UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
CURSO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ARNALDO ARAÚJO LIMA JÚNIOR

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM PARA PROBLEMAS DE DECISÃO MULTIAGENTE BASEADA EM AGREGAÇÃO DE PREFERÊNCIAS

FORTALEZA, CEARÁ

2015

ARNALDO ARAÚJO LIMA JÚNIOR

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM PARA PROBLEMAS DE DECISÃO MULTIAGENTE BASEADA EM AGREGAÇÃO DE PREFERÊNCIAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

Área de concentração: Lógica e Inteligência Artificial

Orientadora: Profa. Dra. Ana Teresa de Castro Martins

Co-Orientador: Prof. Dr. Davi Romero de Vasconcelos

FORTALEZA, CEARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências e Tecnologia

L696a Lima Júnior, Arnaldo Araújo.
Uma abordagem utilizando lógica de primeira ordem para problemas de decisão multiagente baseada em agregação de preferências / Arnaldo Araújo Lima Júnior. – 2015.
106 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Computação, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ciência da Computação.
Orientação: Profa. Dra. Ana Teresa de Castro Martins.
Coorientação: Prof. Dr. Davi Romero de Vasconcelos.

1. Inteligência artificial. 2. Tomada de Decisões. 3. Lógica - Matemática. I. Título.

CDD 005

RESUMO

A tomada de decisão é um processo cognitivo que conduz à seleção de um plano de escolha dentre vários. Este pode ser concebido através do juízo de um ou vários indivíduos, os quais serão definidos como agentes. O trabalho em questão terá como cerne ambientes onde grupo de indivíduos atuam simultaneamente influenciando uns aos outros, ou seja, iremos trabalhar com sistemas multiagentes.

Dentre a classe de problemas envolvidos pela tomada de decisão, destacam-se os Problemas de Decisão Multicritério. Estes são uma variação dos Problemas de Decisão usuais onde a correta tomada de decisão se processa através da apreciação de vários critérios, os quais são utilizados para descrever o objeto/fato a ser decidido.

Para que seja possível a tomada de decisão, se faz necessário uma estratégia que analise o problema em questão, de modo a determinar as alternativas sobre as quais o tomador de decisão deverá escolher, avalie cada critério que compõe a alternativa, diante dos possíveis valores que estes podem assumir, para, assim, realizar a tomada de decisão. Dentre as diversas estratégias utilizadas para resolver este tipo de problemas, destacam-se aquelas que usam a Lógica Matemática como técnica de modelagem e solução.

Amplamente estudada por pesquisadores vinculados à Inteligência Artificial, a Lógica Matemática utiliza-se de conceitos específicos de sua sintaxe e semântica para modelar ambientes complexos e estabelecer por métodos específicos a tomada de decisão. Dentre as abordagens relevantes vinculadas à Lógica Matemática, destacam-s aquelas que empregam a Lógica de Primeira Ordem.

Inspirado nas Lógica de Preferências clássicas, este trabalho propõe a Lógica de Primeira Ordem para problemas de Decisão com Agregação de Preferências $\mathcal{FODPA}$. Esta é capaz de modelar e resolver Problemas de Decisão Multicritério em ambientes multiagentes através de técnicas relacionadas às Lógicas com Agregação de Preferências e à Lógica de Primeira Ordem.

Palavras-chave: Lógica. Inteligência Artificial. Tomada de Decisão.

ABSTRACT

Decision making is a cognitive procedure that lead to selection of a plan of choice among several. This can be designed through the judgment of one or more individuals, who are defined as agents. The work in question will have as core environments where several individuals act simultaneously, that is, we will work with multi-agent systems.

Among the problems involved by the decision making processes, stand out the Multicriteria Decision Problems. These are a variation of the usual Decision Problems where the correct decision-making processes through the assessment of various criteria, which are used to describe the object / fact to be decided.

To be able the correct decision making, a strategy is necessery to analyze the problem, determine the alternatives on which the decision maker must choose, evaluate each criterion that compose an alternative towards the possible values that each criterion can assume, thus, take the decision. Among the several strategies used to solve such problems, stand out those that use the Mathematical Logic as modeling and solution techniques.

Extensively studied by researchers in Artificial Intelligence, the Mathematical Logic uses specific concepts of its syntax and semantics to model complex environments and establish decision-making.

Inspired by the Classical Preferences Logics, this work aims to propose the First Order Logic for Decison problems with Preference Aggregation $\mathcal{FODPA}$. This is able to model and solve Multicriteria Decisiom Problems in multi-agent environments by techniques related to Preferences Logics and the First Order Logic.

Keywords: Multi-Criteria Decision Systems. Multi-Agent. Decision Making.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE DEFINIÇÕES, PROPOSIÇÕES, LEMAS, TEOREMAS, COROLÁRIOS E EXEMPLOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será estabelecido o conteúdo desta dissertação. Em um primeiro momento será feita a apresentação de certos conceitos utilizados. Em seguida, será exposto os objetivos deste trabalho e, após isto, concluindo o capítulo, será esclarecida a estrutura desta dissertação.

1.1 Preâmbulo

A utilização de conceitos ligados à Ciência da Computação para a modelagem e soluções de diversos problemas tornou-se uma atividade habitual pela comunidade acadêmica. De fato, as técnicas, instrumentos e metodologias envolvidas pela Ciência da Computação mostraram-se capazes, diante destas diversas problemáticas, devido à sua habilidade em analisar e computar de forma eficaz e eficiente a amplitude de características destes problemas.

O conjunto de problemas estudados pelos cientistas da computação é de uma magnitude vasta e interdisciplinar a várias áreas científicas. Dentre estes, destacam-se os Problemas de Decisão, em inglês *Decision Problems*, os quais são basicamente caracterizados por problemas onde se há a necessidade análise de uma questão e a posterior escolha do tipo sim-ou-não.

O processo de escolha é considerado na literatura como uma “ tomada de decisão ”, este é definido segundo (SCHMIDT, 1995) como o esforço necessário para resolver o dilema dos objetivos conflitantes, cuja presença impede a existência da “ solução ótima ” e conduz para a procura da “ solução de melhor acordo ”. De fato, a escolha por uma opção diante de um Problema de Decisão pode se comportar como uma tarefa árdua, onde o conceito de solução ótima pode ser inalcançável buscando-se então uma solução satisfatória para a problemática analisada.

A dificuldade em alcançar soluções satisfatórias cresce à medida que amplia complexidade dos Problemas de Decisão. Dentre os Problemas de Decisão de grande complexidade, destacam-se os Problemas de Decisão Multicritério, em inglês *Multicriteria Decision Problems* (MCDP). Estes envolvem os Problemas de Decisão onde vários critérios devem ser averiguados em uma opção/alternativa para a correta tomada de decisão.

De acordo com (WEBER, 1997), os MCDP envolvem a avaliação de várias alternativas e vários critérios de análise, existindo ou não uma alternativa que seja ótima em todos os critérios. Estes devem ser avaliados e analisados dentro de um contexto e, em conjunto, interpretados segundo inter-relações tangíveis ou intangíveis.

Diante das diversas metodologias ligadas à Ciência da Computação para modelar e resolver os MCDP, destaca-se a Lógica Matemática como estratégia utilizada para conceber a escolha de opções. A motivação para o uso da Lógica Matemática como ferramenta para a modelagem e solução destes problemas segue por um promissor crescimento nas últimas décadas. Tal eclosão decorre da evolução da Lógica Matemática como um paradigma aplicado a diversas áreas da Ciência da Computação, Economia e Filosofia.

De fato, o seu sucesso deve-se à confiança que a comunidade acadêmica oferece em utilizar tal abordagem. Devido à ampla diversidade de estudos que cerca a Lógica Matemática, houve o surgimento e a posterior evolução de diversas lógicas com peculiaridades únicas. Estas mostraram-se eficientes em estruturar e resolver diversos problemas computacionais, entre estes os MCDP, estudados pela comunidade acadêmica.

A utilização da Lógica Matemática junto à Ciência da Computação tornou-se habitual em diversos trabalhos acadêmicos de grande credibilidade. A Lógica Matemática não somente oferece um embasamento teórico confiável, como também acarreta ao correto e amplo entendimento da ciência envolvida na computação. Este entendimento induz à uma correta construção de um raciocínio lógico para a elaboração de algoritmos, técnicas, teorias e provas necessárias na concepção de um sistema computacional. Tais aspectos induzem à uma confiança e credibilidade que motiva os cientistas da computação em fazer uso da Lógica Matemática como estratégica de construção de abordagens computacionais.

Um dos fatores favoráveis à Lógica Matemática, para escolha desta como método de modelagem e ferramenta para a tomada de decisão, foi a facilidade em concretizar múltiplos envolvidos no processo decisório. Como está estabelecido no escopo da nossa abordagem, aspira-se que a lógica elaborada seja capaz de prover a tomada de decisão para grupos. Logo, torna-se indispensável a capacidade da lógica de apreciar cada um dos envolvidos na tomada de decisão.

O jargão "tomador de decisão" é comum nos trabalhos da área de Tomada de Decisão em Pesquisa Operacional. Entretanto, para este trabalho, este será considerado um agente inteligente. Tal notação será utilizada devido à capacidade deste tomador de decisão raciocinar sobre o problema, mesmo que seja somente sobre suas preferências. O termo "agente inteligente" é amplamente utilizado pela comunidade acadêmica ligada à Inteligência Artificial e em especial, pelos estudiosos da Lógica Matemática. Sobre a qual este trabalho está amparado na elaboração da sintaxe e semântica utilizada para conceber a lógica capaz de modelar e resolver os MCDP para grupos.

De acordo com (HUBNER; SICHMAN, 2003), um agente é uma entidade lógica ou física que tem uma missão a ser executada, com a possibilidade de atuar de maneira autônoma ou em coordenação com outros agentes. Esta definição expõe como os agentes deste trabalho serão definidos. Cada agente é uma unidade de processamento de dados, o qual utiliza a sua consciência sobre determinado fato para a tomada de decisão. Esta será analisada juntamente às decisões do outros agentes do ambiente para determinar a decisão do grupo, ou seja, cada agente contribui para produzir um sistema colaborativo apoiado em uma arquitetura multiagente.

Dentre as diversas Lógicas Matemáticas existentes, destaca-se a Lógica de Primeira Ordem. Esta é uma extensão da Lógica Proposicional Clássica, que apresenta o conceito de sentenças atômicas, onde os predicados são definidos como um predicado com um ou mais "argumentos" ao invés de serem símbolos proposicionais. Temos também a possibilidade de quantificar sobre um domínio como um o novo componente funcional lógica de primeira ordem não encontrado na lógica proposicional.

A quantificação da Lógica de Primeira Ordem impõe que, para uma fórmula φ, as novas construções $\forall x\varphi(x)$ e $\exists x\varphi(x)$. Estas significam, respectivamente, que para todo valor x a fórmula $\varphi(x)$ é verdadeira e que há pelo menos um valor de x que torna a fórmula $\varphi(x)$ verdadeira.

O primeiro ensaio da concepção da Lógica de Primeira Ordem foi realizada, segundo (EKLUND, 1996), por David Hilbert em (HILBERT, 1917). Este trabalho foi elaborado para uma palestra, ministrada por David Hilbert, durante o inverno de 1917-1918. Nesta palestra foi abordada falhas da Lógica de Proposicional em expressar certos conceitos fundamentais, estes necessários para a solução de problemas matemáticos habitualmente estudos na época. Para resolver tais contrariedades, David Hilbert sugeriu a quantificação de fórmulas segundo variáveis pré-estabelecidas.

Segundo (EKLUND, 1996), o trabalho de David Hilbert ficou alguns anos sem uma conceituação formal de como seria a sintaxe e semântica da lógica proposta. Somente em (SKOLEM, 1922) foi apresentado o primeiro sistema formalizado que conceitua os componentes da Lógica de Primeira Ordem. Este sofreu algumas intervenções e aperfeiçoamentos até emergir ao sistema formal considera hoje como a Lógica de Primeira Ordem.

De acordo com (EKLUND, 1996) a sucesso da Lógica de Primeira Ordem como um sistema lógica formal advém do seu poder expressivo para formalizar praticamente toda a matemática, a qual é resultado de sua Teoria bem conceituada. Uma Teoria de Primeira Ordem consiste em um conjunto de axiomas, os quais são geralmente finitos ou recursivamente enumeráveis, e das sentenças capazes de serem dedutíveis a partir deles.

Antes da apresentação da sintaxe, necessita-se definir o conceito de um alfabeto $\mathcal{A}$, este seria um conjunto não vazio de símbolos. Exemplos de alfabetos seria os conjunto $\mathcal{A}_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $\mathcal{A}_2 = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$, $\mathcal{A}_3 = \{\circ, \int, a, d, x, f, (,)\}$ e $\mathcal{A}_4 = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$. Chamamos uma sequência finita de símbolos sobre um alfabeto $\mathcal{A}$ de *strings* ou palavras sobre $\mathcal{A}$. Chamamos de $\mathcal{A}^*$ o conjunto de todas as *strings* sobre $\mathcal{A}$. Uma observação deve ser feita sobre a *string* vazia, esta também é considerada uma palavra sobre $\mathcal{A}$.

As definições a seguir apresentam os conceitos necessários para o correto entendimento da sintaxe Lógica de Primeira Ordem. Esta refere-se às regras que regem a composição dos textos em uma linguagem formal que constitui as fórmulas bem formadas de um sistema lógico.

Ao fornecer uma interpretação através da semântica, não faz sentido atribuir um significado para as *strings* da lógica se estas não são fórmulas bem formadas. Os conceitos ligados à sintaxe são primordiais para o concreto entendimento dos componentes da lógica, os quais são indispensáveis para as metas este trabalho. Estes são baseados no expresso em (EBBINGHAUS, 1994).

1.1.1 Sintaxe da Lógica de Primeira Ordem

Definição 1.1.1 (Alfabeto Lógica de Primeira Ordem). *Um alfabeto para um linguagem de Primeira Ordem contem os seguintes símbolos:*

(a) $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$*- como as variáveis da linguagem.*

(b) $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*- como os operadores negação, conjunção, disjunção, implicação e dupla implicação da lógica clássica.*

(c) $\{\forall, \exists\}$*- como os operadores Para Todo e Existe específicos da Lógica de Primeira Ordem.*

(d) $\equiv$*- como a operação de equivalência.*

(e) $($, $)$*- como os parênteses delimitadores.*

(f) (1) para cada $n \geqslant 1$ *um conjunto n-ário de símbolos relacionais.*

(2) para cada $n \geqslant 1$ *um conjunto n-ário de símbolos funcionais.*

(3) um conjunto de constantes.

Consideremos como um Alfabeto $\mathcal{A}$ os símbolos listados nos itens (a) até (e), e como $\mathcal{S}$ os símbolos apresentados no item (f). Deve-se observar que $\mathcal{S}$ pode ser vazio e que os símbolos listados no item (f) devem ser distintos dos símbolos de $\mathcal{A}$. O conjunto $\mathcal{S}$ expressa a Linguagem de Primeira Ordem. Chamamos de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{S}$ como o Alfabeto desta Linguagem e $\mathcal{S}$ como o *Symbol Set*.

A definição a seguir apresenta a conceituação de um $\mathcal{S}$-termo para a Lógica de Primeira Ordem.

Definição 1.1.2 (Definição de um $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-termo). *São precisamente aquelas strings em* $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*$ *que podem ser obtidas por finitas aplicações das seguintes regras:*

(T1)- Toda variável é um $\mathcal{S}$*-termo.*

(T2)- Toda constante em $\mathcal{S}$ *é um* $\mathcal{S}$*-termo.*

(T3)- Se as strings $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *são* $\mathcal{S}$*-termos e* f *é um símbolo funcional n-ário em* $\mathcal{S}$*, então* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *também é um* $\mathcal{S}$*-termo.*

Considera-se o conjunto de $\mathcal{S}$*-termos como* $\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$*.*

De posse da definição de um termo, será apresentado a seguir a definição de fórmulas:

Definição 1.1.3 (Definição de $\boldsymbol{\mathcal{S}}$-fórmulas). *As* $\mathcal{S}$*-fórmulas são aquelas strings de* $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}^*$ *as quais são obtidas por finitas aplicações das seguintes regras:*

(F1)- Se t_1 e t_2 são $\mathcal{S}$-termos, então $t_1 \equiv t_2$ é uma $\mathcal{S}$-fórmula.

(F2)- Se $t_1, \ldots, t_n$ são $\mathcal{S}$-termos e $\mathcal{R}$ é um símbolo relacional n-ário em $\mathcal{S}$, então $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_n)$ é uma $\mathcal{S}$-fórmula.

(F3) - Se φ é uma $\mathcal{S}$-fórmula, então $\neg\varphi$ também é uma $\mathcal{S}$-fórmula.

(F4) - Se φ e ψ são $\mathcal{S}$-fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são também $\mathcal{S}$-fórmulas.

(F5) - Se φ é uma $\mathcal{S}$-fórmula e x é uma variável, então $\forall x\varphi(x)$ e $\exists x\varphi(x)$ também são $\mathcal{S}$-fórmulas.

$\mathcal{S}$-fórmulas derivadas por meio de (F1) e (F2) são chamadas fórmulas atômicas, pois estas não são formados pela combinação de $\mathcal{S}$-fórmulas. $\neg\varphi$ é chamada de a negação de φ, e $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ são chamados de, respectivamente, de conjunção, disjunção, implicação e dupla implicação de φ e ψ.

Usa-se $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ para denotar o conjunto de $\mathcal{S}$-fórmulas. $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ é chamada de a *Linguagem de Primeira Ordem correspondente ao conjunto de símbolos $\mathcal{S}$* (geralmente chamado de *Linguagem do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem*).

Concluí-se assim as definições necessárias para a correta apresentação da sintaxe da Lógica de Primeira Ordem. Estas foram usadas como inspiração para a elaboração da sintaxe da $\mathcal{FODPA}$.

Será apresentado a seguir a semântica da Lógica de Primeira Ordem, a qual é expressada para compreender e determinar a parte do significado, como também do sentido, dos componentes da sintaxe. A semântica apresentada a seguir também será baseada no exposto em (EBBINGHAUS, 1994).

1.1.2 Semântica da Lógica de Primeira Ordem

Como expressado anteriormente, a semântica de uma lógica expõe o sentido que os elementos da sintaxe possuem de acordo com uma Estrutura e um Interpretação. De fato, a sintaxe e a semântica de uma lógica são dois elementos relacionados. As definições a seguir apresentam a forma de uma Estrutura, de um Assinalamento e de uma Interpretação para a Lógica de Primeira Ordem.

Definição 1.1.4 (Estrutura de uma Lógica de Primeira Ordem)**.** *Uma $\mathcal{S}$-Estrutura é um par $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a)$ com as seguintes propriedades:*

(a) $\mathcal{A}$ é um conjunto não vazio, chamado de domínio ou universo de $\mathfrak{A}$.

(b) a é um mapeamento definido sobre $\mathcal{S}$ satisfazendo que:

(1) Para todo símbolo relacional n-ário $\mathcal{R}$ em $\mathcal{S}$, $a(\mathcal{R})$ é uma relação n-ária em $\mathcal{A}$,

(2) Para todo símbolo funcional n-ário f *em* $\mathcal{S}$, $a(f)$ *é uma função n-ária em* $\mathcal{A}$,

(3) Para toda constante c em $\mathcal{S}$, $a(c)$ *é um elemento de* $\mathcal{A}$.

Ao invés de usar $a(\mathcal{R})$, $a(f)$ *e* $a(c)$, *será usado frequentemente* $\mathcal{R}^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ *e* $c^{\mathfrak{A}}$

Definição 1.1.5 (Assinalamento para uma Lógica de Primeira Ordem). *Um assinalamento em uma* $\mathcal{S}$*-estrutura é o mapeamento* $\beta : \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \mathcal{A}$ *do conjunto de variáveis no domínio* $\mathcal{A}$.

Definição 1.1.6 (Interpretação para uma Lógica de Primeira Ordem). *Uma* $\mathcal{S}$*-interpretação* $\mathfrak{I}$ *é o par* $(\mathfrak{A}, \beta)$ *consistindo de uma* $\mathcal{S}$*-estrutura* $\mathfrak{A}$ *e um assinalamento* β *em* $\mathfrak{A}$. *Se* β *é um assinalamento em* $\mathfrak{A}$,$a \in \mathcal{A}$, *e* x *é uma variável livre, então* $\beta\frac{a}{x}$ *é o assinalamento em* $\mathfrak{A}$ *que mapeia "x" para "a" que é definido do seguinte modo:*

$$\beta\frac{a}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y) & se\ y \neq x, \\ a & se\ y = x. \end{cases}$$

Se $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ *então* $\mathfrak{I}\frac{a}{x} = (\mathfrak{A}, \beta\frac{a}{x})$.

De posse das definições de uma Estrutura, de um Assinalamento e de uma interpretação, pode-se definir a noção de satisfação para termos.

Definição 1.1.7 (Definição de Satisfação para Termos). *Considere a interpretação* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, *a interpretação de um termo* $\mathfrak{I}(t)$ *para um domínio* $\mathcal{A}$ *será:*

(a) Para cada variável x *considere* $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$.

(b) Para uma constante $c \in \mathcal{S}$, *considere* $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$.

(c) Para todo símbolo funcional n-ário $f \in \mathcal{S}$ *e os termos* $t_0, \dots t_{n-1}$, *considere* $\mathfrak{I}(f(t_0 \dots t_{n-1})) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_0), \dots, \mathfrak{I}(t_{n-1}))$.

Agora, usando indução em fórmulas, será apresentada a definição de $\mathfrak{I}$ como modelo para φ, onde $\mathfrak{I}$ é uma interpretação arbitrária e φ uma fórmula. Se $\mathfrak{I}$ é um modelo para φ podemos afirmar que $\mathfrak{I}$ satisfaz φ ou que φ vale em $\mathfrak{I}$, e escrevemos que $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Definição 1.1.8 (Definição de Satisfação para a Lógica de Primeira Ordem). *Para todo* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ *temos que:*

$$\begin{array}{llll}
\textit{(i)} & \mathfrak{I} \models t_0 \equiv t_1 & \textit{sse} & \mathfrak{I}(t_0) = \mathfrak{I}(t_1) \\
\textit{(ii)} & \mathfrak{I} \models \mathcal{R}(t_0 \ldots t_n) & \textit{sse} & \mathcal{R}^{\mathfrak{A}} \textit{ vale para } \mathfrak{I}(t_0) \ldots \mathfrak{I}(t_n) \\
\textit{(iii)} & \mathfrak{I} \models \neg\varphi & \textit{sse} & \textit{não } \mathfrak{I} \models \varphi \\
\textit{(iv)} & \mathfrak{I} \models \psi \wedge \varphi & \textit{sse} & \mathfrak{I} \models \psi \textit{ e } \mathfrak{I} \models \varphi \\
\textit{(v)} & \mathfrak{I} \models \psi \vee \varphi & \textit{sse} & \mathfrak{I} \models \psi \textit{ ou } \mathfrak{I} \models \varphi \\
\textit{(vi)} & \mathfrak{I} \models \psi \rightarrow \varphi & \textit{sse} & \textit{Se } \mathfrak{I} \models \psi \textit{ então } \mathfrak{I} \models \varphi \\
\textit{(vii)} & \mathfrak{I} \models \psi \leftrightarrow \varphi & \textit{sse} & \mathfrak{I} \models \psi \textit{ se e somente se } \mathfrak{I} \models \varphi \\
\textit{(viii)} & \mathfrak{I} \models \exists x\varphi(x) & \textit{sse} & \textit{existe um } a \in \mathcal{A} \textit{ tal que } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi(x) \\
\textit{(ix)} & \mathfrak{I} \models \forall x\varphi(x) & \textit{sse} & \textit{para todo } a \in \mathcal{A} \textit{ tal que } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi(x)
\end{array}$$

Concluímos, assim, a apresentação da semântica da Lógica de Primeira Ordem e, portanto, a apresentação completa dos componentes da referida lógica.

Uma das potencialidades da Lógica de Primeira Ordem é a capacidade concatenar à esta funcionalidades de outras lógicas. Esta característica foi de grande relevância para a utilização da Lógica de Primeira Ordem neste trabalho. Como a lógica, a qual este trabalho almeja apresentar, possui como escopo prover a tomada de decisão, uma métrica de análise é necessária para estabelecer o processo de escolha. Para tal, faremos uso de relações de preferências para avaliar as opções da modelagem.

As relações de preferências podem ser modeladas por meio da Lógica de Preferências. Esta é uma variação da Lógica Proposicional, onde há a existência de componentes capazes de estabelecer comparações e, através destas, eleger preferências. Os primeiros sistemas completos para a Lógicas de Preferências foram proposto por (HALLDÉN, 1957) e (WON WRIGHT, 1963). Através destes, várias outras Lógicas de Preferências foram concebidas.

Para que seja possível determinar uma tomada de decisão, foi necessário exprimir a preferência de cada agente e agregar estas, caso queira-se exprimir a preferência de um grupo de agentes. Para que a nossa lógica fosse capaz de fazer uso destas utilidades, nós baseamos na Lógica de Preferências. Segundo (KACI, 2011), o conceito de preferência baseia-se no ato de preferir, como também no desejo de ter, fazer ou escolher uma coisa em vez de outra. Agregar estas preferências conceitua-se em reunir ou incorporar estas preferências em uma somente. Tal processo pode ser feito através de inúmeras técnicas e metodologias como as apresentadas em (CALVO; MAYOR; MESIAR, 2002), (BISDORFF, 2004), (CALVO; BELIAKOV, 2010) e (KACI, 2011).

