda de generalidade, faça $c_1(x) = 3$ e $c_1(y) = 4$. Pelo fato de todo vértice em N ser adjacente a ambos x e y , eles podem receber apenas cores em $\{1, 2\}$.

Observe que $D[R]$ é uma união disjunta de torneios de ordem 5. Logo, $D[R]$ admite uma 5-coloração própria $c_2 : R \rightarrow \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Como $\chi(D[S]) \leq 3$, então $D[S]$ admite uma 3-coloração própria $c_3 : S \rightarrow \{5, 6, 7\}$. Uma vez que não existem arcos entre R e S , a união de c_1 , c_2 e c_3 é uma 7-coloração própria de D , uma contradição. \square

Com isso fica provada a Conjectura de Burr para caminhos orientados de ordem 5. Os resultados a seguir tratam de árvores orientadas de ordem 5. Inicialmente, abordaremos os casos em que a árvore possui exatamente uma folha de entrada e duas folhas de saída. Estas árvores estão ilustradas na Figura 20.

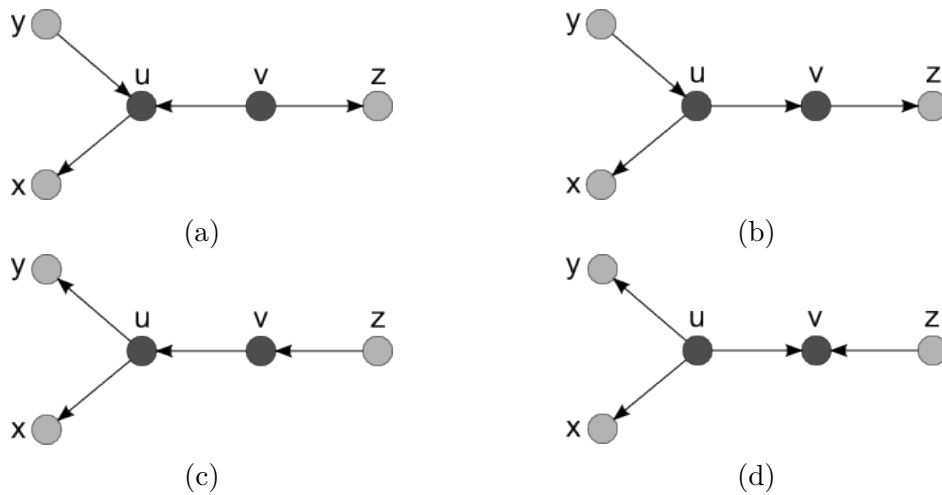


Figura 20 – Árvores orientadas A de ordem 5 com $|In(A)| = 1$ e $|Out(A)| = 2$.

Proposição 5.3.8. *Se A é uma árvore orientada de ordem 5 tal que $|Out(A)| = 2$ e $|In(A)| = 1$, cujas folhas de saída não são adjacentes a um mesmo vértice, então $univ(A) \leq 7$.*

Demonstração. Uma vez que A possui três folhas, uma de entrada e duas de saída, A não é um caminho nem é uma estrela $S_{2,2}$. A também não é uma árvore antidirecionada, pois possui uma folha de saída e uma folha de entrada adjacentes a um mesmo vértice. Assim, seja y a única folha de entrada de A . Sejam u o vizinho de saída de y e x a folha de saída adjacente a u , como nas Figuras 20a ou 20b. Seja D um digrafo 7-crítico. Faça $S = \{v \in V(D) \mid d_D^+(v) \geq 3\}$.

Se $\chi(D[S]) \geq 4$, então, pela Proposição 5.2.1, $D[S]$ contém um caminho direcionado P_1 e um caminho antidirecionado P_2 , ambos de ordem 4, e portanto uma cópia P' de $A - \{x\}$. Seja (a, b) o primeiro arco de P' . b tem pelo menos um vizinho de saída c que não está em $V(P')$. Adicionando c e o arco (b, c) a P' nos dá uma cópia de A .