Através destas lógicas, outros sistemas foram concebidos aplicando conceitos de diversas lógicas para elaborar Lógicas de Preferências potencialmente capazes de resolver diversos problemas. Dentre estes, destacam-se os problemas de decisão. Diante desta capacidade, esta abordagem utiliza conceitos ligados a Lógicas de Preferências em sua sintaxe e semântica. Posteriormente no capítulo 3 a Lógica de Preferências será exposta com mais detalhes.

O presente trabalho almeja utilizar os conceitos ligados à Lógica de Primeira Ordem e da Lógica de Preferências para apresentar, associando as peculiaridades de cada uma, uma lógica capaz resolver Problemas de Decisão Multicritério para ambientes Multiagentes.

A seção a seguir apresentará com detalhes as metas deste trabalho de acordo com os Problemas de Decisão Multicritério em Ambientes Multiagentes.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo conceber uma Lógica de Primeira Ordem capaz de modelar e proceder uma solução para MCDP para ambientes onde múltiplos agentes participem da tomada de decisão. Para isto, será realizado um estudo bibliográfico detalhado sobre os Problemas de Decisão analisando deste a configuração simples de uma instâncias deste problema até os problemas onde a decisão deve ser feita através da análise de múltiplos critérios para tipificar o objeto/fato a ser decidido pelo grupo de tomadores de decisão.

Para elaborar a correta tomada de decisão, esta dissertação tem como meta projetar um conjunto de operadores inspirados na Lógica de Preferências. Estes operadores deverão ser capazes de analisar as validades de fórmulas em diferentes configurações, como também determinar o mundo preferível para um conjunto de agentes através de técnicas de agregações de preferências. Estas foram criadas com o intuito expor as preferências de um conjunto de tomadores de decisão, os quais estão dispostos em uma estrutura de classificação hierárquica.

Através da estrutura $\mathfrak{A}$ de primeira ordem associada à lógica proposta, iremos representar o cenário onde se irá tomar a decisão. O problema de decisão $\mathcal{DP}$ será especificado através de uma fórmula φ. Os operadores lógicos da lógica possibilitarão representar as preferências dos múltiplos agentes e a agregação das mesmas. A verificação da satisfação de uma fórmula φ na estrutura $\mathfrak{A}$ será o processo de solução do problema de decisão. Ou seja, se a fórmula φ for satisfatível na estrutura $\mathfrak{A}$ então a resposta a um $\mathcal{DP}$ será sim. Caso contrário, será não.

Com o propósito de validar as estruturas criadas e qualificar a qualidade da lógica criada diante das diversas variações dos problemas de decisão, este trabalho realizará uma comparação da abordagem proposta por esta dissertação com outros trabalhos que utilizam a Lógica Matemática como técnica capaz de solucionar a problemática citada.

1.3 Organização do Texto

Esta dissertação será estruturada da seguinte forma:

- O capítulo 2 apresenta os conceitos envolvidos pelos Problemas de Decisão. Este apresenta a definição de um Problema de Decisão deste a sua formulação mais simples até a forma de comportamento complexa que os MCDP assumem.

- O capítulo 3 expressa as Lógicas de Preferência. Estas serão expostas partindo de uma ordem cronológica da evolução das abordagens, mostrando deste sua concepção pelos trabalhos de (HALLDÉN, 1957) e (WON WRIGHT, 1963), até alcançar abordagens que fazem uso Lógica de Preferências sobre distintos aspectos para modelar ambientes multiagentes.

- O capítulo 4 introduz os fundamentos que circundam o processo de agregar preferências. Neste será demonstrado o funcionamento das que envolvem este tipo de processo como também as estruturas utilizadas neste trabalho. Neste também é apresentada a Lógica com Agregação de Preferências concebida por (GIRARD, 2008).

- O capítulo 5 expõe a lógica a qual este trabalho se propôs a elaborar, a Lógica de Primeira Ordem com Agregação de Preferências para Problemas de Decisão. A chamada de $\mathcal{FODPA}$. Neste capítulo serão apresentados a sintaxe e semântica da lógica, como também as estruturas criadas para instituir uma correta tomada de decisão. Concluindo o capítulo será apresentado um estudo de caso afim de avaliar os fundamentos da lógica em questão e a comparação destas com trabalhos relevantes encontrados na literatura.

- O capítulo 6 exibe as conclusões desta dissertação. Neste é reiterado as estruturas da lógica e a potencialidade das mesmas para caracterizar um Problemas de Decisão. Por fim, concluindo o capítulo há as perspectivas futuras para esta dissertação.

2 PROBLEMAS DE DECISÃO

Neste capítulo serão conceituados os Problemas de Decisão com o objetivo de abordar as concepções deste tipo de problema. Após, há a caracterização dos Problemas de Decisão Multicritérios focando na evolução deste partindo de um Problema de Decisão usual. Completando a seção, há definição de um Problema de Decisão para Grupos. Em seguida, ocorre uma discussão sobre as estratégias utilizadas para resolver os problemas apresentados. Por fim, expõem-se o estado da arte. Esta seção exibirá os trabalhos que fazem uso de uma estratégia de solução semelhante a nossa diante da problemática apresentada.

2.1 Problemas de Decisão

Dentre os diversos problemas que envolve a Ciência da Computação destacam-se os problemas de decisão. Estes na sua forma mais compreensível concentra-se na simples questão sobre um sistema formal com uma resposta do tipo sim-ou-não, ou seja, tomar uma decisão de optar ou não por uma determinada escolha.

Segundo (PEREIRA; FONSECA, 1997), a palavra decisão, analisada etimologicamente, tem como prefixo *de,* com origem latina significa parar, extrair, interromper, anteposta à *cisão* significa cindir, cortar. Com esse entendimento, a palavra decisão significa "parar de cortar" ou "deixar fluir", que remete à uma mudança ou interrupção de um determinado curso, ou seja, uma mudança de estado que pode levar à uma descontinuação ou mudança de um processo que estava a ocorrer. Partindo desta mesma análise, a ausência de decisão, ou seja a indecisão, implica em uma estagnação, uma inércia que causa uma carência de modificações.

Em (BUCHANAN; O'CONNELL, 2006) afirma-se que o início dos estudos da Teoria da Decisão como uma ciência moderna deu-se em meados do século XX, mais especificamente em 1938, após o trabalho desenvolvido Chester Barnad para a gestão administrativa de empresas. Este inseriu a expressão "tomada de decisão", típica do vocabulário da gestão pública, no mundo dos negócios, passando a ser usado como o termo em processos de alocação de recursos e em definições relacionadas às políticas públicas.

Durante o decorrer do início do século XX, diversos trabalhos surgiram diante dos benefícios e tecnicas desenvolvidas pela Teoria da Decisão. Uma observação deve ser atribuída ao estudo elaborado em (VON NEUMANN; MORGENSTERN, 1944) foi proposta as bases da Teoria dos Jogos alicerçado no material produzido pelos estudos iniciais da Teoria da Decisão. Tal trabalho baseou-se em situações nas quais a decisão de alguém é influenciada por decisões desconhecidas, estas foram chamadas de *variáveis vivas* pelo autor para representar pessoas ou simulações do comportamento humano.

Em (RAIFFA, 1968) é exposto diversas técnicas fundamentais para a tomada de decisão, incluindo árvores de decisão e o valor esperado da informação de amostra. Howard Raiffa foi um grande pesquisador também nas áreas de estatística e Teoria do Jogos, em suas publicações ele sempre almeja mostrar que a intuição da Tomada de Decisão era extremamente influenciada por estas duas áreas, exibindo a interdisciplinaridade desta áreas.

Após diversos trabalhos e estudos acadêmicos, o conceito de um sistema de decisão ficou definido basicamente em um método composto por diversas funções, as quais são capazes de resolver um problema de decisão. Através da análise deste, o processo de tomada de decisão seria realizado. De fato, as definições que cercam este tipo de problema possuem certas peculiaridades.

Variações desta definição usual podem surgir de acordo com as singularidades que uma determinada área específica pode necessitar. Por exemplo, grande parte dos livros ligados à Pesquisa Operacional tendem a definir um problema de decisão da seguinte forma: primeiro definir uma função objetivo, ou seja, um único ponto de vista, como um índice de lucro ou um índice de custo global bem definidos que representa a opção preferível. No fim cada opção é analisada com o objetivo de maximizar o resultado da soma desta função lucro diante das opções para a decisão. Neste trabalho utilizaremos a definição mais simples que envolve os problemas de decisão, contudo aplicando variações de acordo com as necessidades da nossa abordagem.

A definição a seguir apresentará os conceitos de um problema de decisão em sua forma mais simples, ou seja, monocritério. Tal definição foi baseado no apresentado em (ROUBENS, 1996) e (FISHER; RUB; VIERKE , 2011). Nesta, é apresentado um conjunto de opções, sobre as quais o tomador de decisão deve escolher, e uma função de utilidade, a qual atribui uma avaliação escalar a cada opção. Por meio da análise destes valores, o tomador de decisão realiza a sua escolha.

Deve ficar claro que neste momento não há a especificação de agentes envolvidos na decisão. No decorrer do capítulo será apresentada uma versão desta definição que comporta a diferenciação entre os tomadores de decisão.

Definição 2.1.1 (Definição de um Problema de Decisão Monocritério)**.** *Um problema de Decisão Monocritério é composto por um conjunto de opções e uma função que assinala a cada opção um valor de utilidade. O problema é exposto através de uma tupla do tipo:*

$$\mathcal{DP} = \langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle$$

onde:

- *O conjunto* $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, o_3 \dots o_n\}$ *é o conjunto de alternativas ou opções sobre os quais o tomador de decisão deve escolher.*

- *A função injetora* $\mathcal{F}$ *que assinala a cada elemento do conjunto* $\mathcal{O}$ *a uma valor de utilidade.*

O exemplo a seguir almeja tornar mais claro o entendimento sobre um problema de decisão. Este fundamenta-se na problemática de um investimento diante de diversos tipos de retorno.

Exemplo 2.1.1 (Exemplo de uma Problema de Decisão Monocritério). *João pretende fazer uma aplicação de uma certa quantia visando gerar lucros. Há na cidade de João cinco bancos, os quais são representados por* $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5\}$. *A função de utilidade* $\mathcal{F}$ *assinala para cada banco uma taxa de retorno de investimento, onde* $\mathcal{F}(o_1) = 1\%$ *,* $\mathcal{F}(o_2) = 3\%$, $\mathcal{F}(o_3) = 2,5\%$,$\mathcal{F}(o_4) = 2,8\%$, $\mathcal{F}(o_5) = 3\%$. *Como o único critério a ser analisado é a taxa do banco, João escolhe a opção 5, pois esta é a que oferece maior taxa de retorno.*

A lógica a qual este trabalho almeja apresentar, visa trabalhar com uma variação deste tipo de problema, a qual está mais próxima do processo natural de escolha. O usual em Problemas de Decisão complexos é que a tomada de decisão seja fundamentada diante de várias variáveis que influenciam a escolha. Ou seja, múltiplos critérios ou múltiplos objetivos devem ser analisados para que haja uma escolha correta. A próxima subseção pretende apresentar de forma clara este tipo de problema.

2.1.1 Problemas de Decisão Multicritério

Como introduzido na seção anterior, os problemas de decisão podem ser classificados de acordo com o número de variáveis a serem analisadas no processo de tomada de decisão. Estas variáveis são consideradas os critérios utilizados na tomada de decisão. Problemas onde somente um objetivo/critério deve ser analisado para a tomada de decisão são chamados de *Problemas Monocritério*, já aqueles onde se há a necessidade de apreciação de vários objetivos/critérios são chamados de *Problemas Multicritério*.

Nesta abordagem iremos dedicar uma atenção especial aos *Problemas Multicritérios*, visando analisar abordagens onde vários objetivos ou critérios contribuem para a tomada de decisão. O estudo deste tipo de problema é contemplado pela *Análise de Decisão Multicritério*, em inglês, *MULTIPLE CRITERIA DECISION ANALYSIS* (MCDA) (CHANKONG; HAIMES; THADATHIL; ZIONTS, 1985).

O início dos estudos dos Problemas de Decisão envolvendo diversos critérios deu-se em (ROY, 1968), por meio da elaboração do método ELECTRE (*ELimination Et Choix Traduisant la REalité*). Este era baseado em uma estrutura hierárquica onde os critérios eram ordenados de acordo com sua prioridade para em um segundo momento analisar as possíveis opções de decisão de acordo com esta ordem dos critérios.

Entretanto, a primeira exposição completa da MCDA foi proposta em (KEENEY; RAIFFA, 1976), o qual continua como livro para referência básica até os dias atuais. Neste foi construída uma teoria baseada em árvores de decisão, modelagem de incertezas e regras de utilidades esperadas para, através destas técnicas, estender a Teoria da Decisão usual para acoplar os *Problemas Multicritério*. Para isto, eles desenvolveram uma teoria de integração sólida para tratar as incertezas geradas das consequências futuras que influenciavam os múltiplos objetivos analisados na tomada de decisão.

Segundo (KORHONEN; MOSKOWITZ; WALLENIUS, 1992), um Problema de Decisão Multicritério (MCDP) é um problema de decisão cuja solução está ligada à escolha entre um conjunto contável, normalmente finito, ou incontável de alternativas usando dois ou mais critérios. Quando os valores que os critérios podem assumir são conhecidos dizemos que o problema é determinístico, caso contrário é chamado de não-determinístico ou estocástico. Como os nossos critérios assumem valores definidos, será considerada neste trabalho os MCDP determinísticos.

Um apontamento deve ser feito sobre o modo como estes critérios são combinados entre si. Como citado anteriormente, os Problemas de Decisão usais operam sobre a decisão de fatos ou objetos que são caracterizados por diversos atributos ou variáveis. Estes são considerados os critérios que descrevem o fato ou objeto da problemática. A combinação destes diversos critérios junto aos valores que cada critério podem assumir, delimita uma alternativa de um MCDP.

Dentre o número de alternativas, os MCDP podem ser dividos em duas classes de problemas, os de variáveis contínuas e discretas. Quando as alternativas são infinitas ou não contáveis, temos problema contínuo. Já quando o número de alternativas é contável, temos um problema discreto. Este último será o abordado neste trabalho.

A seguir será apresentada a definição de um problema de decisão multicritério discreto. Este é baseado no apresentado em (ROUBENS, 1996) e (FISHER; RUB; VIERKE , 2011). Deve ficar claro que neste momento não há a especificação de agentes envolvidos na decisão. No decorrer do capítulo será apresentada uma versão desta definição que comporta a diferenciação entre os tomadores de decisão. Nas definições e exemplos que seguem neste trabalho, sempre que for referenciado um Problema de Decisão Multicritério, deve ser considerado que estamos trabalhando com um problema de variáveis discretas.

Na definição 2.1.2, um Problema de Decisão é composto por várias opções, as quais são formadas por vários critérios. Estes são ponderados de acordo com uma relação de preferência que equaciona cada critério. A escolha é processada através da análise dos critérios preferíveis para, assim, estabelecer a escolha por uma opção do conjunto de opções.

Uma observação deve ser feita sobre as métricas de análise aplicadas nas definições 2.1.1 e 2.1.2. Na definição 2.1.1, o processo de escolha é realizado de acordo com os valores estipulados pela função de utilidade "$\mathcal{F}$", logo o processo de seleção era baseado na apreciação dos valores assinalados, onde é escolha seria por aquela opção maior valor.

Já na definição 2.1.2 os critérios são avaliados por meio de relações binárias de preferências. Estas qualificam as opções de escolha de acordo com os critérios preferíveis, e , assim, são definidas relações de preferências entre as opções do problema para a tomada de decisão. No decorrer do trabalho, mas especificamente nas seções 5.1 e 5.3, ficará mais claro ao leitor o processo de análise das opções preferíveis. Os anseios da definição 2.1.2 e do exemplo 2.1.2 são apresentar o modelo de um MCDP, logo certas peculiaridades do processo de escolha foram abstraídas.

Definição 2.1.2 (Definição de um Problema de Decisão Multicritério)**.** *Um Problema de Decisão Multicritério consiste no processo de escolha dado um conjunto de opções, as quais são compostas por múltiplos critérios. O problema é exposto através de tuplas do tipo:*

$$\mathcal{MCDP} = \langle \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{O}, \{\sqsubseteq\} \rangle$$

onde:

- *O conjunto* $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \ldots c_m\}$ *é o conjunto de critérios que compõem as opções.*
- *O conjunto* $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3 \ldots \mathcal{K}_m\}$ *expressa os valores que cada critério pode assumir, onde o conjunto* $\mathcal{K}_i$ *indica os valores que o o critério* c_i *pode assumir. Ou seja,* $DOM(c_i) = K_i$*. O Domínio de* c_i *será* K_i
- *O conjunto* $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, o_3 \ldots o_n\}$ *é o conjunto de opções sobre as quais o tomador de decisão deve escolher. Ou seja,* $\mathcal{O} \subseteq DOM(c_1) \times DOM(c_2) \times \ldots DOM(c_m)$*, logo* $\mathcal{O} \subseteq K_1 \times K_2 \times \ldots K_m$
- *A coleção de relações de preferência* $\{\sqsubseteq\}$ *expõe as relações de preferência de um tomador de decisão, onde* $c_{11} \sqsubseteq c_{12}$ *indica que o primeiro valor que o critério 1 pode assumir é preferível pelo tomador de decisão que o segundo valor que o critério 1 pode assumir. A intuição deste operador é afirmar que um critério é melhor ou igual a um outro critério. Já a coleção de relação estrita* $\{\sqsubset\}$ *é definida em termos da relação* $\sqsubseteq$*:* $c_{ij} \sqsubset c_{ip} = c_{ij} \sqsubseteq c_{ip}$ *e não* $c_{ip} \sqsubseteq c_{ij}$*. A intuição deste operador é afirmar que um critério é estritamente melhor que um segundo critério analisado. Características destas relações como o tipo de relação, por exemplo relação total, e propriedades destas relações, por exemplo transitividade, devem ser definidas de acordo com as peculiaridades de cada problemática.*

O exemplo a seguir almeja explicar cada componente da definição 2.1.2 como também a escolha do tomador de decisão diante de uma problemática com vários critérios.

Exemplo 2.1.2 (Exemplo de um Problema de Decisão Multicritério)**.** *Considere a problemática semelhante à definição 2.1.1. João pretende fazer uma aplicação financeira almejando gerar o maior lucro possível. Para tal, o banco onde João possui conta oferece a seguinte política de aplicação: o cliente deve escolher a taxa de rendimento mensal, a taxa de rendimento anual e o tempo de aplicação. Para a taxa de aplicação mensal, o banco oferece taxas de 0.03 % ou 0.05 %. Para a taxa de aplicação anual, o banco oferece taxas de 4 % ou 6 %. O tempo de duração é de 12 ou 24 mêses. O banco oferece as seguintes opções de aplicação:*

Tabela 1: Opções de Aplicações

OPÇÕES	*CRITÉRIOS*		
	% mensal	% anual	tempo
OPÇÃO 1	0.03 %	6 %	12
OPÇÃO 2	0.05 %	6 %	24
OPÇÃO 3	0.05 %	4 %	12

Assim, podemos definir os seguintes componentes da definição: o conjunto $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, o_3\}$ *indica as três alternativas. O conjunto* $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ *representando os critérios taxa de rendimento mensal, taxa de rendimento anual e tempo, respectivamente. O conjunto* $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3\}$ *para os critérios apresentados. O primeiro critério seria expressado pelo conjunto* $\mathcal{K}_1 = \{0.03, 0.05\}$*, o segundo critério pelo conjunto* $\mathcal{K}_2 = \{4, 6\}$ *e o conjunto* $\mathcal{K}_3 = \{12, 24\}$*. A matriz* $\mathcal{M}$ *a seguir expressa as opções de acordo com os critérios.*

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{12} & c_{21} & c_{31} \end{pmatrix}$$

A escolha de João deve ser baseada nos critérios listados de acordo com as opções possíveis. Deve ser mencionado que há uma restrição de tempo sobre o montante aplicado, pois João necessita deste valor em um 1 ano. Logo, $c_{32} \sqsubset c_{31}$ *Ou seja ele fica restrito a 24 meses de aplicação, com isto, há a eliminação da opção* o_2*. João almeja obter o maior lucro possível, logo ele optará pela alternativa que oferecer maior retorno. Assim, temos que* $c_{11} \sqsubset c_{12}$*. Diante das opções restantes ele escolherá a opção* o_3*.*

Foram abstraídos ao leitor o processo de transformação e de inferência sobre as relações de preferência entre as opções. Estes serão expostos com detalhes na seção 5.1.

A definição 2.1.2 apresenta uma modelagem de um Problema de Decisão mais próximo àquela que a lógica proposta por este trabalho pretende utilizar. Entretanto, as definições apresentadas anteriormente consideram somente um tomador de decisão, enquanto a nossa lógica vislumbra trabalhar em ambientes multiagentes. Para os estudiosos desta área, este caso seria um especial. A seguir será apresentado as peculiaridades deste método.

2.1.2 Modelos de Decisão Multicritério para Grupos

No decorrer da segunda metade do século XX e início do século XXI, a Análise de Decisão Multicritério, em inglês *Multicriteria Decision Analysis* (MCDA) evoluiu como um campo de estudo acadêmico. Esta maturidade exteriorizou-se com a concepção de quatro distintas famílias de métodos criados a partir dos estudos iniciados por (KEENEY; RAIFFA, 1976). Estes são:

- A abordagem hieráquica (*The Outranking Approach*) cujo pioneiro em seu estudo foi Bernad Roy com modelos estruturados baseados na hierarquia de cada critério. As principais metodologias criadas por este estudioso são a *GAIA* e *PROMETHEE*, estas relacionam-se com este trabalho devido ao uso de preferências para hierarquizar cada alternativa do problema.

- A abordagem da *Teoria do Valor e Utilidade* utiliza um modelo de pesos para ponderar cada critério e auxiliar à tomada de decisão. Este pode ser visto em (KEENEY; RAIFFA, 1976) e continua largamente utilizada até os dias atuais. Em especial, junto à lógica difusa.

- A programação multiobjetivo é uma abordagem amplamente utilizada pelos pesquisadores ligados à Pesquisa Operacional. Esta faz uso de softwares como LINDO e MACBETH para montar modelos de otimização que tratam os critérios como funções que precisam ser maximizadas ou minimizadas.

- Modelos de Decisão e Negociação em grupos é uma abordagem amplamente utilizada quando se almeja tratar problemas onde os parâmetros são avaliados por grupos de agente. Por tratar-se de uma metodologia complexa, há trabalhos que utilizam técnicas de outras metodologias junto a aspectos singulares ligados aos múltiplos agentes envolvidos.

Esta última opção será utilizada neste trabalho. A motivação deste trabalho para tratar de ambientes onde há a tomada de decisão por um grupo de indivíduos, partiu-se da necessidade da lógica proposta em compreender e analisar os diversos casos que este problema se configura. Ou seja, a lógica foi desenvolvida partindo de uma motivação de trabalhar em ambientes multiagentes, entretanto um ambiente onde somente um agente é responsável pela tomada de decisão, temos o caso onde o grupo de agentes é composto somente um agente. Este é um caso especial de um ambiente multiagente, logo nossa lógica contempla todos os casos de grupos.

Segundo (DESANCTIS; GALLUPE, 1987), o modo como a decisão do grupo será determinada pode ser atingida de vários modos. Na literatura, há diversos trabalhos cujo escopo é tratar destas metodologias de análise do comportamento de cada agente e propor uma decisão para o grupo. De fato, há inúmeros métodos de como a decisão é determinada, contudo tratando-se da satisfação dos agentes diante da sua decisão é clara duas metodologias apresentadas a seguir:

- O primeiro modo expõe que o grupo deve atingir uma decisão que satisfaça a cada membro do grupo. Ou seja, não há a necessidade de atingir um objetivo específico, as opções são analisadas e aquela que satisfaça de modo satisfatório cada membro do grupo será aquela escolha para representar a decisão do grupo como um todo.

- O segundo modo sugere que há um objetivo para o grupo que sobrescreve os interesses individuais de cada membro do grupo. Ou seja, há uma meta a ser alcançada e os agentes devem cooperar em suas escolhas para atingir uma decisão que fique de acordo com o objetivo a ser alcançado.

Ainda sobre estes dois modelos, como o exposto em (DEITRICH; LIST, 2007), há certas variações sobre o modo como agentes interagem entre si como um grupo. Destacam-se os modelos ditatorial, semi-ditatorial, compensatório ou não compensatório. De fato, todas estas abordagens possuem características peculiares que as tornam funcionalmente eficientes para diferentes tipos de problemas, entretanto nesta dissertação iremos manter nossa atenção em grupo especial de trabalhos. Estes apresentam o modelo de decisão baseado em uma estrutura onde os agentes contribuem de modo justo para a tomada de decisão.

Como o apresentado na definição 2.1.1, para que haja a tomada de decisão se faz necessário uma função de avaliação para diferenciar as possíveis opções do problema. Nas definições anteriores, esta função era única, pois havia a existência de somente um tomador de decisão. Agora, como estamos trabalhando com grupos, há uma função de avaliação para cada componente do grupo envolvido na decisão.

Existem na literatura diversos trabalhos que almejam tratar estas funções de avaliação de cada envolvido para uma posterior transformação em uma função de avaliação do grupo. Esta expressa a utilidade que o agentes oferecem as opções quando analisados como um grupo. Caso o leitor queira aprofundar-se nestes métodos, os seguintes trabalhos apresentam métodos e técnicas de ponderação e agregação de preferências, como também de diferenciação dos tomadores de decisão: (BRANS; VINCKE, 1985), (DESANCTIS; GALLUPE, 1987), (KORHONEN; MOSKOWITZ; WALLENIUS, 1992), (BOUTILIER, 1994), (ROUBENS, 1996), (XU; YANG, 2001), (CHO, 2003), (BISDORFF, 2004), (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005), (GIRARD, 2008), (CALVO; BELIAKOV, 2010), (KACI, 2011), (CHAMBERS; HAYASHI, 2014), (KECK; DIECIDUE; BUDESCO, 2014), (UREÑA; CHICLANA; MORENTE; HERRERA-VIEDMA, 2015).

As definições apresentadas anteriormente exploraram a avaliação dos critérios através de funções de utilidade que ponderavam cada critério. Tal conceito é amplamente utilizado na literatura, entretanto esta abordagem fará uso de uma estrutura comparativa de preferência dentre as opções.

A utilização do termo “Preferência” como fator de análise para a tomada de decisão multicritério iniciou-se pelo método PROMETHEE (*Preference Ranking Organization METHod for Enrichment of Evaluation*). Este foi apresentado em (BRANS; VINCKE, 1985) e promovia a tomada de decisão através de uma hierarquia das preferências como o apresentado em (ROY, 1968). As preferências envolvidas eram ordenadas e as de maior peso hierárquico eram utilizadas com um grau maior de importância na tomada de decisão. Eram analisadas todas as preferências envolvidas oferecendo um peso maior à tomada de decisão aquelas com uma maior importância na hierarquia.

A motivação para tal escolha foi realizada devido à estrutura de preferência ser mais próxima do cotidiano contemporâneo. Comparar objetos, pessoas e ideias é uma atividade corriqueira e utilizar uma estrutura de avaliação deste tipo oferece credibilidade, como também usabilidade, à nossa lógica. A possibilidade de definir uma ordem de preferência por meio de valores quantitativos também foi um dos motivos pelos quais será utilizado a noção de preferências.

Comparar valores quantitativos propostos por uma função de utilidade, por exemplo, e transformá-la em uma relação binária é um trabalho que não se mostra oneroso e, assim, amplia simplicidade da lógica. Ou seja, caso a relação de ordem seja proposta por valores quantitativos, transformá-los em relações de preferências binárias não gera um custo significativo para a lógica.

A utilização do termo "preferência" é amplamente utilizado como expressão de critério no processo decisório. A escolha de uma opção à outra executa-se por meio da preferência de uma opção à outra e assim deve ser analisada no decorrer deste trabalho, contudo não há a preferência direta sobre os mundos, estes simbolizam o agrupamento de características validas simultaneamente sobre um objeto, o qual o mundo designa.

Os agentes expressam as preferências sobre as características, por meio destas há a inferência da preferência entre mundos por meio de técnicas específicas. Posteriormente na definição 5.1.6 ficará claro este processo ao leitor. Esta foi inspirada nas relações de preferência estabelecidas em (BISDORFF, 2004) e (GIRARD, 2008).

O estudo de técnicas e métodos ligados à ciência da agregação de preferências, como citado anteriormente, é objeto de estudo acadêmico da vários pesquisadores de diversas áreas. Segundo (ARROW; SEN; SUZUMURA, 2010), a pesquisa por métodos capazes de expressar os objetivos de um grupo através da análise da propensão de cada agente por uma escolha é objeto de estudo de diversos pesquisadores deste o início do século XX especialmente por aqueles ligados à teoria da escolha social, em inglês, *social choice theory*. Esta é intimamente ligada a pesquisas em diversas áreas como Economia, Teoria dos Jogos, Filosofia, Ciências Políticas entre outros. Basicamente, a *social choice theory* é uma análise matemática com o objetivo combinar opiniões, preferências, interesses individuais para chegar a uma decisão coletiva ou bem-estar social, em algum sentido.

Através de (ARROW, 1951), a *social choice theory* ganhou expressividade acadêmica especialmente nas áreas de Economia e Teoria dos Jogos, após Kenneth Arrow ganhar o prémio Nobel de economia. Após este fato, diversos trabalhos ligados à *social choice theory* cujo escopo era propor um modelo eficiente para a agregação das preferências dos agentes emergiram.

È presumível que leitor conjecture que este trabalho encaixa-se dentre a produção acadêmica ligada à *Social Choice*, pois este opera esta escolha social dos agentes através de uma estrutura inspirada no modelo de agregação de preferência proposto por (GIRARD, 2008).

Tal relacionamento entre métodos de agregação de preferências com a teoria de escolha social já foi proposta anteriormente no trabalho de (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005) que relaciona as preferências a um modo de expor a escolha social em jogos, e em (VAN BENTHEM, 2007) que utiliza um conceito de Equilíbrio Epistêmico, baseado em um Equilíbrio de Nash, como método de escolha em jogos de estratégia.

Concluída apresentação das áreas de estudo que abordam conceitos para a tomada de decisão multicritério em grupos, será apresentada a seguir a definição de um Problema de Decisão Multicritério para Grupos.

Definição 2.1.3 (Definição de um Problema de Decisão Multicritério para Grupos baseado em preferências)**.** *Um MCDP para Grupos é exposto através de tuplas do tipo:*

$$\mathcal{MCDP} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{O}, \{\sqsubseteq_{a_k}\}_{a_k \in \mathcal{A}} \rangle$$

onde:

- *O conjunto* $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3 \ldots a_k\}$ *simboliza todos os tomadores de decisão.*
- *O conjunto* $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3 \ldots c_m\}$ *é o conjunto de critérios que compõem as opções.*
- *O conjunto* $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3 \ldots K_m\}$ *expõe os valores que cada critério pode assumir, onde* K_m *é o conjunto de valores que o critério* c_m *pode assumir. Por exemplo, considere uma enumeração sobre o conjunto* K_i *composto por 3 elementos, temos então que o critério* c_i *pode assumir um destes 3 valores, rotulados de* c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}*, onde* c_{i1} *indica que o critério* c_i *assume valor de campo 1 da enumeração sobre o conjunto* K_i*. Ou seja,* $DOM(c_i) = K_i$*. O Domínio de* c_i *será* K_i
- *O conjunto* $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, o_3 \ldots o_n\}$ *é o conjunto de opções sobre as quais os tomadores de decisão devem escolher. Ou seja,* $\mathcal{O} \subseteq DOM(c_1) \times DOM(c_2) \times \ldots DOM(c_m)$*, logo* $\mathcal{O} \subseteq K_1 \times K_2 \times \ldots K_m$
- *A coleção de relações de preferência* $\{\sqsubseteq_{a_k}\}_{a_k \in \mathcal{A}}$ *expõe as relações de preferência de um tomador de decisão* a_k *tal que* $a_k \in \mathcal{A}$*, onde* $c_{11} \sqsubseteq_{a_k} c_{12}$ *indica que o primeiro valor que o critério 1 pode assumir é preferível pelo tomador de decisão* a_k *que o segundo valor que o critério 1 pode assumir. A intuição deste operador é afirmar que um critério é melhor ou igual a um outro critério. Já a coleção de relação estrita* $\{\sqsubset_{a_k}\}$ *é definida em termos da relação* $\sqsubseteq$*:* $c_{ij} \sqsubset_{a_k} c_{ip} = c_{ij} \sqsubseteq_{a_k} c_{ip}$ *e não* $c_{ip} \sqsubseteq_{a_k} c_{ij}$*. A intuição deste operador é afirmar que um critério é estritamente melhor que um segundo critério analisado. Características destas relações como o tipo de relação, por exemplo relação total, e propriedades destas relações, por exemplo transitividade, devem ser definidas de acordo com as peculiaridades de cada problemática.*

O exemplo a seguir almeja tornar mais claro o compreendimento da definição 2.1.3. Este está mais próximo do problema abordado pela nossa abordagem e também foi inspirado em (CHO, 2003).

Exemplo 2.1.3 (Exemplo de um Problema de Decisão Multicritério para Grupos baseado em preferências)**.** *Este exemplo é inspirado no apresentado em (CHO, 2003), que almeja* *modelar o problema da compra de um carro de acordo com uma série de critérios e um conjunto de opções. Esta decisão será feita através da apreciação de três alternativas e seis atributos ou critérios para escolher a melhor das opções de carros. Os critérios são preço, consumo, desempenho, depreciação de valor, manutenção e imagem geral. Para a escolha, será analisada as preferências de dois tomadores de decisão que compõem um conjunto* $\Gamma = \{a_1, a_2\}$*. As informações sobre os critérios são fornecida nas tabelas a seguir:*

Tabela 2: Lista dos critérios e seus respectivos valores

Critérios	Valores		
preço	baixo	médio	alto
consumo	baixo	médio	alto
desempenho	fraco	razoável	potente
depreciação de valor	baixa	média	alta
custo de manutenção	baixo	médio	alto
imagem geral	simples	razoável	luxo

No exemplo proposto em (CHO, 2003), os valores dos critérios assumem uma medida em um intervalo quantitativo, contudo para tornar o exemplo mais próximo ao contexto da nossa abordagem os valores dos critérios serão analisados como valores qualitativos. Deste modo, torna-se mais simples a comparação dos termos através de uma estrutura de ordem. A tabela a seguir expõe um conjunto de opções para o problema de escolha de um carro através de múltiplos critérios.

Após a definição das alternativas, a escolha de uma destas será através da análise das preferências dos agentes envolvidos na tomada de decisão. De posse destas informações, é possível exemplificar as estruturas apresentadas na definição 2.1.3. O conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ *de tomadores de decisão. Pela tabela 3, identifica-se os critérios do conjunto* $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$*, respectivamente preço, desempenho, consumo, depreciação de valor, custo de manutenção e imagem geral.*

Também é possível identificar na tabela 3 os valores dos conjuntos $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\}$*, onde, por exemplo, os valores de* $K_1 = \{$ *baixo, médio, alto* $\}$ *para representar o critério preço* c_1*. Ou seja, quando* ($c_1 =$ *baixo*)*, temos o critério preço assumindo o valor baixo, o qual é exposto por* c_{11} *Por meio da tabela 4, pode-se constatar o grupo* $\mathcal{O} = \{o_1, o_2, o_3\}$*, onde, por exemplo, temos que* $o_2 = \langle c_{11}, c_{23}, c_{31}, c_{43}, c_{52}, c_{62}\rangle$*.*
A matriz $\mathcal{M}$ *a seguir expressa as três opções para este exemplo.*

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} c_{12} & c_{21} & c_{31} & c_{42} & c_{52} & c_{61} \\ c_{11} & c_{23} & c_{31} & c_{43} & c_{52} & c_{62} \\ c_{13} & c_{21} & c_{32} & c_{41} & c_{53} & c_{63} \end{pmatrix}$$

Por fim, precisa-se analisar as preferências dos dois tomadores de decisão envolvidos na escolha. Note que $(c_{ij}, c_{rp}) \in \sqsubseteq_{a_k}$ *afirma que* $(c_{ij} \sqsubseteq_{a_k} c_{rp})$*. Ou seja, o tomador de decisão* a_k *prefere critério* r *assumindo o valor da posição* p *em* $\mathcal{K}_r$ *ao critério* i *assumindo o valor da posição* j *em* $\mathcal{K}_i$*. Para* a_1 *e* a_2 *temos as seguintes relações:*

$$\boxed{\sqsubseteq_{a_1} = \{(c_{11}, c_{21}), (c_{31}, c_{12}), (c_{22}, c_{31}), (c_{12}, c_{13})\}}$$

$$\boxed{\sqsubseteq_{a_2} = \{(c_{11}, c_{21}), (c_{22}, c_{21}), (c_{31}, c_{32})\}}$$

Note que a quantidade de relações analisadas para cada tomador de decisão não são iguais. Não há a necessidade destas serem semelhantes, visto que um tomador de decisão pode ser mais específico que outro.

De posse das relações de preferências entre os valores que os critérios podem assumir, há, agora, a transformação destas relações de preferências para relações de preferências entre as opções. Vamos abstrair este processo neste momento, pois o objetivo deste exemplo o tornar o leitor familiarizado com os passos necessários para a tomada de decisão. Tal processo de transformação será exposto na definição 5.1.6. Deve ficar claro ao leitor que através de cada relação de preferências entre os valores assumidos pelos critérios, pode-se inferir uma ou mais relação de preferência entre opções como também nenhuma relação. Assim, temos as seguintes relações de preferência entre opções, para a nossa abordagem mundos, para os agentes a_1 *e* a_2*.*

$$\boxed{\preceq_{a_1} = \{(o_2, o_1), (o_2, o_3), (o_1, o_3), (o_2, o_3)\}}$$

$$\boxed{\preceq_{a_2} = \{(o_2, o_1), (o_2, o_3), (o_2, o_3), (o_1, o_3)\}}$$

Estabelecidas as relações de preferência entre a opções, procede-se agora a agregação destas relações para expor as relações de preferências entre opções para o grupo $\Gamma = \{a_1, a_2\}$*. Esta ficará mais clara ao leitor na definição 5.1.10.*

$$\boxed{\preceq_{a_\Gamma} = \{(o_2, o_1), (o_2, o_3), (o_1, o_3), (o_2, o_3)\}}$$

O processo de escolha da melhor opção será feita através da avaliação das relações de preferência entre opções para o grupo Γ*. Assim, temos que a opção* o_3 *é a preferível pelo grupo. O exemplo 5.1.8 facilitará ao leitor o compreendimento do processo.*

Por fim, considere que o grupo chegou ao consenso de que, independente da preferências dos envolvidos, o carro deveria possuir o consumo baixo e depreciação baixa. De posse da potencialidade da Lógica Matemática, podemos expressar esta opção como : $\varphi(x) = c_{21}(x) \wedge c_{41}(x)$*. Considere a interpretação* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$*, onde* $\mathfrak{A}$ *é a estrutura sobre a qual está modela este ambiente e* β *a função que promove o assinalamento das variáveis do ambiente. Deste modo, temos que há a tomada de decisão pela opção* o_3 *visto que esta é preferível ao grupo e quando* $x = o_3$*, ocorre que* $\mathfrak{I} \models \varphi(x)$*. A seção 5.2 apresentará com mais detalhes o processo de consulta.*

O exemplo apresentado anteriormente expressa o processo de tomada de decisão realizado pela $\mathcal{FODPA}$. Caso o leitor possua ainda algumas dúvidas sobre algum processo abstraído, o capítulo 5 almeja resolver tais imprecisões.

Como apresentado no exemplo anterior, o processo de seleção da opção ocorre por meio da escolha que satisfaz os critérios de preferência dos agentes. Note que nenhum fator de recompensa ou de otimização foi imposto durante o processo de escolha. Em (XU; YANG, 2001), afirma-se que tal característica no processo de escolha determina se a abordagem é do tipo compensatória ou não-compensatória.

Segundo (XU; YANG, 2001), os Métodos Compensatórios são aqueles que permitem compensações entre os critérios. Um leve declínio tendencioso é realizada para um critério considerado-o importante ou de alto valor na tomada de decisão. Esta compensação pode ser realizada através de uma restrição como também na aplicação de um fato quantitativo ao critério escolhido. Entre os métodos mais comuns na literatura, estão o método de pontuação, o método de comprometimento, o método de concordância e a abordagem de raciocínio evidencial.

Já os métodos não-compensatórios não permitem compensações entre atributos. Ou seja, um valor desfavorável em um critério não pode ser compensado por um valor favorável em outro critério. Cada critério deve possuir o mesmo peso quando relacionado a um atributo específico. Nossa abordagem pretende fazer uso deste tipo de método de análise igualitária sobre os critérios na sua tomada de decisão.

Os principais métodos não-compensatórios são o Método de Dominância, o Método MaxMax, o Método MaxMin, o Método de Restrição Conjuntiva e o Método de Restrição Disjuntiva, o qual avalia um critério na sua melhor alternativa independentemente de todos os outros critérios. Este último será o utilizado nesta abordagem, visto que um critério é avaliado sobre os valores mais preferíveis, para este critério, independente dos outros. Ou seja, a tomada de decisão deve ser feita sem ser tendenciosa a um critério específico de acordo com as relações de preferência entre os mundos.

A seção a seguir apresenta os trabalhos que fazem uso da Lógica Matemática como estratégia para a modelagem e solução de Problemas de Decisão. Uma atenção especial foi dada aos trabalhos ligados à Lógica Modal. Esta foi proposta em (KRIPKE, 1963) e é amplamente utilizada para tratar modelos de escolha diante do conhecimento e preferências dos agentes. Diante disto, considerou-se relevante analisar estes trabalhos.

2.2 Estado da Arte - Lógica Matemática Para Problemas de Decisão

A seguir iremos apresentar os trabalhos relevantes que utilizam a Lógica Matemática como método de modelagem e solução de Problemas de Decisão. Estes também foram selecionados como base de comparação para a nossa abordagem. Uma observação deve ser feita sobre os termos utilizados. Devido a grande amplitude de expressões e vocábulos que podem exibir a intuição de uma tomada de decisão, certos termos devem ser apreciados sobre um olhar mais abrangente que significado usual deste. Em diversos trabalhos o termo “Tomada de Decisão” não estará explicitamente presente, entretanto percebe-se a intuição dos autores em contemplar este tipo de problemática. Tal análise também deve-se atribuir ao termo “Preferências”. Certos trabalhos tratam a ideia que este vocábulo pretende passar por meio de diferentes termos, entretanto possui uma função semelhante àquela apresentada nesta abordagem.

Em (MORRIS, 1996) foi elaborada uma lógica com a intuição de modelar uma decisão através de crenças. Ele propõe uma relação íntima das preferências dos tomadores de decisão com suas crenças e como as decisões são realizadas por meio das preferências dos envolvidos, conclui-se que a crenças possuem um papel importante na tomada de decisão. Foi elaborada uma sintaxe e uma semântica baseada em um operador modal para expor as crenças do tomador de decisão, e estas serão utilizadas para deduzir as preferências do mesmo.

Já no trabalho proposto em (VAN HEES; ROY, 2006), é realizada um análise de como os agentes podem utilizar suas intenções para simplificar a ação de tomada de decisão. Este é estabelecido por meios de conceitos definidos sobre um lógica matemática específica, a qual é baseada em Lógica Proposicional. Em um primeiro momento, é exposto como os agentes determinam o seu objetivo em jogos e como realizar decisões através de suas intenções. Em seguida a abordagem esclarece que estas intenções podem ser definidas em termos de estratégias, preferências e crenças. Deve ficar claro que para a abordagem um jogo consiste em um conjunto de movimentos, ou estratégias, disponíveis para estes jogadores, no nosso caso agentes. Estes jogadores determinam suas estratégias com o propósito de potencializar a sua satisfação no mundo, ou seja, gerar benefícios ao jogador. Tal processo de escolha é realizado através da *Teoria de Escolha Racional*.

De fato, a utilização da Lógica Matemática como ferramenta para a modelagem e estabelecimento de decisões foi explorado por diversos trabalhos. Destacam-se aquelas que utilizaram a Lógica Modal, proposta por (KRIPKE, 1963), como método para promover as decisão. Por ser a lógica modal é uma extensão da lógica de primeira ordem, considerou-se importante analisar certas abordagem, consideradas relevantes academicamente, que utiliza a Lógica Modal para a tomada de decisão.

A Lógica Modal faz uso de dois operadores para analisar a validade de fórmulas em mundos acessíveis ao mundo atual. Este são os operadores de necessidade e possibilidade. O operador de necessidade, chamado de *BOX*, definido através de $\Box\varphi$, afirma que “Necessariamente φ é verdade em um mundo w se e somente se φ é verdade em todo mundo acessível a partir de w”. Já o operador de possibilidade, chamado de *DIAMOND*, definido através de $\Diamond\varphi$, afirma que “Possivelmente φ é verdade em um mundo w se e somente se φ é verdade em pelo menos um mundo acessível a partir de w”. A forma como estes mundos interagem entre si e quais proposicionais e fórmulas são válidas em cada um destes mundos é expressada através de um *Modelo de Kripke*.

Como foi oferecido um elevado grau de importância à Lógica Modal, diante aos trabalhos relacionados, se faz necessário apresentar nesta seção os componentes desta lógica. A definição a seguir apresenta a linguagem da Lógica Modal.

Definição 2.2.1 (Linguagem da Lógica Modal)**.** *A linguagem da Lógica Modal consiste* *em um conjunto de símbolos proposicionais $PROP$, os conectivos booleanos $\neg$ e $\rightarrow$ e os operadores modais $\Box$ e $\Diamond$. A linguagem desta lógica foi definida da seguinte maneira usando a notação de Backus-Naur:*

$$\varphi \;:=\; p \mid \perp \mid \varphi \rightarrow \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

onde p é um símbolo proposicional tal que $p \in PROP$, $\perp$ representa o absurdo, $\varphi \rightarrow \psi$ simboliza a implicação usual da lógica clássica, $\Box\varphi$ é lido como o " necessariamente " φ e $\Diamond\varphi$ é lido como o " possivelmente " φ. Deve-se salientar que $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ e $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$.

O comportamento dos mundos, a forma como estes se relacionam e a validade de proposicionais e fórmulas nos mesmos é definida através de um *Modelo de Kripke*. Segundo (BLACKBURN; DE RIJKE; VENEMA, 2002), um *Modelo de Kripke* seria uma tupla formada por conjunto de mundos, por uma relação binária sobre estes mundos e por uma função que assinala a cada letra proposicional um mundo do Modelo. Será apresentada a seguir um *Modelo de Kripke*.

Definição 2.2.2 (Modelo de Kripke)**.** *Um Modelo de Kripke (Kripke Model) é uma tupla do tipo:*

$$\mathfrak{M} = (W, R, V)$$

onde:

- *W é um conjunto não vazio de estados.*
- *R é uma coleção de relações binárias em W.*
- *V é uma função de valoração $V : P \rightarrow 2^W$ que associa valores verdades aos proposicionais que valem nos estados de W.*

De posse da sintaxe da Lógica Modal e do Modelo de Kripke é possível apresentar a semântica da Lógica Modal. Esta será conceituada na definição a seguir:

Definição 2.2.3 (Semântica da Lógica Modal)**.** *Dado um Modelo de Kripke $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ a semântica da Lógica Modal é definida do seguinte modo :*

(i)	$\mathfrak{M}, w \models p$	*sse*	$w \in V(p)$
(ii)	$\mathfrak{M}, w \not\models \perp$		
(iii)	$\mathfrak{M}, w \models \varphi \rightarrow \psi$	*sse*	*se* $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ *então* $\mathfrak{M}, w \models \psi$
(iv)	$\mathfrak{M}, w_1 \models \Box\varphi$	*sse*	$\mathfrak{M}, w_2 \models \varphi$ *para todo* w_2 *tal que* $(w_1, w_2) \in R$
(v)	$\mathfrak{M}, w_1 \models \Diamond\varphi$	*sse*	$\mathfrak{M}, w_2 \models \varphi$ *para algum* w_2 *tal que* $(w_1, w_2) \in R$

Definidos os conceitos que cercam a Lógica Modal, serão apresentados a seguir os trabalhos que fazem uso destes conceitos para expressar o processo de tomada de decisão. Estes não necessariamente são expressos explicitamente como meta das lógicas, contudo pode-se extrair tal entendimento sem grande complexidade.

Dentre as Lógicas Modais de grande relevância acadêmica, a Lógica Epistêmica apresentada em (HINTIKKA, 1962) merece destaque. Em (ROY, 2009) há a elaboração de uma lógica epistêmica dinâmica híbrida com o objetivo de raciocinar sobre informações e mudanças de intenções. Estas geram mudanças de interações em uma estratégica em jogos, a qual guia a tomada de decisão dos agentes no mundo inserido. Basicamente, ele propõe uma transformação dos problemas de decisão definidos em (VAN HEES; ROY, 2006), onde as intenções dos agentes eram expostas através de operadores modais preestabelecidos.

O trabalho elaborado em (ROY, 2010) mostrou-se como uma evolução do (ROY, 2009). Há a conceituação que os Problemas de Decisão são situações onde os agentes devem escolher sobre um certo conjunto de ações, onde as consequências destas são incertas. Ações são representadas como funções de estados para consequências, entretanto estas podem ser consideradas como vetores de consequência, com uma coordenada para cada estado.

Um observação deve ser feita sobre a ausência de alternativas na definição proposta por (ROY, 2010). De fato, não há a citação explicita de alternativas, entretanto esta é abstraída no conjunto de estados W. Para do trabalho em questão cada alternativa é expressada por um estado, o qual é atingido por meio de uma "consequência". Tal escolha é conduzida através das relações de preferência definidas para cada agente.

Outra lógica que merece destaque, diante da capacidade de estabelecer a tomada de decisão, é a Lógica Deôntica apresentada em (WON WRIGHT, 1951). A Lógica Deôntica é usada para analisar formalmente as normas ou as proposições que tratam sobre deveres. De um modo mais formal, ela opera através de obrigações e condições.

Em (VAN DER TORRE; TAN, 1997), há a elaboração da Lógica Deôntica Prohairetica, em inglês, *Prohairetic Deontic Logic*. O termo Prohairetica, também chamada de prohairesis, vem do grego e remete à escolha. Ela é um conceito fundamental na filosofia que representa a escolha envolvida em dar ou recusar a aprovação de impressões. Este conceito foi utilizado em (VAN DER TORRE; TAN, 1997) para propor uma caracterização de uma escolha junto a obrigações de forma condicional.