Se $\chi(D[S]) \leq 3$, então $\chi(D - S) \geq 4$. Assim, pela Proposição 5.2.1, $(D - S)$ contém um $P^-(1, 2)$ e, portanto, uma cópia P' of $A - \{y\}$. Como $\delta^+(D - S) \leq 3$, temos $\delta^-(D - S) \geq 4$. Sejam a e b os vértices internos de P' . Ambos, a e b , têm pelo menos um vizinho de entrada, respectivamente c e d , que não está em $V(P')$. Adicionando c e o arco (a, c) (ou d e o arco (b, d)) a P' nos dá uma cópia de A . \square

Proposição 5.3.9. *Se A é uma arborescência de ordem 5 tal que $|Out(A)| = 2$, cujas duas folhas de saída são adjacentes a um mesmo vértice, então $univ(A) \leq 8$.*

Demonstração. A tem apenas uma folha de entrada z . Sejam v o vizinho de saída de z , y uma das folhas de saída de A e u o vizinho de entrada de y , como na Figura 20c. Agora, seja D um digrafo 8-crítico. Faça $S = \{v \in V(D) \mid d_D^-(v) \geq 3\}$.

Se $\chi(D[S]) \geq 5$, então, pela Proposição 5.1.2, $D[S]$ contém uma cópia A' de $A - \{z\}$. Seja v' o mapeamento de v em $D[S]$. Como $d_D^-(v') \geq 3$, v' tem pelo menos um vizinho de entrada que não está em $V(A')$ e, portanto, D contém uma cópia de A . Caso contrário, $\chi(D - S) \geq 4$ e então, pelo Teorema 4.3.3, ele contém um caminho direcionado P' que é uma cópia de $A - \{y\}$. Seja u' o mapeamento de u em $(D - S)$. Como $d_D^+(u') \geq 5$, e $N_D^+(u') \setminus V(P') \neq \emptyset$, temos que D contém uma cópia de A . \square

O seguinte lema será necessário à demonstração do Teorema 5.3.11:

Lema 5.3.10 (Lema 7 de Addario-Berry et al. (2013)). *Seja A uma árvore orientada de ordem n , com $n \geq 3$ e $A \neq S_n^+$. Se $A - Out(A)$ é l -universal, então A é $(l + 2n - 4)$ -universal.*

Teorema 5.3.11. *Se A é uma árvore orientada de ordem 5, então $univ(A) \leq 8$.*

Demonstração. Considere que A possui mais folhas de saída do que de entrada (caso contrário, pela Proposição 4.3.1, podemos pegar o reverso de A). Seja $k = |Out(A)|$. Se $k = 1$, então A pode ser ou um caminho direcionado ou um caminho orientado com três blocos. O resultado segue, respectivamente, dos Teoremas 4.3.3 e 5.3.6.

Suponha que $k = 2$ e que as suas folhas de saída não são adjacentes a um mesmo vértice. Se A for um caminho orientado, então este deve ser antidirecionado ou com dois blocos. No primeiro caso, pela Proposição 5.3.7, $univ(A) \leq 8$. No segundo, pelo Teorema 4.3.9, $univ(A) = 5$. Caso contrário, A é uma árvore e, pela Proposição 5.3.8, $univ(A) \leq 7$.

Agora suponha que $k = 2$ e que suas folhas de saída são adjacentes a um mesmo vértice. A deve ser ou uma árvore antidirecionada, ou uma arborescência, ou $S_{2,2}$.

Se A é uma árvore antidirecionada, seu diâmetro é igual a 3 e, pelo Corolário 4.3.18, $univ(A) \leq 6$. Se A é uma arborescência, então, pela Proposição 5.3.9, $univ(A) \leq 8$. Caso contrário, $A = S_{2,2}$ e então, pela Proposição 5.1.2, $univ(A) = 7$.