A Lógica Deôntica Modal foi estabelecida em (FØLLESDAL; HILPINEN , 1971) inspirada nos conceitos apresentados em (WON WRIGHT, 1951). Podemos apresentar como uma abordagem relevante, que fez uso dos conceitos da Lógica Deôntica Modal, o trabalho proposto em (KOOI; TAMMINGA, 2008). Este propôs uma lógica multiagente para tratar de obrigações condicionais para grupos em ambientes de estratégia semelhantes àqueles definidos na Teoria dos Jogos. Entretanto, estes ambientes foram tratados como um modelo de Kripke usual chamado de modelo consequencialista. Neste, os estados do modelo representam ações que geram resultados que também são ações. Além disto, foi elaborado no trabalho uma sintaxe e semântica com o objetivo de tratar ações de obrigação do tipo: "Em interesse do grupo $\mathfrak{F}$ de agentes, o grupo de agentes $\mathfrak{G}$ deve realizar a ação $\mathfrak{A}$ " e para tratar ações de obrigação condicionais do tipo: "Se o grupo $\mathfrak{P}$ de agentes pratica a ação $\mathfrak{A}$, então em interesse do grupo de agentes $\mathfrak{F}$, o grupo $\mathfrak{P}$ deve praticar a ação $\mathfrak{A}$."

Estes operadores de obrigações condicionais são os responsáveis pela a tomada de decisão nos grupos de agentes. Dado um modelo consequencialista que expressa o mundo onde os agentes atuam e um conjunto de ações, a tomada de decisão será apresentada através da satisfação dos operadores modais de obrigação definidos. Ou seja, a decisão de mudar de um estado a um mais preferíveis será guiado pela validade das fórmulas tidas como obrigações. A obrigação sobre um determinado fato impõe a ação que irá gerar o determinado fato.

Houve em (TAMMINGA, 2013) um aperfeiçoamento do trabalho desenvolvido em (KOOI; TAMMINGA, 2008). Neste foi apresentado uma lógica deôntica modal para ambientes multiagentes, a qual trata casos de obrigações condicionais com uma sintaxe e semântica bem definida. Para atingir os objetivos estipulados, foi sugerida a transformação explícita de uma estratégia de um jogo definido na Teoria dos Jogos em um modelo consequencialista, esta seria extremamente necessária para tornar possível a atuação dos operadores modais da lógica deôntica em um jogo. Contudo, esta transformação parte do pressuposto que cada saída a^* é um equilíbrio de Nash, em uma estratégia de um jogo, se e somente se a conjunção das permissões das condições válidas naqueles estado são verdade no modelo consequensialista gerado através da transformação da estratégia de um jogo.

Esta última informação é de grande relevância quando se é analisada uma relação com a ação de tomada de decisão. Para esta abordagem, este a^* representa um estado onde o grupo encontra-se em Equilíbrio de Nash, logo trata-se do estado preferível, o qual os agentes almejam alcançar através de suas obrigações.

Na abordagem desenvolvida em (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005) há a elaboração de uma lógica com conceitos semelhantes àquela definida em (TAMMINGA, 2013) quanto a utilização do Equilíbrio de Nash. Este também é fator determinante na tomada de decisão para a mudança de estado. Em (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005) há a elaboração de um modelo específico para jogos de estratégia, o qual é composto por relações epistêmicas entre os mundo e uma relação de preferência usual como a definida em (BOUTILIER, 1994). O seu diferencial é mostrar como estas relações de preferência são suficientes para definir o Equilíbrio de Nash em jogos de estratégia e como estas podem induzir á uma solução para jogos finitos extensivos.

Como na Teoria de Decisão definida em (PETERSON, 2009), a escolha racional em jogos baseia-se na seleção de uma ação de acordo com as crenças e informações do agente tomador de decisão. Em um Problema de Decisão, as crenças do tomador de decisão são estados naturais que determinam as ações que devem ser realizadas. Tal conceito será utilizado em (PACUIT; ROY, 2012) para propor uma lógica epistêmica, apta modelar jogos, evolvida pela Teoria Epistêmica de Jogos, a qual tenta aproximar a Teoria da Tomada de Decisão a um contexto mais próximo àqueles definidos para a decisão em jogos.

De acordo com (PACUIT; ROY, 2012), na Teoria de Decisão usual, os tomadores decisão são indivíduos que realizam decisões de acordo com suas preferências. Esta são definidas sobre as possíveis consequências de suas ações. Dado estas consequências como estados do mundo, as crenças do tomador de decisão são cruciais para definir o raciocínio sobre a escolha de uma opção para a decisão.

Para (PACUIT; ROY, 2012), para se obter uma qualidade na tomada de decisão, se faz necessário uma análise fundamental das ações relacionadas a decisão e em que momento deve ser analisado os atributos do tomador de decisão. Para a abordagem citada, há na literatura padrão da Teoria dos Jogos a distinção de três estágios no processo de tomada de decisão: *ex ante, ex interim* e *ex post*. Em um extremo está o estágio *ex ante*, onde os jogadores ainda não realizaram suas decisões. Na outra extremidade está a *ex post* onde escolhas de todos os jogadores são divulgadas abertamente. Entre os estágios está a *ex interim*, onde os jogadores realizam suas decisões entretanto não possuem informações sobre as decisões e intenções dos outros jogadores.

Os esforços dos tomadores de decisão, segundo (PACUIT; ROY, 2012), devem ser direcionados para as informações obtidas neste momento intermediário. Sendo desnecessária qualquer análise do ocorrido nos outros estágios. De posse desta informações, os jogadores, que devem ser vistos como tomadores de decisão individuais, devem analisar a visão epistêmica do jogo e escolher o que fazer de acordo com suas preferências e informações sobre o contexto em que estão inseridos.

Em uma análise epistêmica de um jogo, as recomendações ou predições para as escolhas dos jogadores devem ser realizadas por meio de regras de seleção ligadas à Teoria de Decisão. A maximização esperada de uma utilidade preestabelecida será utilizada, em (PACUIT; ROY, 2012), como métrica para a escolha. Para o trabalho citado, estes fatores de utilidade são o que determina as preferências dos agentes e estabelece a tomada de decisão.

Inspirado nas lógicas citadas anteriormente, a nossa abordagem apresentará um sistema composto por uma sintaxe e semântica com aspectos singulares. Estes serão utilizados para expor a preferência dos agentes envolvidos pelo modelo na tomada de decisão. As preferências de um agente serão exteriorizadas através de equiparações binárias, as quais podem ser analisadas individualmente ou em grupo para solucionar um MCDP.

Para ilustrar o que seria um problema de decisão multicritério tomaremos como exemplo um problema cotidiano da compra de um carro. Geralmente é considerado como principal critério para a escolha o custo do carro, o qual, em alguns casos, remete somente ao seu preço final. Entretanto, outros critérios podem conflitar para determinar o custo final. Por exemplo, um carro pode apresentar um preço acessível, contudo possui um consumo exorbitante de combustível e um alto valor de seguro. Deste modo, o seu custo tente a aumentar. Assim, considerar como relevante somente o critério preço na compra de um carro pode gerar conturbações no processo de escolha.

No capítulo 5 ilustra-se com mais detalhes os problemas de decisão multicritério de acordo com a sintaxe e semântica da lógica que este trabalho pretende elaborar. No capítulo em questão será exposto a motivação para todas as fórmulas concebidas, como também será relacionado cada componente do modelo da lógica de acordo com as necessidade de um MCDA para Grupos.

Concluída a apresentação dos Problemas de Decisão, será apresentado no capítulo a seguir as Lógicas de Preferências. Esta capítulo apresentará os conceitos necessários para as relações de preferências. Através destas há a análise das predileções de cada agente e, por consequência, de um grupo de agentes.

3 LÓGICAS DE PREFERÊNCIAS

Neste capítulo iremos expor os aspectos que envolvem as Lógicas de Preferências. Em um primeiro momento será introduzido os conceitos das primeiras lógicas criadas cujo escopo era tratar preferências. Após este momento serão exibidos os conceitos que envolvem as modelagens das relações de preferências. Em seguida serão apresentados outras as diferentes linguagem e lógicas encontradas na literatura relacionada à preferências. Estes exteriorizam os componentes essenciais de uma Lógica de Preferências e as diferentes abordagens que tratam de simbolizar preferências sobre determinado fato ou objeto. Por fim, serão expostas os trabalhos relacionados à Lógica Modal de Preferências e, em seguida, as trabalhos cujo escopo é a Lógica Modal Multiagente com Preferências.

3.1 Introdução

Embora o estudo da Lógica de Preferência tenha-se iniciado por volta dos meados do Século XX, a apreciação do comportamento das preferências de um indivíduo data de tempos mais remotos. Aristóteles, em seu Livro III, desenvolve um exame inicial sobre os padrões estruturais que envolvem as preferências de um ser humano. Contemplando desde uma análise semântica do que seria preferir algo até estruturas auxiliares para evidenciar as preferências.

O motivação do estudo das preferências de um indivíduo e por conseguinte das Lógicas de Preferências, baseia-se na necessidade de compreender os desejos e predileções de um indivíduo. De fato, preferir algo à alguma coisa fundamenta-se basicamente na escolha dentre as possíveis opções. Esta escolha parte do princípio que o agente que realizará tal ação de eleger uma opção conhece tais fatos que estão sendo comparados e, através de um modelo de raciocínio previamente determinado, é capaz de demonstrar a sua preferência diante de determinado contexto de escolha.

Segundo (IVANCEVIC; IVANCEVIC, 2007) e (KACI, 2011), Preferência é inerentemente um tema multidisciplinar que agrega pesquisadores de diferentes áreas como: inteligência artificial, filosofia, psicologia, economia, pesquisa operacional entre outros. Em particular, as preferências tornaram-se um ramo de pesquisas em diversos tópicos que envolvem a inteligência artificial. Dentre as subdisciplinas relacionadas à inteligência artificial destacam-se o raciocínio não-monotônico, sistemas multiagentes, tomada de decisão, a teoria da escolha social. Estes intimamente ligados a este trabalho, visto que nossa abordagem pretende utilizar a Lógica Primeira Ordem junto à Lógica de Preferência como método racional para a tomada de decisão em sistemas multiagente.

Como citado anteriormente, nos trabalhos de (HALLDÉN, 1957) e (WON WRIGHT, 1963), realizou-se uma análise aprofundada sobre os conceitos filosóficos que envolvem as preferências. Estes são avaliados como o primeiro ensaio de uma axiomatização da Lógica de Preferências segundo conceitos íntimos e específicos da análise de preferências, os quais romperam com conceitos julgados divergentes da ideia correta de Preferência.

Mais especificamente em (HALLDÉN, 1957), foi realizada uma análise das preferências juntamente com conceitos ligados à Lógica Deôntica. Este motiva de forma categórica que conceitos ligados à Lógica Deôntica deveriam deixar de ser utilizados como modelo para expor preferências. Para ele, não seria correto considerar as obrigações como uma forma de expor preferências. A utilização dos termos semânticos ligados aos conceitos de "dever" e "permitir" deveriam ser atualizados à uma acepção mais próxima ao que a estes termos significam semanticamente.

Também foi introduzido em (HALLDÉN, 1957) os conceitos ligados à preferência estrita e da indiferença. Para este, a preferência estrita deveria ser utilizada no caso do fenômeno de um "melhor" elemento diante de outros. Ou seja, comparando dois a dois os elementos analisados, não há um elemento considerado preferível ao "melhor". Outro conceito apresentado seria o de "indiferença", o qual seria utilizado quando dois elementos postam-se iguais diante uma análise.

Já em (WON WRIGHT, 1963), foi formalizado um sistema completo para tratar a preferência. Inspirado no trabalho de Sören Halldén, uma lógica de preferência foi instituída afastando-se dos conceitos ligados à Lógica Deôntica. A lógica era baseada na lógica proposicional e composta por um operador binário que evidenciava a preferência de uma proposição sobre outra. Por exemplo, a fórmula pPq profere que o proposicional p é preferível ao proposicional q. Para este, uma preferência absoluta de p por q indica que para todo estado de um mundo que contem $p \wedge \neg q$ é preferido a todo estado de mundo que contem $\neg p \wedge q$.

Para (WON WRIGHT, 1963) , as relações da Lógica de Preferências deveriam indiscutivelmente possuir duas propriedades básicas: a assimetria e a transitividade. A assimetria afirma que se um estado é preferido a outro, então necessariamente o segundo estado não pode ser preferido ao primeiro. Já a transitividade afirma que se um estado é preferido a outro e este segundo é preferido a um terceiro, então necessariamente o primeiro estado também é preferido ao terceiro estado.

Uma observação é levantada em (WON WRIGHT, 1963) sobre a transitividade. Diferente da assimetria, a transitividade gera algumas controvérsias, visto que é simples pensar em contra-exemplos que quebrem a transitividade. Por exemplo, considere três frutas, banana (b), maçã (m) e uva (u). Seria sensato afirmar que bPm, mPu contudo uPb. Nem sempre uma intuição simplória segue a transitividade.

Segundo o trabalho apresentado no parágrafo anterior, a Lógica de Preferências deveria seguir cinco princípios básicos. Estes são apontados como os axiomas fundamentais à Lógica de Preferências. Os cinco princípios são:

1. $(pPq) \rightarrow \neg(qPp)$
2. $(pPq) \wedge (qPr) \rightarrow (pPr)$

3. $(pPq) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)P(\neg p \wedge q)$
4. $(p \vee q)P(r \vee s) \leftrightarrow [(p \wedge \neg r \wedge \neg s)P(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
   $\&\ (p \wedge \neg r \wedge \neg s)P(\neg p \wedge \neg q \wedge s)$
   $\&\ (q \wedge \neg r \wedge \neg s)P(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
   $\&\ (q \wedge \neg r \wedge \neg s)P(\neg p \wedge \neg q \wedge s)].$
5. $(qPp) \leftrightarrow [(p \wedge r)P(q \wedge r) \wedge (p \wedge \neg r)P(q \wedge \neg r)]$

Para concluir os conceitos envolvidos pela Lógica de Preferências, um operador de igualdade E entre as informações foi apresentado em (WON WRIGHT, 1963). Segundo o trabalho, definir tal propriedade segundo o operador de preferências P seria deselegante e não intuitivo. Para expressar que dois atômicos p e q são iguais seria utilizado pEq. Este também seguiria os cinco princípios básicos de Lógica de Preferências, entretanto para o operador E:

1. $(pEq) \rightarrow \neg(qEp)$
2. $(pEq) \wedge (qEr) \rightarrow (pEr)$
3. $(pEq) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)E(\neg p \wedge q)$
4. $(p \vee q)E(r \vee s) \leftrightarrow [(p \wedge \neg r \wedge \neg s)E(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
   $\&\ (p \wedge \neg r \wedge \neg s)E(\neg p \wedge \neg q \wedge s)$
   $\&\ (q \wedge \neg r \wedge \neg s)E(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$
   $\&\ (q \wedge \neg r \wedge \neg s)E(\neg p \wedge \neg q \wedge s)].$
5. $(qEp) \leftrightarrow [(p \wedge r)E(q \wedge r) \wedge (p \wedge \neg r)E(q \wedge \neg r)]$

Segundo (LIU, 2010) o livro *The Logic of Preference*, escrito por von Wright em 1963, foi o primeiro esboço de uma lógica voltada a tratar preferências. Como apresentado nos parágrafos anteriores, neste é elaborado um sistema lógico baseado em conceitos ligados a filosofia com o intuito de expressar comparações de preferência e igualdade entre informações atômicas.

Ainda em (LIU, 2010), o trabalho de von Wright destaca-se na área de estudo sobre preferências por tratar conceitos até então considerados árduos por filósofos e estudiosos da área. Neste foi apresentado distinções entre concepções até então tratadas como semelhantes, contudo, a luz dos conceitos de preferência, deveriam ser tratadas como distintas. Tais conceitos eram tratados como sinônimos de preferências, contudo em (WON WRIGHT, 1963) trata-os como razões ou justificativas para elaborar preferências, justificando, deste modo, a elaboração de lógicas específicas para cada um destes.

O primeiro destes foi o conceito deontológico ou normativo, o qual aplicaria um conceito de dever e permissão. O segundo abordaria conceitos axiológicos que envolvem a noção de bem e mal, impondo uma noção comparativa de “betterness”, e, por fim, o conceito antropológico que concebe uma necessidade e, desta, gera-se uma decisão, sendo esta a razão para uma ação. De fato, é possível elaborar relações de preferências baseadas nestes conceitos, entretanto tais concepções possuem definições singulares e devem ser tratadas de acordo com semânticas específicas. Von Wright trata estes conceitos de forma singular e não como uma justificativa para conceber preferências.

Continuando a abordagem semântica para a Lógica de Preferências proposto em (WON WRIGHT, 1963), há categorização de preferências segundo os conceitos de preferência implícita e explícitas. Dizemos que p é preferido explicitamente a q se há razões explícitas sobre as quais justificam-se que p é melhor que q. Se não há razões explícitas para tal, afirma-se que há uma preferência implícita.

A seção a seguir apresentará os conceitos usuais ligados às Lógicas de Preferências. Em um primeiro momento serão expostos tópicos relacionados à modelagem das relações de preferências. Em seguida, aspectos relacionados às diferentes linguagens utilizadas para expor preferências. Estes serão apresentados de acordo com o definido em (KACI, 2011).

Com estes, surgiram diversas formas de apresentar as preferências. Estas poderiam ser expressadas por relações binárias usuais, comuns até então, ou por métricas quantitativas de preferências. A seção a seguir apresentará os conceitos que envolvem o tipo de modelagem utilizada neste trabalho.

3.2 Modelagem de Preferências

Segundo (KACI, 2011) há basicamente dois métodos representativos de preferências, os quais usam utilidades ordinais e cardinais. Estes seriam os métodos qualitativos e quantitativos. Os métodos quantitativos são aqueles onde as preferências são baseadas em valores numéricos, os quais qualificam os atômicos comparados, já uma abordagem quantitativa há uma quantificação, baseada em uma métrica, que indica qual atómico é melhor que o outro. Este trabalho fará uso de uma abordagem qualitativa, a qual é exteriorizada por uma relação de preferência binária $\preceq$.

A modelagem através destes conceitos qualitativos é chamado em (KACI, 2011) de modelagem *CRIPS* de relações. Este tipo de modelagem é baseado em um conjunto finito de objetos, os quais serão comparados ou avaliados de acordo com uma relação binária. A definição a seguir apresentará o que seria uma relação de preferência de acordo com os anseios deste trabalho.

Definição 3.2.1 (Relações de Preferência CRISP)**.** *Considere como $\mathcal{O}$ o conjunto de objetos que serão comparados ou avaliados. A relação $\preceq$ sobre $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ expressa que o objeto o é tão preferível quanto ou melhor que o objeto o' se e se somente se existe a relação $o' \preceq o$*

Definida a relação de preferência $\preceq$ entre dois objetos $o, o' \in \mathcal{O}$, pode-se definir três relações sobre o e o':

- o é estritamente melhor que o', denominado por $o' \prec o$, quando $o' \preceq o$ ocorre mas $o \prec o'$ não ocorre. $\prec$ é chamada de relação de preferência estrita.
- o é indiferente a o', denominado como $o \approx o'$, quando ambos $o' \preceq o$ e $o \preceq o'$ ocorrem. $\approx$ é chamado de relação de indiferença.
- o é incomparável a o', denominado como $o \sim o'$, quando ambos $o' \preceq o$ e $o \preceq o'$ não ocorre. $\sim$ é chamado de relação de incomparabilidade.

Definida a relação de preferência binária, será apresentado na definição a seguir algumas propriedades básicas que envolvem as relações binárias.

Definição 3.2.2 (Propriedades sobre Relações Binárias)**.** *Considere a relação binária R sobre os elementos de um conjunto $\mathcal{O}$. Algumas das propriedades importantes que estas relações podem assumir são:*

- *reflexiva: para todo $o \in \mathcal{O}$ vale que oRo.*
- *irreflexiva (estrita): para todo $o \in \mathcal{O}$ não vale que oRo.*
- *Simétrica: para todo $o, o' \in \mathcal{O}$ vale que oRo' e $o'Ro$.*
- *Anti-simétrica: para todo $o, o' \in \mathcal{O}$ vale que, se oRo' e $o'Ro$ então $o' = o$.*
- *Assimétrica: para todo $o, o' \in \mathcal{O}$,se oRo' então não $o'Ro$.*
- *Transitiva: para todo $o, o', o'' \in \mathcal{O}$ vale que se oRo' e $o'Ro''$ então oRo''. A relação transitiva é irreflexiva se e somente se ela é assimétrica.*
- *Intransitividade: existe $o, o', o'' \in \mathcal{O}$ tal que oRo' e $o'Ro''$ e não oRo''*
- *Antitransitividade: para todo $o, o', o'' \in \mathcal{O}$ tal que se oRo' e $o'Ro''$ então não oRo''*
- *Total: para todo $o, o' \in \mathcal{O}$ vale que oRo' ou $o'Ro$ (ou ambos).*
- *Euclidiano: para todo $o, o', o'' \in \mathcal{O}$ vale que se oRo' e oRo'', então $o'Ro''$ e ($o''Ro'$).*
- *Serial: para todo $o \in \mathcal{O}$, deve existir um $o' \in \mathcal{O}$ tal que oRo'.*

Apresentadas as propriedades sobre uma relação de preferência $\preceq$, será exposto a seguir as diferenças entre os tipos de estrutura de preferências:

- Pré-ordem Total: este correspondem às propriedades de reflexividade, total/completa e transitividade sobre a relação $\preceq$. A relação de preferência estrita associada e de indiferença são transitivas enquanto a relação de incomparabilidade é vazia. Quando $\preceq$ é anti-simétrica, $\approx$ é um conjunto de pares (o, o) e a estrutura de preferência é chamada de ordem total. Por fim, quando $\preceq$ é assimétrico, $\approx$ é vazio e a estrutura de preferência é chamada de ordem total estrita.

- Pré-ordem Parcial: este corresponde as propriedades reflexividade e transitividade sobre as relações de preferência $\preceq$. A relação de preferência estrita e indiferença são transitivas enquanto a relação de incomparabilidade for vazia. Quando $\preceq$ é anti-simétrica, $\approx$ é composta somente de pares (o, o) e a estrutura de preferência é chamada de uma ordem parcial. Por fim, quando $\preceq$ é assimétrico, $\approx$ é vazio e a estrutura de preferência é chamada de ordem parcial estrita.

Dada uma relação de indiferença transitiva $\approx$ e uma relação de preferência transitiva estrita $\prec$, temos as seguintes combinações : $\forall o, o' \in \mathcal{O}$, se $o' \prec o$ e $o' \approx o''$ então $o'' \prec o$ e se $o \approx o'$ e $o'' \prec o'$ então $o'' \prec o$.

Definidos todos os componentes necessários para modelar relações em uma lógica de preferências, será apresentado na seção a seguir as possíveis linguagens utilizadas para expressar preferências. Será oferecida uma atenção especial à linguagem condicional, visto que esta será utilizada neste trabalho.

3.3 Linguagens de Representação de Preferências

A representação de preferências é a tarefa de capturar e manipular as preferências de um conjunto de indivíduos através de relações de preferências. Para expressar estas preferências faz-se uso de linguagens de representação, estas são responsáveis por modelar os conceitos envolvidos por uma relação de preferências, os quais, em certos casos, envolvem tarefas árduas e complicadas.

Expressar as preferências de indivíduos pode ser uma tarefa complexa e onerosa diante do vasto número de variáveis, atributos ou critérios envolvidos no processo de exteriorização das preferências, logo uma correta linguagem de representação de preferências torna-se de extrema importância para o sucesso da abordagem. No decorrer no capítulo faremos uso da sigla $\mathcal{PRL}$ para recorrer as linguagens de representação de preferências.

Como citado no parágrafo anterior, exprimir uma $\mathcal{PRL}$ é uma difícil tarefa. Tal fato está ligado à limitação cognitiva dos indivíduos envolvido. Geralmente estes não estão dispostos a comparar todos os pares de possibilidades possíveis de resultados ou avaliá-los individualmente para, assim, exprimir uma preferência sobre os vários resultados/outcomes da abordagem.

Infelizmente, tais problemas são inerentes à todas as $\mathcal{PRL}$. O que as boas abordagens implementam são técnicas e estruturas capazes de contornar tais dificuldades para assim avaliar todos os casos analisados necessários. No decorrer do capítulo algumas destas técnicas serão apresentadas.

Diante do modo de compor suas declarações, as $\mathcal{PRL}$ possuem duas formas de tratamento bem definidas, estas são as abordagens baseadas em declarações de preferência qualitativas e quantitativas. As abordagens qualitativas são analisadas sobre declarações do tipo : "Eu prefiro viajar para Paris do que para Londres" e "Eu odeio sorvete de chocolate ", ou seja, as declarações que qualificam as opções de acordo com outra opções ou perante o conjunto de opções. Já as abordagens qualitativas expressam as preferências com declarações do tipo: "Eu prefiro Paris com um peso de 0,7" e "Eu gosto de chocolate com um peso de 0,9", ou seja, as opções são analisadas diante uma quantificação que valora as opções consideradas.

Uma observação deve ser feita sobre a potencialidade de ambas as abordagens. Independente do tipo de abordagem, pré-ordens podem ser induzidas através destas declarações. Contudo a capacidade destas pré-ordens em comparar todas as opções envolvidas está intimamente ligada à qualidade das declarações. Abordagens quantitativas oferecem uma facilidade em elaborar ordens sobre as opções devido à sua natureza cardinal. Como valores numéricos são impostos às declarações, elaborar ordens limita-se basicamente em ordenar tais declarações. Entretanto, aferir opções tende a ser um trabalho não tão intuitivo. Quando se aplica pesos às declarações, questionamentos podem surgir sobre a unidade de análise a ser utilizada, como diferenciar tais declarações, a razão da distinção das declarações segundo as unidades expostas e entre outras indagações.

Abordagens quantitativas, como apresentado anteriormente neste capítulo, apresentam aspectos comparativos baseados em métricas que qualificam as declarações. Os indivíduos envolvidos são estimulados a pensarem livremente sobre o objeto analisado, para assim, elaborar suas declarações. Tal característica tornam tal abordagem mais intuitiva aos envolvidos. Outro apontamento que favorece esta abordagem está na capacidade comparar as opções envolvidas. Assim, problemas envolvendo métricas tendem a ser insignificantes no processo de elaboração de pré-ordens das opções.

Mesmo de posse de características mais naturais e intuitivas, as abordagens qualitativas possuem certos problemas. Mesmo considerando-se como racionais os indivíduos, cujas preferências são analisadas, estes podem possuir dificuldades em comparar certas opções diante da inconsistências, gerada pela transitividade, como em razão da dificuldade de escolher opções. Tais problemas, como também possíveis soluções, são explorados em (ARROW, 1951), (DEITRICH; LIST, 2007) e (ARROW; SEN; SUZUMURA, 2010).

De acordo com (KACI, 2011), estes dois modelos de composição de declarações de preferências podem ser aplicados a duas categorias de linguagens: Linguagens Lógicas e Linguagens Gráficas. Neste trabalho faremos uso das Linguagens Lógicas, estas pode ser divididas em duas categorias: Lógicas Ponderadas e Lógicas Condicionais. Esta última será utilizada neste trabalho. Na próxima seção será feita uma pequena apresentação dos componentes de uma Linguagem Gráfica. Em seguida, serão definidas as Linguagens Lógicas.

3.3.1 Linguagens Gráficas

Este tipo de linguagem baseia-se na utilização de grafos para compor o relacionamento das diversas opções da abordagem, onde estas opções são compostas pelas variáveis que descrevem o sistema. As diversas opções relacionam-se formando grandes estruturas de redes, as quais são montadas baseadas em uma estruturas de ordem. Ou seja, as Linguagens Gráficas utilizam-se de uma estrutura de rede tanto para exteriorizar as opções, de acordo com as variáveis que as compõem, como também para expor a ordem destas opções, a qual deve ser uma ordem total.

A motivação para o uso das Linguagens gráficas é baseada no processo de elicitação, ou seja, construção das relações de preferências ou das funções de utilidade para abordagens quantitativas. Segundo (KACI, 2011), torna-se mais simples expor as preferências nestas estruturas de grafos, chamadas de estruturas de variáveis para preferências independentes.

De modo informal, preferências independentes indicam que a relação de preferências sobre certas variáveis podem ser elaboradas diante de valores pré-estipulados para outras variáveis. Uma observação deve ser levantada sobre a não validade de comutatividade para as preferências independentes. Se uma variável X é preferida independente a uma variável Y não necessariamente afirma que Y é preferida independentemente à variável X.

Por exemplo, considere que a preferência de um indivíduo sobre a escolha do prato principal para uma refeição é independente do tipo de vinho. Por conseguinte, ele prefere peixe a carne dado valores fixos de vinho. Temos que o prato peixe acompanhado de vinho branco é preferível ao prato carne acompanhado de vinho branco e que o prato peixe acompanhado de vinho tinto é preferível ao prato carne acompanhado de vinho tinto. Entretanto, a sua preferência sobre vinhos depende do prato principal. Logo, o indivíduo prefere vinho branco com peixe como prato principal que vinho tinto e carne como prato principal. Caso o leitor almeje aprofundar-se mais sobre as Linguagens Gráficas, sugere-se consultar (KACI, 2011).

3.3.2 Linguagens Lógicas

Utilizadas para a representação de preferências através de sistemas compostos por uma sintaxe e semântica bem definidas, as linguagens lógicas foram concebidas para de modelar preferências por meio de relações comparativas. Como citado anteriormente, as linguagens lógicas são compostas pelas Lógicas Ponderadas e as Lógicas Condicionais. Estas baseiam-se em métricas numéricas e relações de ordem, respectivamente, para elaborar a preferência do indivíduo analisado.

Tais Linguagens Lógicas promovem comparações entre objetos para exprimir relações de preferência. Entretanto, estes objetos podem ser analisados sobre diferentes conceitos. Segundo (KACI, 2011) há três níveis comparativos bem definidos para estes objetos. Como estas lógicas são baseadas em Lógica Proposicionais, temos que as relações de preferência são baseadas entre proposições. Estas são o primeiro nível sobre o qual pode-se elaborar relações de preferências. Ainda tratando-se sobre conceitos da Lógica Proposicional, pode-se elaborar fórmulas através de proposições e dos operadores usuais da Lógica Clássica. Assim, há a capacidade de construir relações de preferência entre fórmulas. Este é o segundo nível de preferências. Por fim, as proposições e fórmulas podem caracterizar mundos ou resultados diante da sua validade nestes. Através destas validades, podemos diferenciar os mundos e compará-los diante das preferência de um indivíduo, concebendo, assim, relações de preferências entre mundos. Este é o terceiro nível de preferências.

Ainda analisando sobre a luz dos conceitos da Lógica Proposicional, há em (KACI, 2011) a especificação de uma relação de preferência sobre os conceitos de satisfação de fórmula da Lógica Proposicional. Se φ representa a preferência de um indivíduo, isto diz que o indivíduo em questão prefere mundos/resultados onde há a satisfação de φ e rejeita todos os mundos onde φ não é satisfatível. A preferência sobre φ induz a uma Pré-ordem completa sobre todos os mundos/resultados de forma que :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega' \prec \omega \text{ sse } \omega \models \varphi \text{ e } \omega' \not\models \varphi$$

e

$$\omega \approx \omega' \text{ sse } (\omega \models \varphi \text{ e } \omega' \models \varphi) \text{ ou } (\omega \not\models \varphi \text{ e } \omega' \not\models \varphi)$$

A preferência sobre uma fórmula φ divide o conjunto de resultados/mundos em dois: o conjunto de bons resultados, aqueles onde φ é satisfatível, e o conjunto de maus resultados, aqueles que onde φ não é satisfatível.

Quando a preferência de um indivíduo é especificada em termos de um conjunto de símbolos da Lógica Proposicional, os bons resultados são aqueles onde todas as fórmulas preferíveis são satisfeitas e os maus resultados são aqueles onde falha-se a satisfação de ao menos um componente da fórmula.

Como apresentado anteriormente, as Linguagens Lógicas podem basear-se em métricas quantitativas e qualitativas para expressar as relações de preferência. Em (KACI, 2011), tais métricas são usadas para distinguir os dois tipos de lógicas. As lógicas com pesos e as Lógicas Condicionais. Nas seções a seguir estas serão apresentadas.

3.4 Lógicas Ponderadas

Como apresentado anteriormente, as Lógicas Ponderadas são aquelas cujas relações de preferências são baseadas em valores quantitativos. Tais valores quantitativos são associados através de funções de utilidades, que mapeia o conjunto de resultados a números reais. Ou seja, a função de utilidade assinala valores a cada resultado de modo que aquele resultado preferível é aquele com maior valor associado. Logo, a função de utilidade é uma representação numérica de uma pré-ordem completa que compara todos os possíveis resultados/mundos de acordo com os valores associados. Formalmente , é escrito que:

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \preceq \omega' \text{ sse } u(\omega) \leq u(\omega')$$

onde $u(\omega)$ expressa a utilidade do resultado ω.

A função de utilidade oferece um modo rápido e fácil de comparar resultados deste que os usuários sejam capazes de analisar qual resultado é preferível a outro. Entretanto, este processo pode ser problemático quando há um vasto número de resultados. Indicar valores números numéricos para todos os resultados pode não ser possível, especialmente quando há relações de preferências complexas diante da interação entre as variáveis. Em casos como este, o individuo necessita expressar suas preferências sobre, no mínimo, uma parte significativa dos resultados.

Segundo (KACI, 2011) há diversas abordagens que utilizam os conceitos das Lógicas Ponderadas. São apresentadas sete lógicas que aplicam conceitos ponderados para propor preferência. A primeira apresentada é a Lógica de Penalidades. Esta oferece graus de penalidade aos resultados, onde somente será satisfatível uma fórmula caso a penalidade para estas seja 0. Em seguida apresenta-se a Lógica de Preferência Baseada em Distância Aproximada. Esta estipula os pesos para as relações de preferência baseada na distância de hamming. Dada um resultado preferível, os pesos dos outros resultados são calculados por meio da distância deste, assim, os resultados de menor peso são aquele preferíveis.

A terceira abordagem citada é a Lógica Possibilista. As relações de preferências são baseadas no assinalamento de valores entre 0 e 1 para os resultados, onde aplica-se o valor 1 aos resultados plenamente aceitáveis que devem ser satisfeitos. Qualquer valor diferente de 1 indica uma não aceitação, logo uma não satisfação do resultado. A quarta abordagem apresentada seria a Lógica da Ordenação Lexicográfica e Discriminada, esta opera entre a Lógica de Penalidade e Lógica Possibilista fazendo uso das vantagens de ambas abordagens. Como a Lógica de Penalidade, ela considera como peso 0 os resultados onde a fórmula preferível é satisfatível. Como a Lógica Possibilista, ela considera as fórmulas não satisfatível de acordo com o um valor no intervalo $]0, 1]$.

A Lógica Possibilista Garantida indica um valor quantitativo entre $]0, 1]$ para as fórmulas que são satisfeitas em um dos resultados e 0 às fórmulas que não são satisfeitas por algum resultado. A sexta abordagem apresentada é a Lógica da Escolha Quantitativa $\mathcal{QCL}$. Esta é semelhante à Lógica Possibilista Garantida diante do fato de trabalhar com valores de recompensa entre $]0, 1]$. A $\mathcal{QCL}$ apresenta um novo conector estendido da Lógica Proposicional, denominado por $\hat{\times}$, chamado de disjunção ordenada. As preferências de um indivíduo são representadas por fórmulas do tipo $a_1 \hat{\times} a_2 \hat{\times} \ldots \hat{\times} a_n$, a qual é interpretada como: prefere a_1 mas se a_1 não for possível então prefere a_2. Se ambos a_1 e a_2 não são possíveis então prefere a_3 e assim por diante.

Por fim, na Lógica das Fórmulas Parcialmente Ordenadas é utilizado um conceito de preferências parcialmente ordenadas. Caso o indivíduo não atribua pesos a todos os casos possíveis, ele indica pesos a um pequeno grupo de fórmulas e através destas ele elabora métricas comparativas para as subfórmulas geradas.

Com esta última Lógica conclui-se a apresentação das Lógicas Ponderadas. Na seção a seguir será introduzida as Lógicas Condicionais. Estas serão apresentadas com detalhes em razão da Lógica que este trabalho almeja apresentar conceitua-se em termos deste tipo de abordagem.

3.5 Lógicas Condicionais.

Exprimir a preferência sobre determinado fato pode ser um processo praticado sobre diversos modos. Simples expressões como “Eu gosto de sorvete de chocolate” e “Adoro sorvete de flocos” já indicam a preferência sobre algo, entretanto, quando se analisa preferências almejando escolhas, expressões deste tipo tendem a não contribuir de modo satisfatório. Caso seja oferecido ao indivíduo sorvetes de chocolate e flocos, duvidas tendem a surgir sobre a escolha do mesmo.

Preferências declaradas sobre sentenças comparativas como “ Eu gosto mais de sorvete de chocolate que sorvete de flocos ” e “ Eu prefiro sorvete de flocos a sorvete de morango” são mais propensas em exteriorizar de modo eficiente as preferências de um indivíduo. Estas tendem a ser mais naturais e intuitivas. Por esta razão, estas serão utilizadas neste trabalho para representar a preferência de agentes.

Como apresentado anteriormente neste capítulo, preferências são relações binárias contidas em $\Omega \times \Omega$, onde Ω é o conjunto de fatos, também chamados de resultados, a serem comparados. Expressar a preferência de p sobre q é intuitivamente afirmar a sua escolha entre p e q. Como o apresentado em (HALLDÉN, 1957) e (WON WRIGHT, 1963), este tipo de preferência é interpretada como a preferência de e p e não q ($p \wedge \neg q$) sobre não p e q ($\neg p \wedge q$). Uma observação deve ser feita sobre a validade de p e q. Nesta abordagem não há a análise de que serem válidos ambos p e q é melhor ou pior que a validade de somente um ou de nenhuma. O foco desta abordagem é expressar sentenças binárias comparativas, logo a validade de ambos deve ser tratada como um caso deste tipo.

A tradução de relações do tipo $q < p$ em “ p é preferível a q. ” é comum e usual na literatura. Entretanto, este tipo de tradução é uma simplificação do correto sentido da referida relação. Esta deveria ser traduzida em termos de “ Em condições normais, p é preferível a q. ” Tal expressão não é amplamente utilizada por razões de tornar mais simples a representação das relações. Por este motivo que este tipo de sintaxe é ligado às Lógicas Condicionais.

Deve ser mais familiar ao leitor a representação da Lógica Condicional sobre o contexto de $r : p$ ou $D(r|p)$ afirmando que " se r é verdade, então há p " Veja que a validade de proposição r é imprescindível para a validade de p. No contexto da Lógica de Preferências, segundo (KACI, 2011), $r : p$ ou $D(r|p)$ deve ser visto como " Se r é válido, é verdade preferir p a $\neg p$ ". Caso queira-se expor preferência sobre condições deve-se escrever $r : q < p$ afirmando que " se r é verdade, então eu prefiro p a q ". O exemplo a seguir expõe um caso onde a preferência de um indivíduo é ligado à uma determinada condição.

Exemplo 3.5.1 (Exemplo de preferências sobre condições)**.** *Suponha o seguinte cenário onde um agente queira escolher o prato principal de sua refeição. Este prefere carne a peixe* ($p < c$)*, entretanto se a bebida for vinho tinto, então este prefere peixe a carne* ($vt : c < p$)*. Temos que a bebida da refeição será vinho tinto, logo ele escolhe peixe como prato principal.*

Deve ficar claro ao leitor que os termos condicionais ficam implícitos nas relações de preferências usuais apresentadas até este momento. De fato, todas possuem um caráter condicional, entretanto quando estes não forem relevantes para a relação de preferência, ficarão implícitos. Apresentados os conceitos da Lógica Condicional para Preferências, serão conceituadas as cinco semânticas de preferências consideradas referenciais na literatura segundo (KACI, 2011).

Definição 3.5.1 (Semânticas de Preferências)**.** *Considere como* $q < p$ *a sentença comparativa de preferência em questão.*

- **Semântica Strong** *: Qualquer resultado* ($p \wedge \neg q$) *é preferível a qualquer resultado com* ($q \wedge \neg p$)*.*
- **Semântica Ceteris paribus***: Qualquer resultado* ($p \wedge \neg q$) *é preferível a qualquer resultado* ($q \wedge \neg p$) *se os dois resultados possuem as mesmas valorações sobre as variáveis que não aparecem em* ($p \wedge \neg q$) *e* ($q \wedge \neg p$)*.*
- **Semântica Otimista** *Qualquer melhor resultado* ($p \wedge \neg q$) *é preferível a qualquer melhor resultado* ($q \wedge \neg p$)*.*
- **Semântica Pessimista** *Qualquer pior resultado* ($p \wedge \neg q$) *é preferível a qualquer pior resultado* ($q \wedge \neg p$)*. .*
- **Semântica Oportunista** *Qualquer melhor resultado* ($p \wedge \neg q$) *é preferível a qualquer pior resultado* ($q \wedge \neg p$)*.*

A notação $q <_{st} p$, $q <_{cp} p$, $q <_{opt} p$, $q <_{pes} p$, $q <_{opp} p$, expressa " p preferível a q " seguindo a semântica strong, ceteris paribus, otimista, pessimista e oportunista respectivamente.

Segundo (KACI, 2011) estas semânticas contemplam praticamente todas as possibilidades possíveis de análise de uma relação de preferência binária. A proposição

3.5.1 a seguir almeja tornar mais claro o compreendimento de cada uma destas semânticas. Para a elaboração desta proposição necessita-se a definição dos conceitos de maximal e mininal. Estes serão conceituados na definição a seguir.

Definição 3.5.2 (Definição Específica de Maximal e Mininal)**.** *Considere com $\mathcal{O}$ o conjunto de objetos a serem comparados e $\preceq$ uma relação de preferência binária. Dizemos que o objeto* o *domina o objeto* o*', onde $\mathsf{o}, \mathsf{o}' \in \mathcal{O}$, se $\mathsf{o}' \prec \mathsf{o}$. O conjunto de objetos não dominados ou melhores é o conjunto $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, denominado $max(\mathcal{O}', \preceq)$, o qual é definido como:*

$$max(\mathcal{O}', \preceq) = \{\mathsf{o}|\mathsf{o} \in \mathcal{O}',\ \textit{não existe } \mathsf{o}' \in \mathcal{O}', \mathsf{o} \prec \mathsf{o}'\}$$

O conjunto de piores objetos $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$, denominado por $min(\mathcal{O}', \preceq)$ é definido como:

$$min(\mathcal{O}', \preceq) = \{\mathsf{o}|\mathsf{o} \in \mathcal{O}',\ \textit{não existe } \mathsf{o}' \in \mathcal{O}', \mathsf{o}' \prec \mathsf{o}\}$$

Proposição 3.5.1. *Considere $\preceq$ como uma relação de preferência. Seja $q \lhd p$ um termo comparativo de preferência, onde $\lhd \in \{<_{st}, <_{cp}, <_{opt}, <_{pes}, <_{opp}\}$.*

- *$\preceq$ satisfaz $q <_{st} p$, denominado como $\preceq \models q <_{st} p$ sse para todo $\omega \in min(p \wedge \neg q, \preceq), \forall \omega' \in max(q \wedge \neg p, \preceq), \omega' \preceq \omega$.*
- *$\preceq$ satisfaz $q <_{cp} p$, denominado como $\preceq \models q <_{cp} p$ sse para todo $\omega \in min(p \wedge \neg q, \preceq)\forall \omega' \in max(q \wedge \neg p, \preceq), \omega' \preceq \omega$ se ω e ω' possuem as mesmas valorações sobre as variáveis que não aparecem em $p \wedge \neg q$ e $q \wedge \neg p$.*
- *$\preceq$ satisfaz $q <_{opt} p$, denominado como $\preceq \models q <_{opt} p$ sse para todo $\omega \in max(p \wedge \neg q, \preceq), \forall \omega' \in max(q \wedge \neg p, \preceq), \omega' \preceq \omega$.*
- *$\preceq$ satisfaz $q <_{pes} p$, denominado como $\preceq \models q <_{pes} p$ sse para todo $\omega \in min(p \wedge \neg q, \preceq)\forall \omega' \in min(q \wedge \neg p, \preceq), \omega' \preceq \omega$.*
- *$\preceq$ satisfaz $q <_{opp} p$, denominado como $\preceq \models q <_{opp} p$ sse para todo $\omega \in max(p \wedge \neg q, \preceq), \forall \omega' \in min(q \wedge \neg p, \preceq), \omega' \preceq \omega$.*

Definidas as cinco semânticas para uma relação de preferência binária, chamaremos de um *conjunto sentenças comparativas de preferências* o conjunto $\mathscr{P}_{\lhd} = \{q_i \lhd p_i | \lhd \in \{<_{st}, <_{cp}, <_{opt}, <_{pes}, <_{opp}\}\}$. Uma relação de preferência é um *modelo* sobre $\mathscr{P}_{\lhd}$ se e somente se este satisfaz cada sentença comparativa de preferência $q_i \lhd p_i$ em $\mathscr{P}_{\lhd}$. Um conjunto de $\mathscr{P}_{\lhd}$ é consistente se e somente se este possui um modelo. Por um abuso de linguagem, dada uma sentença comparativa de preferência $q_i \lhd p_i$, dizemos que um resultado-$(p \wedge \neg q)$ satisfaz $q \lhd p$ e um que resultado-$(q \wedge \neg p)$ não satisfaz $q \lhd p$, deste de que estes sejam compostos por uma das semânticas apresentadas.

Com isto, conclui-se a apresentação dos componentes gerais das Lógicas de Preferências. Isto foi feito através de uma visão panorâmica dos diferentes partes que compõem as linguagens de representação de preferências. Foi apresentado diferentes modos de se apresentar preferências sobre determinado fato, o qual foi exposto de modo natural e de acordo com sintaxe natural de uma relação binária de preferências.

As Lógicas Condicionais obtiveram uma grau de importância maior devido à capacidade de expressar com naturalidade o raciocínio padrão do que seria uma relação de preferência. Esta é capaz de prover uma representação lógica de preferências através de componentes simples da Lógica Proposicional. Através destes, a abordagem em questão fez uso do seus conceitos na Lógica proposta neste trabalho.

3.6 Trabalhos Relacionados

No decorrer do século XX diversos estudos emergiram baseados nos conceitos apresentados em (HALLDÉN, 1957) e (WON WRIGHT, 1963). Uma atenção especial deve ser oferecida à (KRAUS; LEHMANN; MAGIDOR, 1990). Neste trabalho foi desenvolvida uma abordagem chamada de framework KLM, o qual foi desenvolvido com o objetivo de expor um modelo e uma linguagem capaz de propor um contexto de análise de preferência para proposicionais básicos. Basicamente durante o trabalho ele explica os detalhes que cercam o framework KLM e o compara com as cinco principais abordagens existentes na literatura para sistemas comparativos, os quais visam expressar a preferência sobre proposicionais básicos.

Para (KRAUS; LEHMANN; MAGIDOR, 1990), estas abordagens iniciais são o primeiro ensaio de um sistema comparativo para simular preferências. Para o trabalho referenciado, há quatro modelos de Lógicas de Preferências. Estas são: Acumulativa (C), Loop-acumulativa (CL), Preferencial (P) e Racional (R). De um ponto de vista semântico, a cada lógica (C, CL, P, R) corresponde um tipo de modelo, ou seja, uma classe de estruturas possível do mundo, equipados com uma relação de preferência entre os mundos ou estados. De forma resumida, cada uma difere basicamente pelo tipo de relação de preferência que assume no seu modelos, ou sejam, para algumas abordagens, foi utilizado um relação irreflexiva e transitiva, para outras, uma relação de equivalência, e assim por diante.

Segundo (GIORDANO; GLIOZZI; OLIVETTI; POZZATO, 2005), o framework KLM mostrou-se de grande significância acadêmica aos estudos ligados à Lógica de Preferências. A sintaxe desenvolvida neste trabalho foi utilizada como base para a construção dos trabalhos que se seguiram. Dentre as diversos estudos realizados, iremos concentrar a nossa atenção nos trabalhos que fazem uso de operadores de modalidades e agrega preferências em ambientes multiagentes.

A seguir serão expostas as abordagens usuais que fazem uso dos conceitos ligados à Lógica Modal proposta em (KRIPKE, 1963) para representar preferências.

3.6.1 Lógica Modal de Preferências

A primeira Lógica de Preferências a utilizar a Lógica Modal foi definida em (BOUTILIER, 1994). O objetivo desta era propor uma lógica capaz de representar e raciocinar com declarações qualitativas de preferência e descrever a forma como estes podem interagir na tomada de decisão. Para tal, foi elaborada uma lógica que utiliza os elementos básicos da teoria da decisão, como probabilidades e funções de utilidade, para, deste modo, apresentar uma informação qualitativa sobre os atributos de preferência e assim apresentar uma tomada de decisão de acordo com suas metas.

O uso das modalidades fez-se simplesmente para uma análise dos mundos possíveis através dos dois operadores modais básicos junto aos conceitos relacionados à Lógica Condicional. Esta ficou restrita a sintaxe usual definida em (KRIPKE, 1963). A definição a seguir apresenta o modelo apresentado para a Lógica.

Definição 3.6.1 (Modelo da Lógica Proposta em (BOUTILIER, 1994))**.** *O Modelo $\mathfrak{M}$ para esta lógica são tuplas do tipo:*

$$\mathfrak{M} = \langle W, \leq, V \rangle$$

onde W é o conjunto de mundos possíveis, $\leq$ é uma relação binária transitiva sobre W. Ou seja, $\leq$ é uma pré-ordem total sobre W. Por fim, V é a função de valoração. Uma observação deve ser feita sobre a relação de preferência estrita $<$. Esta é definida sobre $\leq$ de modo que $(w < v) := (w \leq v)$ e $\neg(v \leq w)$.

Este é o modelo mais simples utilizado para expressar preferências sobre os conceitos ligados à Lógica Modal. As definições a seguir expõe a sintaxe e a semântica desta lógica.

Definição 3.6.2 (Sintaxe da Lógica Proposta em (BOUTILIER, 1994))**.** *A linguagem consiste em um conjunto de símbolos proposicionais $PROP$, os conectivos da lógica clássica "$\neg$", "$\vee$" e os operadores modais $\Box$ e $\overleftarrow{\Box}$. A linguagem desta lógica foi definida da seguinte maneira usando a notação de Backus-Naur:*

$$\varphi \quad ::= \quad p \ \mid \ \bot \ \mid \ \psi \vee \varphi \ \mid \ \neg\varphi \ \mid \ \Box\varphi \ \mid \ \overleftarrow{\Box}\,\varphi$$

onde p é um símbolo proposicional tal que $p \in PROP$, $\bot$ representa o absurdo,$\neg\varphi$ é a negação de uma fórmula, $\psi \vee \varphi$ simboliza a disjunção usual da lógica clássica, $\Box\varphi$ é lido como o " necessariamente " φ e $\overleftarrow{\Box}\,\varphi$ é lido como o " necessariamente estrito " φ. Deve-se salientar que $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$ e $\overleftarrow{\Diamond}\,\varphi \leftrightarrow \neg\,\overleftarrow{\Box}\,\neg\varphi$.