Se $k = 3$, então $A - Out(A)$ é 2-universal. Pelo Lema 5.3.10, temos que $univ(A) \leq 8$. Se $k = 4$, então, pela Proposição 5.1.1, $univ(A) \leq 8$. \square

Com esses resultados, fica então provada a validade da Conjectura de Burr para árvores orientadas em geral de ordem no máximo 5.

6 CONCLUSÕES

Neste capítulo, serão apresentadas as considerações finais sobre o estudo realizado, além de sugestões de futuras abordagens para o estudo de embutimento de árvores orientadas em digrafos.

6.1 Considerações Finais

Os problemas referentes ao embutimento de árvores orientadas em digrafos, de forma geral, são:

1. Qual o menor valor de $f(n)$ tal que qualquer árvore orientada de ordem n é $f(n)$ -inevitável?
2. Qual o menor valor de $g(n)$ tal que qualquer árvore orientada de ordem n está contida em todo digrafo D com $g(n) \cdot |V(D)|$ arcos?
3. Qual o menor valor de $h(n)$ tal que qualquer árvore orientada de ordem n é $h(n)$ -universal?

O primeiro problema trata do embutimento de árvores orientadas em torneios. A Conjectura de Sumner (Conjectura 4.1.7) diz que toda árvore orientada de ordem $n \geq 2$ é $(2n - 2)$ -inevitável. Este problema, como já foi dito no capítulo anterior, permanece em aberto. O melhor resultado para ele, $f(n) \leq 3n - 3$, foi encontrado por El-Sahili (2004c) (Corolário 4.1.13). A Conjectura de Sumner foi provada por Kühn, Mycroft e Osthus (2011b) para n suficientemente grande.

Para o segundo problema, restrito às árvores antidirecionadas, Burr (1982) mostrou que $n - 2 < g(n) \leq 4(n - 1)$. Addario-Berry et al. (2013) conjecturaram que vale para $g(n) = n - 1$ (conjectura 4.2.5).

O terceiro problema trata da universalidade de árvores orientadas. Burr (1980) provou que $h(n) \leq (n - 1)^2$ e conjecturou que $h(n) = 2n - 2$ (Conjectura 4.3.10). Addario-Berry et al. (2013) apresentaram um melhor limite superior que é $h(n) \leq n^2/2 - n/2 + 2$ (Teorema 4.3.13).

Considerando a principal conjectura de cada problema, os resultados para digrafos inevitáveis são os que mais se aproximam. Considerando o número de arcos, não há uma conjectura para árvores orientadas de uma forma geral. Para árvores antidirecionadas, o melhor limite encontrado, apesar de distante do que foi conjecturado, é um limite linear. Para digrafos universais, no entanto, ainda há muito o que ser explorado mesmo para caminhos orientados. Os resultados ainda estão distantes do que foi conjecturado.

Nessa dissertação, nos detivemos no estudo do problema relacionado ao número cromático (digrafos universais) e validamos a Conjectura de Burr para orientações de estrelas de ordem $n \geq 2$ e para árvores orientadas em geral de ordem no máximo 5.

6.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, os problemas relacionados a digrafos universais podem ser abordados de algumas formas, tais como:

- a) examinar a Conjectura de Burr para subclasses especiais de árvores orientadas. Como exemplo destas subclasses, temos: caminhos orientados, arborescências, árvores orientadas com limite de grau de cada vértice etc.;
- b) melhorar os limites encontrados para a universalidade de árvores orientadas de ordem 5, e então seguir no estudo para árvores orientadas de ordem 6 ou mais;
- c) estudar o comportamento da *Construção de Hajós* em digrafos. Segundo Hajós (1961), sejam D_1 e D_2 dois digrafos, (x_1, y_1) (ou (y_1, x_1)) um arco de D_1 , (x_2, y_2) (ou (y_2, x_2)) um arco de D_2 . A *Construção de Hajós* forma um novo digrafo identificando os vértices x_1 e x_2 , removendo os arcos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , e adicionando um novo arco entre y_1 e y_2 . No exemplo da Figura 21, D_3 é o resultado da construção de Hajós dos digrafos D_1 e D_2 .