Definição 3.6.3 (Semântica da lógica proposta por (BOUTILIER, 1994))**.** *Dado um modelo $\mathfrak{M}$, a semântica da lógica é definida do seguinte modo :*

(i)	$\mathfrak{M}, w \models p$	*sse*	$w \in V(p)$
(ii)	$\mathfrak{M}, w \not\models \bot$		
(iii)	$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$	*sse*	*não* $\mathfrak{M}, w \models \varphi$
(iv)	$\mathfrak{M}, w \models \psi \vee \varphi$	*sse*	$\mathfrak{M}, w \models \psi$ *ou* $\mathfrak{M}, w \models \varphi$
(v)	$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$	*sse*	$\mathfrak{M}, v \models \varphi$ *para todo* $v \in W$ *e* $w \leq v$
(vi)	$\mathfrak{M}, w \models \overleftarrow{\Box}\,\varphi$	*sse*	$\mathfrak{M}, v \models \varphi$ *para todo* $v \in W$ *e* $w < v$

As satisfações propostas nos itens $(i) - (iv)$ *seguem o usual da lógica modal apresentado anteriormente. O operador em* (v) *afirma que para todo mundo melhor ou igual ao mundo atual vale* φ*. Por fim, operador* (vi) *afirma que para todo mundo estritamente melhor que o mundo atual vale* φ*.*

Percebe-se que a lógica proposta por (BOUTILIER, 1994) apenas se preocupava em expor preferência visando tratar a problemas ligados a teoria da decisão sobre conceitos quantitativos. Não abordando conceitos multiagentes ou sobre vários critérios.

3.6.2 Lógica Modal Multiagente com Preferências

Após o (BOUTILIER, 1994) outras lógicas surgiram baseada em expor preferências. Merece destaque a abordagem apresentada em (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005). Neste foi criado o modelo básico de Lógica Modal para Preferências. Este trabalho tinha como objetivo mostrar como a Lógica de Preferências através de operadores modais específicos são capazes para determinar o Equilíbrio de Nash em jogos estratégicos, bem como a indução retroativa para a solução de jogos finitos. Assim, se fez necessário um modelo capaz de tratar preferências entre mundos específicos para cada agente.

A definição a seguir apresenta o considerado Modelo básico de preferências de acordo com (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005). Este é semelhante ao proposto na definição 3.6.1, entretanto é rotulado ao agente.

Definição 3.6.4 (Modelo da Lógica Modal Básica de Preferências)**.** *A estrutura básica de um Modelo para a Lógica de Preferências segue o seguinte formato:*

$$\mathfrak{M} = (W, A, \{\preccurlyeq_\alpha\}_{\alpha \in A}, V)$$

onde W *é um conjunto de mundos,* A *é um conjunto de agente, o* $\preccurlyeq_\alpha$ *é uma relação reflexiva e transitiva, e* V *é uma função de valoração sobre os proposicionais. Foi escolhido para* $\preccurlyeq_\alpha$ *ser uma pré-ordem.*

Definido o modelo para a Lógica Modal básica, as definições a seguir apresentam a linguagem e a semântica para a lógica proposta em (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005).

Definição 3.6.5 (Linguagem da Lógica Modal básica para Preferências.)**.** *A linguagem básica segue o seguinte formato Backus-Naur:*

$$\varphi := p \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Diamond_\alpha \varphi \mid E\varphi$$

onde p é um símbolo proposicional tal que $p \in PROP$, $\bot$ representa o absurdo,$\neg\varphi$ é a negação de uma fórmula, $\psi \vee \varphi$ simboliza a disjunção usual da lógica clássica, $\Diamond_\alpha\varphi$ é o operador modal de preferência. A fórmula $E\varphi$ é o operador existências usual. A modalidade universal $U\varphi$ é definida como $\neg E \neg\varphi$.

Definição 3.6.6 (Semântica para a Lógica Modal Básica para Preferências)**.** *Dado o modelo $\mathfrak{M}$ apresentado na definição 3.6.4, semântica da lógica é definida do seguinte modo :*

$$\begin{array}{lll} \textit{(i)} & \mathfrak{M}, w \models p & \textit{sse} \quad w \in V(p) \\ \textit{(ii)} & \mathfrak{M}, w \not\models \bot & \\ \textit{(iii)} & \mathfrak{M}, w \models \neg\varphi & \textit{sse} \quad \textit{não}\ \mathfrak{M}, w \models \varphi \\ \textit{(iv)} & \mathfrak{M}, w \models \psi \vee \varphi & \textit{sse} \quad \mathfrak{M}, w \models \psi\ \textit{ou}\ \mathfrak{M}, w \models \varphi \\ \textit{(v)} & \mathfrak{M}, w \models \Diamond_\alpha\varphi & \textit{sse} \quad \exists w'\ \textit{tal que}\ w \preccurlyeq_\alpha w'\ \textit{e}\ \mathfrak{M}, w' \models \varphi. \\ \textit{(vi)} & \mathfrak{M}, w \models E\varphi & \textit{sse} \quad \exists w'\ \textit{tal que}\ \mathfrak{M}, w' \models \varphi. \end{array}$$

As satisfações propostas nos itens $(i) - (iv)$ seguem o usual da lógica modal apresentado anteriormente. O operador em (v) afirma que existe um mundo melhor ou igual ao mundo atual vale φ. Por fim, em (vi) temos o operador existencial.

O diferencial desta abordagem é o operador que φ é verdade em ao menos em um mundo tão bom quanto o mundo atual segundo as preferências do agente α. Como na Lógica Modal usual onde é feita uma análise da satisfação das fórmulas ao nível dos mundo, a modalidade de preferência proposicional na linguagem necessita de uma relação de ordem dos mundos preferíveis para que a semântica do operador esteja correta.

A grande contribuição de (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005) foi a elaboração das modalidades globais de preferência sobre proposições. O intuição desta era restringir mundos de acordo com a validade de certas fórmulas. Como o escopo da lógica referenciada era propor decisões para agentes em um modelo de jogo condicional, era imprescindível uma modalidade que avaliasse fórmulas sobre o contexto condicional. O operador de modalidade global sobre preferências é definido como :

$$\varphi \leq^i_{\forall\exists} \psi \Leftrightarrow U(\varphi \rightarrow \Diamond_i \psi)$$

Este operador foi analisado como uma restrição $\forall\exists$ sobre os mundos. Somente este foi apresentado na lógica questão, pois referia-se à uma necessidade notória da abordagem. De fato, também há a citação das outras três combinações, $\forall\forall$, $\exists\forall$ e $\exists\exists$, de análise dos mundos de acordo com as fórmulas, entretanto, diante na irrelevância para a abordagem, não há uma definição explícita do caso.

Em (VAN OTTERLOO, 2005) há a elaboração de uma lógica para avaliar estratégias individuais em ambientes de interação multiagente. Este baseia-se na lógica elaborar em (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005) para avaliar diversos protocolos para estratégias fundamentado em preferências. O trabalho em questão define o ambiente como um jogo, onde os mundos indicam ações, logo se faz necessário avaliar os mundos de acordo com as preferências dos envolvidos. Para tal, há a conceituação do operador modal : $\varphi\langle Pref\rangle\psi$ que diz "Existe um φ no mundo x e um ψ no mundo y tal que $(x, y) \in R$." Onde $(x, y) \in R$ expressa que o mundo x é tão bom ou melhor que o mundo y.

Para a correta atuação do operador modal sugerido, (VAN OTTERLOO, 2005) propõe um *Modelo de Preferências* baseado em um *Modelo Minimal* também sugerido pelo mesmo. As definições a seguir apresentam os modelos citados.

Definição 3.6.7 (Frame Reflexivo)**.** *Um Frame Reflexivo* $\mathfrak{F}$ *é uma tupla:*

$$\mathfrak{F} = (W, \Sigma, \{\preceq_X\})$$

onde W *é um conjunto de resultados,* Σ *é um conjunto finito de agentes e* $\preceq_X \subseteq W \times W$ *é uma relação reflexiva entre mundos para cada agente* X *de* Σ*.*

Definição 3.6.8 (Modelo de Preferência Minimal)**.** *Um Modelo de Preferência Minimal* $\mathcal{M}$ *é uma tupla do tipo:*

$$\mathcal{M} = (W, \Sigma, \{\preceq_X\}, P, \pi)$$

onde $(W, \Sigma, \{\preceq_X\})$ *é um um Frame Reflexivo,* P *é um conjunto finito de proposicionais atômicos e* $\pi : W \to 2^P$ *é uma função que assinala proposições aos resultados.*

Definição 3.6.9 (Modelo de Preferências)**.** *Um modelo de preferências* $\mathfrak{M}$ *é um modelo minimal* $\mathcal{M} = (W, \Sigma, \{\preceq_X\}, P, \pi)$ *onde a relação* $\preceq_X \subseteq W \times W$ *é uma relação total e estrita-transitiva.*

De posse do modelos de preferências apresentado na definição 3.6.9, será apresentando a seguir a semântica da lógica apresentado em (VAN OTTERLOO, 2005). Antes será exposta a definição que indica a linguagem da lógica em questão.

Definição 3.6.10 (Linguagem de Lógica apresentada em (VAN OTTERLOO, 2005))**.** *A linguagem básica da lógica no formato Backus-Naur:*

$$\varphi, \psi := p \mid \perp \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \, \langle Pref\rangle_X \, \psi.$$

onde p *é um símbolo proposicional tal que* $p \in PROP$*,* $\perp$ *representa o absurdo,* $\neg$ *é o operador de negação de uma fórmula,* $\vee$ *é a disjunção da lógica clássica e* $\varphi\langle Pref\rangle\psi$ *é o operador modal da lógica.*

Definição 3.6.11 (Semântica da lógica proposta em (VAN OTTERLOO, 2005))**.** *Dado o modelo $\mathfrak{M}$ definido em 3.6.9, a semântica da lógica é definida do seguinte modo:*

(i)	$\mathfrak{M}, w \models p$	*sse*	$w \in \pi(p)$
(ii)	$\mathfrak{M}, w \not\models \bot$		
(iii)	$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$	*sse*	*não* $\mathfrak{M}, w \models \varphi$
(iv)	$\mathfrak{M}, w \models \psi \vee \varphi$	*sse*	$\mathfrak{M}, w \models \psi$ *ou* $\mathfrak{M}, w \models \varphi$
(v)	$\mathfrak{M}, w \models \varphi\langle Pref\rangle_X\psi$	*sse*	*existe* $(w', w'') \in \preceq_X$ *tal que* $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ *e* $\mathfrak{M}, w'' \models \psi$.

As satisfações propostas nos itens $(i) - (iv)$ *seguem o usual da lógica modal apresentado anteriormente. O operador em* (v) *afirma que existe um mundo melhor ou igual, onde vale* ψ*, ao mundo atual onde vale* φ*.*

(VAN OTTERLOO, 2005) apresenta outros três operadores baseando nas definições apresentadas anteriormente, estes são:

$$E_X\varphi \stackrel{def}{=} \varphi\langle Pref\rangle_X\varphi$$

$$A_X\varphi \stackrel{def}{=} \neg E_X\neg\varphi$$

$$\varphi[Pref]_X\psi \stackrel{def}{=} \neg(\psi\langle Pref\rangle_X\varphi)$$

Podemos pensar em $\varphi[Pref]_X\psi$ afirmando que φ é estritamente preferível pelo agente X que ψ. Para a abordagem este indica uma quantificação universal: este refere-se a todos os estados que satisfazem φ e todos estados que satisfazem ψ. O dual deste operador é $\varphi\langle Pref\rangle_X\psi$, que afirma que é possível um mundo que vale φ tão bom quanto um mundo que vale ψ. $E_X\varphi$ diz que existe um mundo que φ vale, enquanto $A_X\varphi$ diz que φ vale para todo mundo acessível.

Aperfeiçoando os trabalhos de (VAN BENTHEM; VAN OTTERLOO; ROY, 2005) e (BOUTILIER, 1994) Patrick Girard propôs em (GIRARD, 2008) uma Lógica Modal capaz de representar dois níveis de preferência estrita e indiferença. Esta foi chamada de *Order Logic*. Basicamente ela adicionou estes dois níveis de preferência aos conceitos anteriormente definidos.

Uma observação deve ser feita sobre a *Order Logic* diante do fato desta ser a base para a lógica criada posteriormente pelo mesmo autor. Esta será a referência comparativa para a nossa abordagem, visto que a mesma foi utilizada como inspiração na elaboração da estrutura de agregação de preferências.

Definição 3.6.12 (Modelo da Order Logic)**.** *Um modelo da Order Logic* $\mathfrak{M}$ *é uma tupla do tipo:*

$$\mathfrak{M} = (W, \preceq, V)$$

onde W é um conjunto de estados, $\preceq$ é uma relação reflexiva e transitiva (pré-ordem) e V é a valoração padrão sobre os proposicionais. A subrelação estrita $\prec$ é definida em termos da relação $\preceq$: $w_1 \prec w_2 := w_1 \preceq w_2$ e não $w_2 \preceq w_1$. Um ponto neste modelo é o par $(\mathfrak{M}, w)$ onde $w \in W$.

De posse do modelo para a *Order Logic*, serão expostos a seguir a linguagem desta lógica e a semântica da mesma. Como citada anteriormente, o diferencial desta foi a capacidade de tratar preferências estritas.

Definição 3.6.13 (Linguagem e Semântica)**.** *A linguagem básica segue o seguinte formato Backus-Naur:*

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \psi \mid \Diamond^{\preceq}\varphi \mid \Diamond^{\prec}\varphi \mid E\varphi.$$

onde W é o conjunto de mundos possíveis, $\leq$ é uma relação binária transitiva sobre W. Ou seja, $\leq$ é uma pré-ordem total sobre W. Por fim, V é a função de valoração. Uma observação deve ser feita sobre a relação de preferência estrita $<$. Esta é definida sobre $\leq$ de modo que $(w < v) := (w \leq v)$ e $\neg(v \leq w)$.

A semântica desta linguagem segue um padrão definido anteriormente para a Lógica Epistêmica. O seu diferencial foi através nas seguintes cláusulas:

(i)	$\mathfrak{M}, w \models \Diamond^{\preceq}\varphi$	*sse*	$\exists w'$ *tal que* $w \preceq w'$ *e* $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$
(ii)	$\mathfrak{M}, w \models \Diamond^{\prec}\varphi$	*sse*	$\exists w'$ *tal que* $w \prec w'$ *e* $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$
(iii)	$\mathfrak{M}, w \models E\varphi$	*sse*	$\exists w'$ *tal que* $\mathfrak{M}, w' \models \varphi$.

As clausulas (i) e (ii) mostram a satisfação envolvendo a preferência usual e a preferência estrita, respectivamente. A cláusula (iii) trata simplesmente do operador modal usual de possibilidade.

Uma observação deve ser feita no fato de esta lógica não possuir um estrutura adequada aos ambientes multiagente. De fato, as abordagens apresentadas anteriormente possuíam uma sintaxe que amparava a necessidade de diferentes agentes no ambiente, contudo esta queria apresentar o diferencial dos dois níveis possíveis de preferência como sua distinção às demais.

Aperfeiçoando a *Order Logic*, o autor também apresenta em (GIRARD, 2008) a *Ceteris Paribus Logic* que aplica os conceitos de multiagente àqueles apresentados na *Order Logic*. Por fim, ainda em (GIRARD, 2008), há a apresentação da *Group Order Logic*. Esta possui os conceitos necessários para expressar os níveis de preferências conceituados na *Order Logic*, como também resolve a necessidade de exprimir grupos de agentes e agrega as preferências dos mesmos. Para tal, este usa a linguagem de agregação apresentada em (ANDRÉKA; RYAN; SHOBBENS, 2002).

Com a exposição da *Order Logic* encerram-se as apresentações das lógicas que tratam preferências relevantes para a nossa abordagem. O capítulo a seguir apresentar as

Lógicas com Agregação de Preferências. Estas possuem a sintaxe e semântica semelhantes às lógicas apresentadas neste capítulo, entretanto possuem estruturas específicas capazes de agregar as preferências de vários agentes.

4 LÓGICAS COM AGREGAÇÃO DE PREFERÊNCIAS

Neste capítulo vamos apresentar os primeiros trabalhos que envolveram a Lógica de Agregação de Preferências e a sua evolução até a abordagem exposta em (GIRARD, 2008). Em um primeiro momento será feita um pequena introdução sobre os conceitos relacionados à agregação de preferências. Após serão apresentados trabalhos cujo escopo trata-se de expressar lógicas matemáticas com tal funcionalidade. Por fim, na terceira seção, será exposto o trabalho do pesquisador Patrick Girard, o qual foi utilizado como inspiração para a criação da nossa lógica.

4.1 Introdução

Agregar informações é visto como o processo de juntar ou misturar dados de forma a torná-los compreensíveis através de valores representativos concretos. Segundo (BELIAKOV ; PRADERA; CALVO, 2007), o estudo de métodos e abordagens que tratem de formas eficientes de realizar tal processo emergiu como uma importante área de estudo nas últimas décadas. Tal fato se explica pela grande quantidade de aplicações, estas não somente nas áreas ligadas a Matemática e Ciências da Computação, como também em estudos ligados à Economia e Ciências Sociais como o exposto em (PATTY; PENN, 2015).

Em (BELIAKOV ; PRADERA; CALVO, 2007) e (RIERA; TORRENS, 2014) o processo de fusão de dados em um resultado representativo é usualmente chamado de funções de agregação. Estas tornaram-se ferramentas indispensáveis em abordagens que tratam da tomada de decisão, avaliações subjetivas, otimização e sistemas de controle. Estes tratam de funções de agregação tanto a nível quantitativo quanto qualitativo, expressando a complexidade de tratar estas informações de modo eficiente.

Há em (BELIAKOV ; PRADERA; CALVO, 2007) diversas técnicas de elaboração destas funções de agregação diante dos múltiplos modos de expressar estes dados. Para o trabalho referenciado, uma função de agregação seria definida, sobre aspectos gerais, como funções com propriedades especiais. Estas funções fazem uso de argumentos reais em um intervalo fechado $[0, 1]$ e produziram um valor em $[0, 1]$. Ou seja, $f : [0, 1]^n \Rightarrow [0, 1]$ para funções que usam argumentos com n componentes.

De fato, o modelo da função de agregação de cada abordagem possui peculiaridades específicas, estas são atribuídas ao modo como os dados estão representados. O caráter destas funções baseiam-se no formato dos dados e como o resultado final deve ser apresentado. Segundo (PATTY; PENN, 2015), o processo de agregação baseia-se em por em contraste e combinar dois ou mais fatores ou critérios de modo a produzir uma avaliação, predição ou prescrição .

A aplicação da função de agregação pode emergir em diversos momentos da abordagem diante das peculiaridades da mesmo. Considerando ambientes onde os dados são representados sobre diversos critérios, ou seja, ambientes multicritérios, a função de agregação deve analisar cada um destes critérios para, assim, expressar um valor representativo quando estes são analisados concomitantemente.

Outro nível de aplicação das funções de agregação seriam em abordagens que tratam de múltiplos agentes. Neste ambientes se faz necessário analisar os dados de cada um dos envolvidos para, assim, expor um resultado representativo para o grupo. Tal linha de raciocínio assemelha-se ao apresentado no parágrafo anterior, considerando os agentes como os múltiplos critérios.

Há também abordagens onde se faz necessário uma dupla aplicação de uma função de agregação. Em um primeiro momento necessita-se agregar os múltiplos critérios sobre os quais os dados estão formulados, seguindo de uma agregação dos dados de cada um dos agentes. Estas são as abordagens de agregação multicritério em ambientes multiagentes.

Independente do dados a serem agregados, o processo de agregação pode gerar certos problemas. Destaca-se, como apresentado em (PATTY; PENN, 2015), o "Paradoxo de Condorcet". Basicamente este refere-se ao problemas de ciclos que podem surgir durante o processo de agregação. Por exemplo, considere três agentes que devem escolher sobre três opções A, B e C. Considere que o primeiro agentes prefere a opção A seguida da opção B e, por fim, a opção C, ou seja, $A >_1 B >_1 C$. Já o segundo agente possui a seguinte preferência $B >_2 C >_2 A$ e o terceiro agente $C >_3 A >_3 B$. Percebe-se que ao agregar as preferências dos três agentes, nada pode-se concluir sobre as opções analisadas.

Tal problema conduziu a elaboração em (ARROW, 1951) do Teorema da Impossibilidade de Arrow. Este afirmava que a agregação das racionalidades individuais não produz uma racionalidade coletiva. Para garantir a veracidade do processo de agregação, Arrow afirmava certos postulados deveriam ser obedecidos.

Segundo (PATTY; PENN, 2015), o teorema de Impossibilidade de Arrow era baseado em quatro axiomas sobre os quais qualquer processo de agregação deveria ser baseado para ser considerado eficiente. Este serão apresentados a seguir:

- O primeiro determinava que o sistema não poderia ser ditatorial. A função de agregação deve considerar as preferências de múltiplos participantes e não somente de um.
- O segundo afirmava que o domínio deveria ser irrestrito. A função de agregação deve ser definida para qualquer conjunto de preferências.
- O terceiro apontava sobre a independência das alternativas irrelevantes. Esta afirmava que a função de agregação deveria fornecer a mesma avaliação tanto para um subconjunto de preferências quanto para o conjunto completo das mesmas. Ou seja, mudanças das preferências sob as alternativas irrelevantes, isto é, aquelas que estão fora do conjunto de análise, não deveriam impactar na preferência sobre o conjunto em questão.

- O quarto axioma afirmava sobre a unanimidade. Se todos participantes preferem uma certa alternativa a outra, então esta deve ser a preferência do grupo.

Alguns autores apontam sobre um quinto axioma que seriam o próprio resultado teorema de impossibilidade, este afirmava que não não há, nem nunca poderá ser criado, nenhuma regra de escolha/agregação de um grupo de agentes que satisfaça todo os axiomas.

Tais problemas e axiomas serão avaliados no decorrer do capítulo almejando garantir a eficiência da nossa abordagem. Tanto em nível de análise dos múltiplos critérios como a nível do grupo de agentes, pois a lógica que este trabalho almeja apresenta estes dois níveis de agregação.

As seções a seguir apresentam abordagens que fazem uso de conceitos ligados à Lógica Matemática para promover a agregação de preferências em ambientes multiagentes. Em um primeiro momento, serão expostos os conceitos necessários para a agregação de preferências e, assim, estabelecer a *Group Order Logic*. Tais conceitos serão aplicados à uma Lógica Modal com agregação de preferências para ambientes multiagentes.

4.2 Lógica Multiagentes com Agregação de Preferências

Analisar as preferências dos agentes e agregá-los para expor algo que demonstre os anseios de um grupo é um processo oneroso e de grande complexidade. Há na literatura diversos trabalhos que pretendem evidenciar métodos de agregar preferências, os quais necessitam ser corretos e justos para todos os agentes envolvidos na análise.

Motivado em expor uma lógica capaz de expressar as preferências de um grupo de agentes, foi desenvolvido em (GIRARD, 2008) a *Group Order Logic*. Esta faz uso de técnicas específicas para criar uma lógica que ordene grupos de agentes.

Esta *Group Order Logic* foi elaborada por meio de uma motivação das limitações da *Order Logic*. Como apresentado na seção anterior, a lógica tratava da análise das preferências sem determinar os agentes envolvidos . A *Group Order Logic* tornou-se uma evolução por tratar as preferências em ambientes multiagentes. Tal progresso somente foi capaz por meio de funcionalidades capazes de ordenar os agentes e agregar as preferências destes de acordo com restrições definidas.

Dentre estes vários trabalhos, foi empregado na *Group Order Logic* o modelo definido em (ANDRÉKA; RYAN; SHOBBENS, 2002). Este utiliza, para agregar as preferências, uma generalização das regras de ordenação lexicográfica para a combinação de relações ordenadas. Estas regras são criadas por meio de uma análise prioritária de cada agente envolvido na agregação.

Definição 4.2.1 (Ordem Lexicografia)**.** *Uma ordem lexicográfica, também conhecida como ordem do dicionário ou ordem alfabética, é uma estrutura de ordem natural do produto* *cartesiano de dois conjuntos ordenados. Dados dois conjuntos parcialmente ordenados A e B, a ordem lexicográfica sobre o produto cartesiano $A \times B$ é definida como $(a, b) \preceq (a', b')$ se e somente se $a \prec a'$ ou $(a = a'$ e $b \preceq b')$. O resultado é uma ordem parcial. Se A e B são totalmente ordenados, então o resultado é uma ordem total.*

Os grupos de agentes são analisados através de uma ordem pré-definida e a agregação ocorre por meio de um processo compensatório que visa ser justo e democrático. Se cada membro do grupo opta pela opção x então x é a preferência do grupo, entretanto caso o grupo não concorde em uma opção x estes corroboram para as preferências dos agentes mais influentes.

As duas ferramentas fundamentais utilizadas para a agregação de preferências são os grafos de prioridade e o operador de prioridade. O grafo de prioridade impõe a hierarquia entre os agentes e o operador de prioridade faz o mapeamento das relações de preferência dos agentes em uma única relação lexicográfica, este seguindo a hierarquia fornecida pelo grafo de prioridade.

Definição 4.2.2 (Grafo de Prioridade)**.** *Seja X um conjunto de variáveis. Um grafo de prioridade é uma tupla $G = (A, <, V)$ onde A é um conjunto de agentes, $<$ é uma relação parcial estrita de ordem sobre A, e V é uma função $V : A \to X$*

O uso de variáveis nos grafos de prioridade foi motivado por dois motivos. O Primeiro é pela circunstância de os agentes serem identificados com a ordem definida pelo grafo. Dois agentes que estabelecem a mesma ordem sobre os mundos possíveis podem ser identificados por uma mesma variável em um grafo de prioridade. Deste modo, são evitadas redundâncias nos grafos de prioridade. O segundo motivo é pela possibilidade de uma variável ocorrer várias vezes em um grafo. Pode ocorrer de um agente em um momento ser hierarquicamente superior aos outros e em uma segunda análise ser dominado por um agente que possua um valor hierárquico superior a ele.

A definição a seguir apresenta o comportamento do operador de prioridade. Esta relação comporta-se através das variáveis que rotulam agentes definidos no grafo. Deve ficar claro ao leitor que a função $V(\sigma)$ é o assinalamento destas variáveis aos agentes ordenados pelo grafo. A definição a seguir expressa a preferência entre dois mundos de acordo com o grafo de prioridade.

Definição 4.2.3 (Operador de Prioridade)**.** *Um grafo de prioridade G implica em um operador de prioridade $\mathfrak{o}$ se:*

$$w_1 \ \ \mathfrak{o}(\preceq_X)_{X \in V} \ \ w_2 \Longleftrightarrow \forall \alpha' \in A \ tal\ que\ (w_1 \preceq_{V(\alpha)} w_2 \ \ \vee$$

$$\exists \alpha'' \in A \ tal\ que\ (\alpha' < \alpha'' \ \ \wedge \ \ w_1 \prec_{V(\alpha'')} w_2))$$

Como afirmamos anteriormente, um operador de prioridade agrega preferências lexicográficas individuais de acordo com o grafo de prioridade. Ou seja, este operador expõe preferências que se estendem a um grupo de agentes.

Definição 4.2.4 (Operadores de Agregação)**.** *Sejam x e y variáveis que representam agentes. Os operadores de agregação são $x||y$ e x/y são mostrados na figura 1. Estes são chamados respectivamente de* **but** *e* **on the other hand** *e são definidos como:*

$$x||y = x \cap y$$

$$x/y = (x \cap y) \cup x^{\prec}$$

A figura a seguir almeja apresentar dois exemplos de grafos que podem ser analisados de acordo com os operadores apresentados na definição 4.2.4. A esquerda seria um grafo onde os agentes, caracterizados pelas variáveis x e y, possuem o mesmo nível de prioridade. O grafo localizado a direita da figura representa uma configuração onde os agentes x e y possuem diferentes níveis hierárquicos. Sendo o agente x hierarquicamente superior ao agente y.

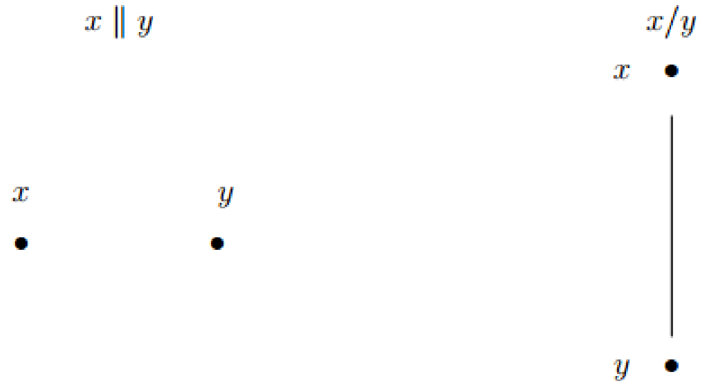

Figura 1: Grafos de Prioridade para os operadores **but** e **on the other hand**.

O exemplo apresentado anteriormente expõe casos simples de grafos que podem ser modelados através dos operadores de agregação exibidos na definição 4.2.4. Contudo, casos mais complexos podem surgir, os quais serão representados por meio da combinação dos operadores de agregação definidos em 4.2.4 finita vezes. Tal propriedade implica no teorema apresentado a seguir.

Teorema 4.2.1. *Segundo (ANDRÉKA; RYAN; SHOBBENS, 2002), qualquer operador de prioridade finito é definido em termos dos operadores / e || e das variáveis que ocorrem no grafo de prioridade para o operador.*

Estes operadores seguem uma álgebra definida para tratar a agregação de preferência dos agentes. Quando há grafos complexos, se faz necessário o uso dos operadores diversas vezes e de diferentes modos. Para que estas operações sejam corretas, uma álgebra específica deve ser definida para que todos os casos passível de ocorrer em um grafo de prioridade sejam contemplados. A seguir será apresentado um teorema para tratar esta álgebra.

Teorema 4.2.2. *De acordo com (ANDRÉKA; RYAN; SHOBBENS, 2002), uma equação é verdade na álgebra definida pelos operadores de prioridade se e somente se ela é derivada através dos seguintes axiomas:*

$$x||x = x$$

$$x||(y||z) = (x||y)||z$$

$$x||y = y||x$$

$$(x/x) = x$$

$$(x/y)/z = x/(y/z)$$

$$x/(y||z) = (x/y)||(x/z)$$

$$(x/y)||y = x||y$$

O grafo de prioridade e a álgebra para tratar os grafos de prioridade, são os componentes que, segundo (GIRARD, 2008), compõe a *Group Order Logic*. A concepção desta lógica foi motivada para a criação de uma lógica modal capaz de tratar ambientes multiagentes, onde se há a agregação de preferência dos mesmos. Estes componentes são adicionados à *Order Logic* para estabelecer uma lógica modal completa capaz de exibir a preferência de grupos de agentes. Esta lógica será apresentada a seguir.

4.3 Lógica Modal Multiagente com Agregação de Preferências

Definidos os operadores modais básicos de preferência e uma álgebra adequada a tratar ambientes multiagente onde se há uma hierarquia entre agentes. Foi estabelecido em (GIRARD, 2008) uma Lógica Modal apta a analisar preferências de agentes e agregá-las segundo uma hierarquia para estes agentes.

Esta foi chamada de *Modal Logic for Preference Aggregation* e foi instituída por uma concatenação de conceitos semânticos e sintáticos das lógicas previamente definidas neste capítulo. Uma atenção especial deve ser dada aos fundamentos em questão, pois nossa lógica foi inspirada nos conceitos que a compõe.

Nas definições a seguir iremos introduzir e explicar a sintaxe e semântica que envolve a *Modal Logic for Preference Aggregation* como também a sua linguagem, destacando cada operador modal criado. Este operadores são os responsáveis por instituir a agregação de preferências.

Definição 4.3.1 (Linguagem da Modal Logic for Preference Aggregation)**.** *Seja $PROP$ um conjunto de variáveis proposicionais com $p \in PROP$, NOM um conjunto de nominais com $s \in NOM$ e A um conjunto de agentes com $\alpha \in A$. A linguagem é definida através das seguintes regras recursivas:*

$$\varphi := \quad s \ \mid \ p \ \mid \ \neg\varphi \ \mid \ \varphi \vee \psi \ \mid \ \langle X \rangle^{\preceq}\varphi \ \mid \ \langle X \rangle^{\prec}\varphi \ \mid \ E\varphi$$

$$X := \quad \alpha \ \mid \ X/Y \ \mid \ X||Y$$

O sentido das modalidades será explicado a seguir. $\langle\alpha\rangle^{\preceq}\varphi$ diz que o agente α pensa que em um estado acessível onde φ vale é no mínimo tão bom quanto o estado atual e $\langle\alpha\rangle^{\prec}\varphi$ diz que de acordo com o agente α, existe um mundo acessível estritamente melhor onde vale φ. Modalidades complexas com as variáveis X,Y,Z e a combinação destas com os operadores / e || são usadas para os grupos de agentes ordenados.

Para expressar um grupo de agentes, a intuição dos operadores torna-se um pouco mais complicada. Para ilustrar o funcionamento deste caso faremos uso de um grupo simples formado por dois agentes σ e θ. Neste caso, trata-se os agentes através de uma hierarquia onde σ é o mestre e θ é o estudante, a modalidade $\langle\sigma/\theta\rangle^{\preceq}\varphi$ diz que o grupo composto pelo mestre σ e o estudante θ considera um estado acessível onde φ vale no mínimo tão bom quanto o estado atual. Se os agentes σ e θ tem o mesmo peso diante da hierarquia do grupo, temos o caso representado por $\sigma||\theta$, e a modalidade $\langle\sigma||\theta\rangle^{\prec}\varphi$ é lida como " o grupo composto por dois agentes de mesmo nível hierárquico considera um estado acessível onde φ vale estritamente melhor que o estado atual".

Estas definições apresentadas no parágrafo anterior são determinadas recursivamente para um grupo de agentes. A modalidade $\langle X/Y\rangle^{\preceq}\varphi$ diz que o grupo X hierarquicamente superior ao grupo Y considera um estado acessível onde φ vale no mínimo tão bom quanto o estado atual. Se os grupos de agentes X e Y tem o mesmo peso hierarquicamente, temos o caso representado por $X||Y$, e a modalidade $\langle X||Y\rangle^{\prec}\varphi$ é lida como " o grupo X de mesmo peso hierárquico que Y consideram, ambos, um estado acessível onde φ vale estritamente melhor que o estado atual".

Definição 4.3.2 (Modelo da Modal Logic for Preference Aggregation)**.** *O modelo é uma tupla* $\mathfrak{M} = (W, G, A, \{\preceq_X\}_{X\in G}, V)$ *onde* W *é um conjunto de estados,* G *é um conjunto de grafos de prioridade,* A *é um conjunto de agentes* $\{\preceq_X\}_{X\in G}$ *é uma família de relações induzidas pelos grafos de prioridade e* $V : PROP \cup NOM \to \mathcal{P}(W)$ *é uma função de valoração que assinala conjuntos dos membros de* NOM *nas partes de* W*.*

Definição 4.3.3 (Semântica da Modal Logic for Preference Aggregation)**.** *A semântica completa da linguagem será apresentada a seguir.*

(i)	$\mathfrak{M}, w \models p$	*sse*	$w \in V(p)$
(ii)	$\mathfrak{M}, w \models s$	*sse*	$\{w\} \in V(s)$
(iii)	$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$	*sse*	*not* $\mathfrak{M}, w \models \varphi$
(iv)	$\mathfrak{M}, w \models \psi \vee \varphi$	*sse*	$\mathfrak{M}, w \models \psi$ *ou* $\mathfrak{M}, w \models \varphi$
(v)	$\mathfrak{M}, w_1 \models \langle X\rangle^{\leq}\varphi$	*sse*	$\exists w_2 \in W$ *tal que* $w_1 \preceq_X w_2$ *&* $\mathfrak{M}, w_2 \models \varphi$
(vi)	$\mathfrak{M}, w_1 \models \langle X\rangle^{<}\varphi$	*sse*	$\exists w_2 \in W$ *tal que* $w_1 \prec_X w_2$ *&* $\mathfrak{M}, w_2 \models \varphi$
(vii)	$\mathfrak{M}, w_1 \models E\varphi$	*sse*	$\exists w_2 \in W$ *tal que,* $\mathfrak{M}, w_2 \models \varphi$

No caso onde $X = \alpha$, $\preceq_\alpha$ é a relação de preferência do agente α, a qual representa o grupo X. No caso de relações complexas, X é recursivamente deduzido por meio das relações de preferência individuais de cada agente que integra o grupo X. Há dois modos possíveis de determinar esta relação única que representa o grupo, o primeiro deles usando $\preceq_{X/Y}= (\preceq_X \cap \preceq_Y) \cup \prec_X)$, o segundo modo é através de $\preceq_{X||Y}=\preceq_X \cap \preceq_Y$. A relação estrita $\prec_X$ é definido de modo padrão já citado neste texto : $u \prec_X v$ sse $u \preceq_X v \;\; \& \;\; \neg \;\; (v \preceq_X u)$.

Com isto, concluiu-se a apresentação das lógicas utilizadas para elaborar nossa abordagem. Estas foram utilizadas como inspiração para a concepção da lógica, a qual esta dissertação se propõe a retratar. No capítulo a seguir será apresentada a Lógica de Primeira Ordem para problemas de Decisão com Agregação de Preferências. Esta comporta-se como um fragmento da Lógica de Primeira Ordem.

5 UMA LÓGICA DE PRIMEIRA ORDEM PARA PROBLEMAS DE DECISÃO COM AGREGAÇÃO DE PREFERÊNCIAS

Neste capítulo, inicialmente, vamos apresentar a linguagem, sintaxe e semântica da nossa lógica. Como citamos anteriormente, o nosso objetivo era apresentar uma lógica capaz de modelar um MCDP e promover a decisão de um agente ou de um grupo de agentes através de suas preferências.

Através da estrutura $\mathfrak{A}$ de primeira ordem associada à lógica $\mathcal{FODPA}$ proposta, iremos representar o cenário onde se irá tomar a decisão. Um Problema de Decisão $\mathcal{DP}$ será especificado por meio de uma fórmula φ. Esta qualifica o objeto/fato a ser analisado para a tomada de decisão. Por intermédio dos operadores lógicos da lógica, será possível representar as preferências dos múltiplos agentes e a agregação das mesmas.

A verificação da satisfação de uma fórmula φ na estrutura $\mathfrak{A}$ vai ser o processo de solução do problema de decisão. Ou seja, se há a satisfação da fórmula φ na estrutura $\mathfrak{A}$ então a resposta para $\mathcal{DP}$ será sim. Caso contrário, será não.

Após este primeiro momento, será apresentado um estudo de caso onde a tomada de decisão de um grupo de agentes será realizada de acordo com a modelagem da $\mathcal{FODPA}$. Nesta será apresentado todo o processo de tomada de decisão, deste a análise das preferências dos agentes, seguindo do processo de inferência entre mundos e, por fim, agregar as preferências e proceder a decisão.

5.1 Sintaxe e Semântica da $\mathcal{FODPA}$

Nesta seção iremos apresentar a sintaxe e a semântica da lógica que este trabalho se propôs a elaborar. Em um primeiro momento apresentaremos a linguagem completa da lógica. Após isso será exposto o Modelo e a semântica de cada operador da lógica. As três definições a seguir apresentam, respectivamente, o vocabulário da lógica, o que seria um termo para a nossa abordagem e , por fim, a linguagem da nossa lógica de acordo com o vocabulário apresentado.

Definição 5.1.1 (Vocabulário $\boldsymbol{\sigma}$)**.** *O vocabulário* $\sigma = \{R_1, R_2, R_3 \dots R_n, c_1, c_2, c_3 \dots c_m, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_k\}$*, onde* R_i*,* $1 \leq i \leq n$*, são relações unárias,* c_i*,* $1 \leq i \leq m$*, são símbolos de constantes e* α_i*,* $1 \leq i \leq k$*, são os agentes.*

Definição 5.1.2 ($\boldsymbol{\sigma}$-termo)**.** *Um termo* t_i*, onde* $i \in \mathbb{N}$*, é ou uma constante* c_i*,* $1 \leq i \leq m$ *ou uma variável* x_i*, onde* $i \in \mathbb{N}$*. Eventualmente usaremos a letra* t *para denominar um termo* t_i *qualquer.*

Definição 5.1.3 (Linguagem sobre o vocabulário $\boldsymbol{\sigma}$)**.**

$$\varphi ::= (t_i \equiv t_j) \mid R_k(t_j) \mid Rej_\alpha(R_l) \mid R_l \sqsubseteq_\alpha R_k \mid t_i \preceq_\alpha t_j \mid \neg\varphi \mid \psi \wedge \varphi \mid \exists x \varphi(x) \mid \exists^\Gamma x \varphi(x)$$

$$\Gamma := \alpha \;\; | \;\; (\Gamma_i/\Gamma_j) \;\; | \;\; (\Gamma_i||\Gamma_j)$$

onde $\alpha \in A$ *tal que* A *é um conjunto de agentes e* $1 \leq i, j, l, k \leq n$.

Lemos (Γ_i/Γ_j) como "O grupo Γ_i é hierarquicamente superior ao grupo Γ_j" e $(\Gamma_i||\Gamma_j)$ como "O grupo Γ_i é hierarquicamente igual ao grupo Γ_j". Conceituados o vocabulário, a definição de um termo e a linguagem para a lógica em questão, será exposto, na definição a seguir, o que seria uma Estrutura para esta abordagem. Esta será realizada com a ilustração de cada um dos seus componentes.

Definição 5.1.4 ($\boldsymbol{\sigma}$-Estrutura)**.** *Uma* σ*-Estrutura* $\mathfrak{A}$ *é uma tupla* $\mathfrak{A} = (W, A, R_1^{\mathfrak{A}} \ldots R_n^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}} \ldots c_m^{\mathfrak{A}}, \{\sqsubseteq_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{Rej_\alpha\}_{\alpha \in A})$*, onde:*

- $W = \{w_1 \ldots w_m\}$ *é um conjunto finito de mundos onde serão tomadas as decisões. Observe que a quantidade de mundos* W *é a mesma da quantidade de constantes. Na definição de satisfação vai ficar claro que cada constante nomeia um mundo.*
- $A = \{\alpha_1 \ldots \alpha_k\}$ *é o conjunto de agentes, os quais serão os tomadores de decisão.*
- $R_1^{\mathfrak{A}} \ldots R_n^{\mathfrak{A}}$ *são relações unárias sobre* W*. Elas são todas as possíveis propriedades com as quais queremos escolher o mundo que interessa ao grupo de agentes.*
- $c_1^{\mathfrak{A}} \ldots c_m^{\mathfrak{A}}$ *são constantes que nomeiam os mundos.*
- $\{\sqsubseteq_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *é uma coleção de relações de preferência* $\sqsubseteq_\alpha$ *por agente* α*, onde* $\sqsubseteq_\alpha \subseteq \{R_i^{\mathfrak{A}} | 1 \leq i \leq n\} \times \{R_j^{\mathfrak{A}} | 1 \leq j \leq n\}$*, ou seja, o produto cartesiano das relações do modelo. A relação* $\sqsubseteq_\alpha$ *possui a propriedade de ser antissimétrica. As relações de preferências são relações binárias onde* $R_i^{\mathfrak{A}} \sqsubseteq_\alpha R_j^{\mathfrak{A}}$*,* $1 \leq i, j \leq n$*, indica a preferência de* $R_j^{\mathfrak{A}}$ *sobre* $R_i^{\mathfrak{A}}$ *para o agente* α*. A relação de preferência estrita* $\sqsubset_\alpha$ *é definida como* $R_i^{\mathfrak{A}} \sqsubset_\alpha R_j^{\mathfrak{A}} := R_i^{\mathfrak{A}} \sqsubseteq_\alpha R_j^{\mathfrak{A}}$ *e não* $R_j^{\mathfrak{A}} \sqsubseteq_\alpha R_i^{\mathfrak{A}}$.
- $\{Rej_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *é a coleção de relações rejeitadas para um agente* α*, onde* $Rej_\alpha \subseteq \{R_i^{\mathfrak{A}} | 1 \leq i \leq n\}$.

A seguir será apresentado um exemplo de uma σ-Estrutura. Este é baseada na modelagem de tipos de carros, os quais são compostos por vários atributos, onde estes atributos são os critérios a serem avaliados.

Exemplo 5.1.1 (Exemplo de uma $\boldsymbol{\sigma}$-Estrutura)**.** *Considere o cenário onde quatro modelos de carros são configurados por meio de diferentes critérios. Cada modelo de carro é rotulado através dos mundos* w_1, w_2, w_3 *e* w_4*, estes são simbolizados através das constantes* c_1, c_2*,* c_3 *e* c_4 *, onde* $c_1^{\mathfrak{A}} = w_1, c_2^{\mathfrak{A}} = w_2, c_3^{\mathfrak{A}} = w_3$ *e* $c_4^{\mathfrak{A}} = w_4$*. Os critérios expressam características de um carro, as quais são Preço Baixo, Preço Alto, Desempenho Baixo, Desempenho Alto, Consumo Baixo, Consumo Alto. Estes são representados, respectivamente, pelas relações unárias* $R_{p1}^{\mathfrak{A}}, R_{p2}^{\mathfrak{A}}, R_{d1}^{\mathfrak{A}}, R_{d2}^{\mathfrak{A}}, R_{c1}^{\mathfrak{A}}$ *e* $R_{c2}^{\mathfrak{A}}$*. Um critério é vinculado a um* *mundo se a relação que o representa relaciona-se com o mundo em questão. Há características que são excludentes, ou seja, não podem ser válidas no mesmo mundo, logo não se relacionam ao mesmo mundo. Estas são $R_{p1}^{\mathfrak{A}}$ e $R_{p2}^{\mathfrak{A}}$, $R_{d1}^{\mathfrak{A}}$ e $R_{d2}^{\mathfrak{A}}$, $R_{c1}^{\mathfrak{A}}$ e $R_{c2}^{\mathfrak{A}}$. Seja o seguinte estrutura* $\mathfrak{A} = (W, A, R_{p1}^{\mathfrak{A}}, R_{p2}^{\mathfrak{A}}, R_{d1}^{\mathfrak{A}}, R_{d2}^{\mathfrak{A}}, R_{c1}^{\mathfrak{A}}, R_{c2}^{\mathfrak{A}}, c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, c_3^{\mathfrak{A}}, c_4^{\mathfrak{A}}, \{\sqsubseteq_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{Rej_\alpha^{\mathfrak{A}}\}_{\alpha \in A})$*:*

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $A = \{\alpha\}$
- $c_1^{\mathfrak{A}} = w_1, c_2^{\mathfrak{A}} = w_2, c_3^{\mathfrak{A}} = w_3, c_4^{\mathfrak{A}} = w_4$
- $\sqsubseteq_\alpha = \{(R_{p2}^{\mathfrak{A}}, R_{c1}^{\mathfrak{A}}), (R_{c2}^{\mathfrak{A}}, R_{p1}^{\mathfrak{A}})\}$
- $Rej_\alpha = \{R_{c2}^{\mathfrak{A}}\}$
- *As seguintes validades para as relações:*

$$\begin{array}{ll} R_{p1}^{\mathfrak{A}} = \{w_1, w_3\} & R_{p2}^{\mathfrak{A}} = \{w_2, w_4\} \\ R_{d1}^{\mathfrak{A}} = \{w_1\} & R_{d2}^{\mathfrak{A}} = \{w_3, w_4\} \\ R_{c1}^{\mathfrak{A}} = \{w_1, w_2, w_3\} & R_{c2}^{\mathfrak{A}} = \{w_4\} \end{array}$$

A relações de preferências entre as relações unárias serão utilizadas para deduzir-se as relações de preferências entre mundos. Antes de apresentar o processo de inferência de relações de preferências entre mundos, será estabelecido a seguir a definição de *multiset*. Este se faz necessário pois a coleção de relações de preferências será exposta por este tipo de extensão de um conjunto padrão. Seguido deste, será exposto um exemplo da definição referenciada.

Definição 5.1.5 (Definição de *Multiset*)**.** *Considere como um multiset como uma generalização do conceito de conjunto, onde, diferente do usual, múltiplas instâncias do mesmo elementos são permitidas. A multiplicidade de um elemento é o número de instâncias que um elemento específico possui no multiset.*

Exemplo 5.1.2 (Exemplo de *Multiset*)**.** *Considere os elementos "a" e "b", um multiset com estes elementos seria:*

$$\{a, a, a, b, b\}$$

onde "a" possui multiplicidade três e "b" possui multiplicidade dois.

A definição a seguir almeja apresentar o método de construção das relações de preferências entre mundos para uma agente α qualquer. Esta é representada pela relação binária $\preceq_\alpha \subseteq W \times W$, ou seja, o produto cartesiano dos mundos do modelo. A relação $\preceq_\alpha$ possui a propriedade de ser antissimétrica. Tal propriedade foi imposta diante da necessidade de manter uma estrutura comparativa viável entre os mundos analisados. Considere os mundos $(w_m, w_n) \in W$ e a existência das relações $w_m \preceq w_n$ e $w_n \preceq w_m$, deste modo temos que $w_i = w_j$, ou seja, os mundos analisados são equivalentes.

As relações de preferência são relações binárias onde $w_i \preceq_\alpha w_j, 1 \leq i, j \leq m$, indica a preferência de w_j sobre w_i para o agente α. A relação de preferência estrita é definida como $w_i \prec_\alpha w_j := w_i \preceq_\alpha w_j$ e não $w_j \preceq_\alpha w_i$.

Definição 5.1.6 (Relação de Preferência entre Mundos para um Agente ($\preceq_\alpha$))**.** *Esta relação será definida como um multiset onde cada ocorrência de um par na relação é obtida obedecendo que: Existe uma relação $w_i \preceq_\alpha w_j$ se e somente se existem R_m e R_n tal que:*

1. $R^{\mathfrak{A}}_m \sqsubseteq_\alpha R^{\mathfrak{A}}_n$
2. $w_i \in R^{\mathfrak{A}}_m$ *e* $w_j \notin R^{\mathfrak{A}}_m$
3. $w_j \in R^{\mathfrak{A}}_n$ *e* $w_i \notin R^{\mathfrak{A}}_n$
4. *Para todo* $R^{\mathfrak{A}}_k \in Rej_\alpha, w_j \notin R^{\mathfrak{A}}_k$

A construção das relações de preferência entre mundos através da preferência entre relações unárias baseia-se na intuição da *strong semantic* como exposta em (KACI, 2011) e apresentada na definição 3.5.1. Esta semântica considera que somente há uma relação de preferência *strong* entre q e p, ou seja, $q \preceq_{st} p$, se e somente se dentre os mundos onde vale $p \land \neg q$ aquele menos preferível é ainda assim é preferível ao mundo mais preferível onde vale $\neg p \land q$. Isto afirma que deste todos os mundo onde valem $p \land \neg q$, o menos preferível destes ainda é mais preferível ao mundo mais preferível entre os quais vale $q \land \neg p$.