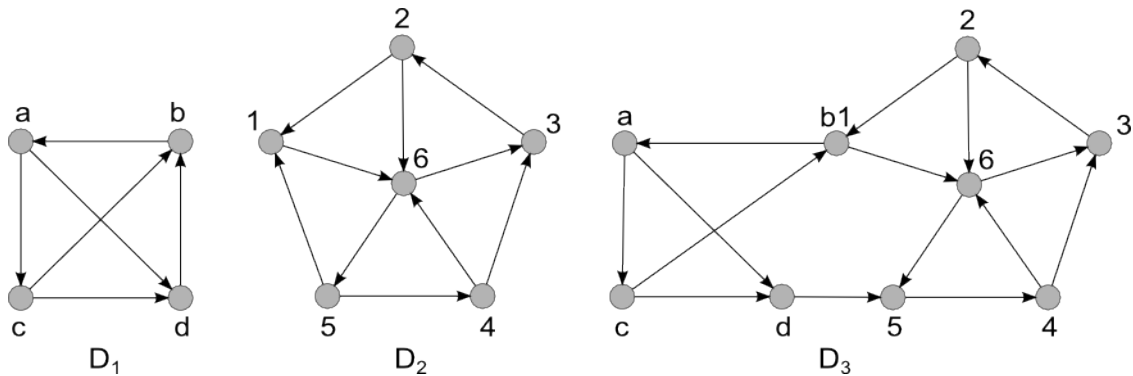


Figura 21 – Construção de Hajós

O Teorema de Hajós diz que um (di)grafo tem número cromático pelo menos $h(n)$, se e somente se ele é $h(n)$ -construtível. O conjunto dos digrafos $h(n)$ -construtíveis é definido iterativamente da seguinte forma:

- a) se D é um torneio de ordem $h(n)$, então D é $h(n)$ -construtível;
- b) se D é um digrafo $h(n)$ -construtível com dois vértices não adjacentes u e v , então $D/\{u, v\}$ é $h(n)$ -construtível;
- c) se D_1 e D_2 são dois digrafos $h(n)$ -construtíveis, o digrafo obtido pela Construção de Hajós a partir de D_1 e D_2 é também $h(n)$ -construtível.

O interesse por esta última abordagem é pelo fato dos resultados para torneios (digrafos inevitáveis) serem os mais próximos da conjectura correspondente, e por serem os torneios casos base na Construção de Hajós. A ideia é estudar uma a uma as operações que geram digrafos $h(n)$ -construtíveis a fim de verificar a preservação do embutimento de árvores orientadas ao longo de sucessivas aplicações das operações de Hajós.

REFERÊNCIAS

- ADDARIO-BERRY, L. et al. Oriented trees in digraphs. *Discrete Mathematics*, v. 313, n. 8, p. 967–974, 2013.
- ADDARIO-BERRY, L.; HAVET, F.; THOMASSÉ, S. Paths with two blocks in n -chromatic digraphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, v. 97, n. 4, p. 620–626, 2007.
- BANG-JENSEN, J.; GUTIN, G. Z. *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2007. (Monographs in Mathematics).
- BONDY, J. A. Disconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas. *J. London Math. Soc.*, v. 14, p. 277–282, 1976.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory*. New York: Springer, 2008. (Graduate Texts in Mathematics, v. 244).
- BURR, S. A. Subtrees of directed graphs and hypergraphs. In: *Proceedings of the 11th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph theory and Computing*. Boca Raton - FL: Florida Atlantic University, 1980. p. 227–239.
- BURR, S. A. Antidirected subtrees of directed graphs. *Canadian Mathematical Bulletin*, v. 25, n. 1, p. 119–120, 1982.
- EL-SAHILI, A. Antidirected paths in 5-chromatic digraphs. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, v. 339, n. 5, p. 317–320, 2004.
- EL-SAHILI, A. Paths with two blocks in k -chromatic digraphs. *Discrete Mathematics*, v. 287, n. 1-3, p. 151–153, 2004.
- EL-SAHILI, A. Trees in tournaments. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 92, n. 1, p. 183–187, 2004.
- EL-SAHILI, A.; KOUIDER, M. About paths with two blocks. *Journal of Graph Theory*, v. 55, n. 3, p. 221–226, 2007.
- ERDŐS, P. Graph theory and probability. *Canad. J. Math*, p. 34–38, 1959.
- ERDŐS, P. *Some problems in graph theory*. New York: Academic Press, 1965. 29–36 p.
- GALLAI, T. On directed paths and circuits. In: *Theory of Graphs (Proc. Colloq. Titany, 1966)*. New York: Academic Press, 1968. p. 115–118.
- GRÜNBAUM, B. Antidirected hamiltonian paths in tournaments. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 11, n. 3, p. 249–257, 1971.
- HAJÓS, G. Über eine Konstruktion nicht n -färbbarer Graphen. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur.*, v. 10, p. 116–117, 1961.
- HASSE, M. Zur algebraischen begründ der graphentheorie I. *Math. Nachr.*, v. 28, p. 275–290, 1964.

- HAVET, F. On unavoidability of trees with k-leaves. *Graphs and Combinatorics*, v. 19, n. 1, p. 101–110, 2003.
- HAVET, F.; THOMASSÉ, S. Finding an oriented hamiltonian path in a tournament. *J. Comb. Theory, Ser. B*, v. 78, n. 2, p. 243–273, 2000.
- HAVET, F.; THOMASSÉ, S. Median orders of tournaments: A tool for the second neighborhood problem and Sumner’s conjecture. *Journal of Graph Theory*, v. 35, n. 4, p. 244–256, 2000.
- KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In: *Complexity of computer computations (Proc. Sympos., IBM Thomas J. Watson Res. Center, Yorktown Heights. New York: Plenum, 1972. p. 85–103.*
- KÜHN, D.; MYCROFT, R.; OSTHUS, D. An approximate version of Sumner’s universal tournament conjecture. *J. Comb. Theory, Ser. B*, v. 101, n. 6, p. 415–447, 2011.
- KÜHN, D.; MYCROFT, R.; OSTHUS, D. A proof of Sumner’s universal tournament conjecture for large tournaments. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 38, p. 687–692, 2011.
- LUND, C.; YANNAKAKIS, M. On the hardness of approximating minimization problems. *J. ACM*, v. 41, n. 5, p. 960–981, 1994.
- MCLENNAN, A. The Erdős-Sós Conjecture for trees of diameter four. *J. Graph Theory*, v. 49, n. 4, p. 291–301, 2005.
- RÉDÉI, L. Ein kombinatorischer satz. *Acta Litteraria Szeged*, v. 7, p. 39–43, 1934.
- RICHARDSON, M. On weakly ordered systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 52, p. 113–116, 1946.
- ROSENFELD, M. Antidirected hamiltonian paths in tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B*, v. 12, p. 93–99, 1972.
- ROY, B. Nombre chromatique et plus longs chemins d’un graphe. *Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle*, v. 1, n. 5, p. 129–132, 1967.
- SACLÉ, J.-F.; WOŹNIAK, M. The Erdős-Sós Conjecture for graphs without C_4 . *J. Comb. Theory Ser. B*, v. 70, n. 2, p. 367–372, 1997.
- THOMASON, A. Paths and cycles in tournaments. *Trans. Amer. Math. Soc*, p. 167–180, 1986.
- VITAVER, L. M. Determination of minimal coloring of vertices of a graph by means of boolean powers of the incidence matrix. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, v. 147, p. 758–759, 1962.
- WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory*. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.