A motivação para a aplicação deste tipo de semântica foi baseada na necessidade de tornar mais específica as relações de preferência entre mundos. De fato, uma relação de preferência entre relações somente contribuiu para a elaboração de uma relação de preferência entre mundos se tais características são de grande relevância para qualificar os mundos em questão. O exemplo a seguir almeja explicar a motivação para o uso da semântica *strong*.

Exemplo 5.1.3 (Exemplo Semântica Strong)**.** *Considere o cenário onde um agente α que está avaliando dois modelos de carros. Estes são avaliados segundos os critérios preço, desempenho e consumo, as quais podem assumir o seguintes valores: preço baixo, simbolizado pela relação $R^{\mathfrak{A}}_{p1}$, preço médio, simbolizado pela relação $R^{\mathfrak{A}}_{p2}$, desempenho baixo, simbolizado pela relação $R^{\mathfrak{A}}_{d1}$, desempenho médio, simbolizado pela relação $R^{\mathfrak{A}}_{d2}$, consumo baixo, simbolizado pela relação $R^{\mathfrak{A}}_{c1}$, consumo médio, simbolizado pela relação $R^{\mathfrak{A}}_{c2}$. O primeiro modelo, representado pela constante $c^{\mathfrak{A}}_1$, possui preço baixo, desempenho médio e consumo médio. O segundo, representado pela constante $c^{\mathfrak{A}}_2$, possui preço médio, desempenho médio e consumo baixo. Uma observação deve ser feita sobre os modelos dos relacionamentos, certas relações excluem a possibilidade de relacionamento com outras. Não é possível um carro com preço baixo e médio sucessivamente, logo não há carros com os dois modelos de preço, desempenho e consumo.*

Para o processo de escolha, o agente em questão afirmou que prefere um carro de preço baixo a um com desempenho médio, ou seja, $R^{\mathfrak{A}}_{d2} \sqsubseteq_\alpha R^{\mathfrak{A}}_{p1}$. Neste caso, tal relação *não implica uma dedução sobre qual mundo é preferível, pois ambos os carro possuem um desempenho médio. Para a semântica strong, uma relação é relevante se e somente se não há um dos elementos comparados relacionando-se com os dois mundos comparados. Assim, não há como se verificar qual carro é preferível. Entretanto, se este afirmasse que prefere um carro de consumo baixo a um de consumo médio,* $R^{\mathfrak{A}}_{c2} \sqsubseteq_\alpha R^{\mathfrak{A}}_{c1}$*, teríamos como deduzir qual carro é preferível, este seria o mundo simbolizado pela constate* $c^{\mathfrak{A}}_2$*.*

De acordo com a visão desta abordagem, mundos onde ambas as relações são consideradas não podem expressar com profundidade uma preferência confiável através das relações em questão. Logo, não faria sentido considerar uma estrutura de transformação que não se aproxime deste tipo de semântica.

A intuição operacional das relações rejeitadas foi criada almejando aperfeiçoar o processo de agregação de preferência apresentado em (GIRARD, 2008). Logo, o seu escopo foi elaborado diante da necessidade de equilibrar as preferências de um grupo. Entretanto, não faria sentido o agente não considerar tais relações durante o processo de transformação, de modo que estes tem conhecimento daquilo que rejeita antes mesmo de serem analisados em um grupo. Deste modo, se faz necessário analisar as relações rejeitadas na definição 5.1.6. No decorrer deste capítulo será exposto com mais detalhes a intuição das relações rejeitadas por cada agente.

O exemplo a seguir almeja apresentar o processo de inferência de relações de preferências entre mundos para um agente α qualquer. Esta será baseada através o processo apresentado na definição 5.1.6.

Exemplo 5.1.4 (Exemplo do processo de inferência de relações de preferência entre mundos)**.** *Considere a Estrutura* $\mathfrak{A}$ *apresentado no exemplo 5.1.1, este será utilizado neste exemplo divergindo-se apenas nas relações de preferência entre relações para o agente* α*. A Estrutura é a seguinte tupla:* $\mathfrak{A} = (W, A, R^{\mathfrak{A}}_{p1}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{d1}, R^{\mathfrak{A}}_{d2}, R^{\mathfrak{A}}_{c1}, R^{\mathfrak{A}}_{c2}, c^{\mathfrak{A}}_1, c^{\mathfrak{A}}_2, c^{\mathfrak{A}}_3, c^{\mathfrak{A}}_4, \{\sqsubseteq_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{Rej_\alpha\}_{\alpha \in A})$*, onde:*

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $A = \{\alpha\}$
- $c^{\mathfrak{A}}_1 = w_1, c^{\mathfrak{A}}_2 = w_2, c^{\mathfrak{A}}_3 = w_3, c^{\mathfrak{A}}_4 = w_4$
- $\sqsubseteq_\alpha = [(R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{p1}), (R^{\mathfrak{A}}_{d1}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}), (R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{d1}), (R^{\mathfrak{A}}_{c2}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}), (R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{c2})]$
- $Rej_\alpha = \{R^{\mathfrak{A}}_{c2}\}$
- *As seguintes validades para as relações:*

$$
\begin{array}{ll}
R^{\mathfrak{A}}_{p1} = \{w_1, w_3\} & R^{\mathfrak{A}}_{p2} = \{w_2, w_4\} \\
R^{\mathfrak{A}}_{d1} = \{w_1\} & R^{\mathfrak{A}}_{d2} = \{w_3, w_4\} \\
R^{\mathfrak{A}}_{c1} = \{w_1, w_2, w_3\} & R^{\mathfrak{A}}_{c2} = \{w_4\}
\end{array}
$$

O processo de inferência das preferências entre mundos será através da análise das relações de preferência entre as relações unárias de acordo com a definição 5.1.6. Para cada relação de preferência entre as relações unárias do modelo, será analisada quais relações entre mundos podem ser inferidas. As relações de preferência entre mundos inferidas para cada relação de preferência entre relações unárias é:

(I) Por $(R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{p1})$ *temos que* $(w_4, w_1), (w_4, w_3), (w_2, w_1)$ *e* (w_2, w_3).

(II) Por $(R^{\mathfrak{A}}_{d1}, R^{\mathfrak{A}}_{p2})$ *temos que* (w_1, w_2). *A relação* (w_1, w_4) *é desconsiderada pelo relacionamento de uma um relação rejeitada com o mundo* w_4.

(III) Por $(R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{d1})$ *temos que* (w_2, w_1) *e* (w_4, w_1).

(IV) Por $(R^{\mathfrak{A}}_{c2}, R^{\mathfrak{A}}_{p2})$ *temos que nada pode-se inferir devido as restrições da definição 5.1.6.*

(V) Por $(R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{c2})$ *nada pode-se inferir pois* $R^{\mathfrak{A}}_{c2}$ *é uma relação rejeitada.*

Deste modo temos que as relações de preferência entre mundos para o agente α *será :*

$$\preceq_\alpha = \{(w_4, w_1), (w_4, w_3), (w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_4, w_1)\}$$

O processo de inferência das relações de preferência entre mundos para cada agente pode gerar certas conturbações que são consideradas como relações de preferência não intuitivas. Por exemplo, considere que através da análise das relações unárias chegou-se às seguintes relações de preferência entre mundos: (w_i, w_j) e (w_j, w_i). Nota-se que nada pode-se assegurar, sobre o mundo mais preferível, segundo estas relações. Para contornar este tipo de problema, será apresentada na definição a seguir uma verificação das relações de $\preceq_\alpha$, onde a relação de maior frequência será considerada diante daquela de menor frequência. Caso ambas as relações possuam a mesma frequências, estas são mantidas e considera-se que estes mundos são equivalentes.

A motivação para tal processo baseou-se na intuição de eliminar relações que não contribuem para a tomada de decisão entre mundos. O processo almeja, também, manter o relacionamentos com as relações de preferências sobre as relações unárias. A existência de várias relações entre dois mundos expressa que há atributos no mundo preferível comparados em vários momentos com atributos do mundo derrotado. Exteriorizando, assim, predileções sobre vários atributos do mundo preferível. A definição a seguir apresenta o conceito de frequência para uma relação.

Definição 5.1.7 (Frequência de uma relação)**.** *Julgue como a frequência de uma relação* (w_i, w_j) *como o número de vezes que esta ocorre dentre o Multiset* $\{\preceq_\alpha\}$, *o qual expressa as relações de preferência de um agente* α *qualquer. Esta será simbolizada pelo símbolo " # " seguido do par de mundos* (w_i, w_j) *analisado.*

O exemplo a seguir apresenta a contagem da frequência de uma relação sobre as relações de preferência de um agente α qualquer. Este é baseado na operação exposta na definição 5.1.7.

Exemplo 5.1.5 (Exemplo da Frequência de uma Relação)**.** *Considere as seguintes tuplas como as relações de preferência de um agente α:*

$$\preceq_\alpha = \{(u, v), (p, q), (u, v), (u, v)\}$$

A frequência da relação $u \preceq_\alpha v$ será representada por $\#(u, v)$, a qual, para o exemplo em questão, será três, ou seja, $\#(u, v) = 3$.

De posse do processo de contagem das relações de preferência para um agente α qualquer, podemos definir o processo de verificação das relações de preferência para um agente α qualquer. Esta utiliza a noção de frequência apresentada na definição 5.1.7.

Definição 5.1.8 (Verificação de ($\preceq_\alpha$))**.** *Conceitue como um ciclo nas relações de preferência de um agente α a existência de relações de tipo $u \preceq_\alpha v$ e $v \preceq_\alpha u$. Conjecture como $\#(u, v)$ a frequência das relações $u \preceq_\alpha v$, como especificado na definição 5.1.7. Avalie o mesmo para $\#(v, u)$, ou seja, o número de vezes que a relação "(v, u)" figura entra as tuplas que o agente α considera como relações de preferências . Se $\#(u, v) > \#(v, u)$, ou seja, a frequência da relação (u, v) é maior que a frequência da relação (v, u), exclui-se $v \preceq_\alpha u$ de $\preceq_\alpha$ caso contrário exclui-se $u \preceq_\alpha v$. Por fim, caso as frequências sejam iguais, ambas as relações são consideradas e são mantidas no processo de escolha.*

Consideraremos, portanto, as relações de preferência para um agente após as mesmas passarem por este processo de verificação. O mesmo deve ser feito também para um grupo de agentes, este será apresentado no decorrer do capítulo. O exemplo a seguir apresenta a verificação das relações de preferências inferidas no exemplo 5.1.4.

Exemplo 5.1.6 (Verificação de $\preceq_\alpha$)**.** *Julgue as seguintes relações como as relações de preferências entre mundos inferidas para um agente α.*

$$\preceq_\alpha = \{(w_4, w_1), (w_4, w_3), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_4, w_1)\}$$

Percebe-se que dentre as relações de preferência entre mundos, inferidas pelo agente, há a existência de ciclos pelas relações (w_1, w_2) e (w_2, w_1). Logo, se faz necessário a verificação desta relações pelos conceitos exibidos na definição 5.1.8 e, portanto, a remoção da relação (w_1, w_2). Assim, após a verificação das relações, teremos as seguintes relações de preferência entre mundo para o agente α:

$$\preceq_\alpha = \{(w_4, w_1), (w_4, w_3), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_2, w_1), (w_4, w_1)\}$$

Como a nossa lógica almeja tratar ambientes multiagentes distribuídos em níveis hierárquicos, faz-se necessário um modo de operar estes agentes como um grupo. A definição a seguir expõe o comportamento de um grupo de agentes para a nossa abordagem.

Definição 5.1.9 (Definição de um grupo de agentes)**.** *Um grupo de agentes qualquer é expresso através da função agente*(Γ_n) *onde:*

a) Seja $\Gamma = \alpha$, *agente*$(\alpha) = \{\alpha\}$.

b) Seja $\Gamma = (\Gamma_i/\Gamma_j)$, *agente*$(\Gamma_i/\Gamma_j) =$ *agente*$(\Gamma_i) \cup$ *agente*(Γ_j).

c) Seja $\Gamma = (\Gamma_i||\Gamma_j)$, *agente*$(\Gamma_i||\Gamma_j) =$ *agente*$(\Gamma_i) \cup$ *agente*(Γ_j).

O exemplo a seguir apresenta uma configuração de um grupo de agentes de acordo com os parâmetros definidos para a nossa lógica. Estes são expostos através de grafos onde os nodos são os agentes e a altura do nodo indica a posição hierárquica do agente para o grupo em questão.

Exemplo 5.1.7 (Exemplo de um Grupo de Agente)**.** *Considere o grupo* $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ *especificado pela figura a seguir:*

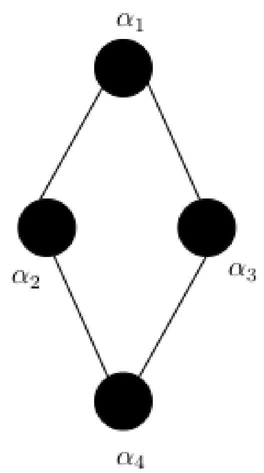

Figura 2: Grupo de agentes em três níveis.

Analisando os agentes diante do seu nível hierárquico, pode-se exibir o grupo em questão sobre três grupos de $\Gamma_1 = \{\alpha_1\}, \Gamma_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ *e* $\Gamma_3 = \{\alpha_4\}$. *A expressão que exterioriza o grupo* Γ *em termos da definição 5.1.9 é:*

$$\Gamma = ((\Gamma_1/\Gamma_2)/\Gamma_3)$$

Aplicando a operação recursiva apresentada no item "a" da definição 5.1.9 temos que:

$$\Gamma = ((\alpha_1/(\alpha_3||\alpha_2))/\alpha_4)$$

Descritos os formatos para um grupo de agentes neste abordagem, será apresentado na definição a seguir o processo de agregação das preferências entre mundos para um grupo de agentes. Esta é imprescindível para a correta operação do operador apresentado na definição de satisfação 5.1.17 no item (ix).

Definição 5.1.10 (Definição de $\preceq_{\Gamma}$)**.** *Segundo a definição 5.1.3* $\Gamma := \alpha \mid (\Gamma_i/\Gamma_j) \mid (\Gamma_i||\Gamma_j)$, *onde* $\alpha \in A$. *Definiremos* $\preceq_\Gamma$ *por indução em* Γ*:*

a) Seja $\Gamma = \alpha$, *então* $\preceq_\Gamma = \preceq_\alpha$. *Logo usar a definição 5.1.6 e realizar a verificação da definição 5.1.8.*

b) Seja $\Gamma = \Gamma_i/\Gamma_j$, $\{w_k, w_m \in W|\ (w_k, w_m) \in ((\preceq_{\Gamma_i} \cap \preceq_{\Gamma_j}) \cup \prec_{\Gamma_i})$ *e não existe* $R^{\mathfrak{A}}_p \in (\ \bigcup\{Rej_{\alpha_k}|\alpha_k \in agente(\Gamma_i/\Gamma_j)\})$ *tal que vale* $R^{\mathfrak{A}}_p(w_m)\}$.

c) Seja $\Gamma = \Gamma_i||\Gamma_j$, $\{w_k, w_m \in W|\ (w_k, w_m) \in (\preceq_{\Gamma_i} \cap \preceq_{\Gamma_j})$ *e não existe* $R^{\mathfrak{A}}_p \in (\ \bigcup\{Rej_{\alpha_k}|\ \alpha_k \in agente(\Gamma_i||\Gamma_j)\}$ *tal que vale* $R^{\mathfrak{A}}_p(w_m)\}$.

O exemplo a seguir apresenta o processo de agregação das preferências de um conjunto de agentes Γ. Tal processo ocorre de acordo com o nível hierárquico de cada um dos componentes do grupo em questão.

Exemplo 5.1.8 (Agregação de Preferências para um Conjunto de Agentes)**.** *Considere o conjunto de agentes* Γ *definido no exemplo 5.1.7. Estes são expressos hierarquicamente através do seguinte expressão:*

$$\Gamma = (\alpha_1/(\alpha_2||\alpha_3))/\alpha_4$$

Para a correta agregação das preferência necessita-se, além da estrutura hierárquica dos agentes, das relações rejeitadas para cada gente, os mundos pertencentes para cada uma destas relações e as relações de preferências entre mundos para cada um dos agente. Para a expressar os mundos, utilizaremos os mesmos apresentados no exemplo 5.1.4. Estes são os mundos w_1, w_2, w_3, w_4. *Considere com as relações rejeitadas para cada um dos agentes os seguintes conjuntos:* $Rej_{\alpha_1} = \{R^{\mathfrak{A}}_{c2}\}$, $Rej_{\alpha_2} = \{R^{\mathfrak{A}}_{d1}\}$, $Rej_{\alpha_3} = \{R^{\mathfrak{A}}_{d1}\}$ *e* $Rej_{\alpha_4} = \{R^{\mathfrak{A}}_{c2}\}$. *Onde* $R^{\mathfrak{A}}_{d1} = \{w_1\}$ *e* $R^{\mathfrak{A}}_{c2} = \{w_4\}$ *Por fim, as relações de preferência entre mundos para os quatro agentes em questão será:*

- $\preceq_{\alpha_1} = \{(w_1, w_2), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_3, w_2), (w_1, w_3)\}$
- $\preceq_{\alpha_2} = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_2), (w_4, w_3)\}$
- $\preceq_{\alpha_3} = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_2)\}$
- $\preceq_{\alpha_4} = \{(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_2, w_3), (w_3, w_2)\}$

De posse das relações de preferência entre mundos para cada agentes, será realizada a agregação das preferências segundo a hierarquia apresentada. Através da operação para o conjunto $\Gamma_2 = (\alpha_3||\alpha_2)$ *temos que* $\preceq_{\Gamma_2}= \{(w_2, w_3), (w_3, w_2)\}$*. Operando* Γ_3/Γ_2*, onde* $\Gamma_3 = \{\alpha_4\}$*, temos que* $\preceq_{\Gamma_2/\Gamma_3}= \{(w_2, w_3), (w_3, w_2)\}$*. Completando o processo de agregação temos* $(\Gamma_1/\Gamma_2)/\Gamma_3$*, ou seja, o resultado da operação dos conjuntos* (Γ_2/Γ_3) *operado com o conjunto* Γ_1*, este situando-se hierarquicamente superior ao resultado anterior. Assim, temos que as relações de preferências agregadas para o conjunto* Γ *será:*

$$\preceq_{\Gamma}= \{(w_2, w_3), (w_3, w_2), (w_1, w_3)\}$$

Após o processo de agregação para um grupo de agentes, novos problemas são passíveis de ocorrer. Caso os agentes possuam diferentes níveis hierárquicos há a união de relações, e, com isto, a possibilidade de ocorrência de novos ciclos. Para contornar tais problemas, é necessário uma verificação das relações de preferência como a proposta na definição 5.1.8. Esta será apresentada a seguir.

Definição 5.1.11 (Verificação $(\preceq_{\Gamma})$)**.** *Considere como um ciclo nas relações de preferência de um grupo de agentes* Γ *a existência de relações de tipo* $u \preceq_{\Gamma} v$ *e* $v \preceq_{\Gamma} u$*. Conjecture como* $\#(u, v)$ *a frequência das relações* $u \preceq_{\Gamma} v$ *segundo a definição 5.1.7 e o mesmo para* $\#(v, u)$*, ou seja, a frequência das relações* $v \preceq_{\Gamma} u$*. Se* $\#(u, v) > \#(v, u)$ *exclui-se* $v \preceq_{\Gamma} u$ *de* $\{\preceq_{\Gamma}\}$ *caso contrário exclui-se* $u \preceq_{\Gamma} v$*. Por fim, caso as frequências sejam iguais, ambas as relações são mantidas.*

Consideraremos, portanto, as relações de preferência para um grupo de agente após as mesmas passarem por este processo de verificação apresentado na definição 5.1.11. Antes da apresentação da definição de satisfação, será exposto, na definição a seguir, o conceito de maximal utilizado no item (vi) da definição 5.1.17.

Definição 5.1.12 (Definição de Maximal)**.** *Um elemento a de um conjunto parcialmente ordenado A é maximal quando não existe outro elemento que seja maior que ele:*

$$\neg\exists x \in A, \quad x > a$$

A seguir será apresentado um exemplo de um conjunto de relações de ordem onde pode-se apontar a presença de um elemento maximal.

Exemplo 5.1.9 (Exemplo de um Elemento Maximal)**.** *Considere a tupla* (u, v) *como uma relação de ordem do tipo* $u < v$ *expressando que* v *é melhor que* u*. Seja o seguinte conjunto* $\mathcal{D}$ *de tuplas:*

$$\mathcal{D} = \{(u, v), (u, r), (v, r), (u, s), (v, s)\}$$

No caso, temos dois elementos maximais. Estes são s *e* r*, pois não há um elemento melhor que estes.*

A definição a seguir formaliza o conceito de “mais preferível” de acordo com as necessidades da nossa abordagem. Esta fará uso da do conceito de elemento maximal exposto na definição 5.1.12.

Definição 5.1.13 (Definição de "*Mais Preferível*"). *Suponha que a relação $\preceq_\Gamma$ seja considerada como transitiva. Então o mundo w' é mais preferível se ele for um elemento maximal. Nesta versão da relação, $\preceq_\Gamma$ é considerada como uma ordem parcial.*

Vamos agora, usando indução nas fórmulas φ, apresentar a definição de $\mathfrak{I}$. Este é um modelo para φ, onde $\mathfrak{I}$ é uma interpretação arbitrária. Se $\mathfrak{I}$ é um modelo de φ, nós podemos afirmar também que $\mathfrak{I}$ satisfaz φ ou que φ vale em $\mathfrak{I}$, e escrevemos que $\mathfrak{I} \models \varphi$.

As definições a seguir apresentam a conceituação de um assinalamento em uma σ-estrutura, de uma σ-interpretação para termos respectivamente. Estes são componentes indispensável para a conclusão da semântica da lógica.

Definição 5.1.14 (Definição de Assinalamento). *Um assinalamento em uma σ-estrutura $\mathfrak{A}$ é um mapeamento $\beta : \{x_m | m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow W$ de um conjunto de variáveis no domínio de W.*

Definição 5.1.15 (Definição de uma $\boldsymbol{\sigma}$-interpretação $\mathfrak{I}$). *Uma σ-interpretação $\mathfrak{I}$ é um par $(\mathfrak{A}, \beta)$ consistindo de um σ-estrutura $\mathfrak{A}$ e um assinalamento β em $\mathfrak{A}$. Se β é um assinalamento em $\mathfrak{A}$, $w \in W$, x é uma variável, então $\beta\frac{w}{x}$ é um assinalamento em $\mathfrak{A}$ que concorda com β sobre todas as variáveis distintas de x:*

$$\beta\frac{w}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y) & se\ y \neq x, \\ w & se\ y = x. \end{cases}$$

Se $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ então $\mathfrak{I}\frac{w}{x} = (\mathfrak{A}, \beta\frac{w}{x})$.

Definição 5.1.16 (Definição de Interpretação para Termos).

(a) Para cada variável x considere $\mathfrak{I}(x) = \beta(x)$

(b) Para constantes $c_i \in \sigma$, considere que $\mathfrak{I}(c_i) = c_i^{\mathfrak{A}} = w_i \in W$, onde $1 \leq i \leq m$.

De posse destas três últimas definições, concluí-se a apresentação das definições necessárias para a linguagem da lógica.A elaboração da semântica da lógica, apresentada na definição a seguir, partiu-se da necessidade do prover a tomada de decisão de acordo com a preferência dos agentes. De fato, tal resposta sobre a decisão é exposto através de consultas que são capazes de serem respondidas através da satisfação de alguns dos operadores da nossa lógica. A definição a seguir apresenta a semântica completa da lógica.

Definição 5.1.17 (Definição de Satisfação). *Para todo $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ nos temos que:*

(i)	$\mathfrak{I} \models t_i \equiv t_j$	*sse*	$\mathfrak{I}(t_i) = \mathfrak{I}(t_j)$
(ii)	$\mathfrak{I} \models R_k(t_i)$	*sse*	$\mathfrak{I}(t_i) \in R_k^{\mathfrak{A}}$
(iii)	$\mathfrak{I} \models Rej_\alpha(R_l)$	*sse*	$R_l^{\mathfrak{A}} \in Rej_\alpha^{\mathfrak{A}}$
(iv)	$\mathfrak{I} \models R_l \sqsubseteq_\alpha R_k$	*sse*	$(R_l^{\mathfrak{A}}, R_k^{\mathfrak{A}}) \in \sqsubseteq_\alpha$
(v)	$\mathfrak{I} \models t_i \preceq_\alpha t_j$	*sse*	*existem* $R_l^{\mathfrak{A}}, R_k^{\mathfrak{A}}$ *tal que* $R_l^{\mathfrak{A}} \sqsubseteq_\alpha R_k^{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{I}(t_i) \in R_l^{\mathfrak{A}}, \mathfrak{I}(t_j) \in R_k^{\mathfrak{A}}, \mathfrak{I}(t_i) \notin R_k^{\mathfrak{A}}, \mathfrak{I}(t_j) \notin R_l^{\mathfrak{A}}$ *e para todo* $R_x^{\mathfrak{A}} \in Rej_\alpha, \mathfrak{I}(t_j) \notin R_x^{\mathfrak{A}}$
(vi)	$\mathfrak{I} \models \neg\varphi$	*sse*	*não* $\mathfrak{I} \models \varphi$
(vii)	$\mathfrak{I} \models \psi \wedge \varphi$	*sse*	$\mathfrak{I} \models \psi$ *e* $\mathfrak{I} \models \varphi$
(viii)	$\mathfrak{I} \models \exists x \varphi(x)$	*sse*	*existe um* $w \in W$ *tal que* $\mathfrak{I}\frac{w}{x} \models \varphi(x)$
(ix)	$\mathfrak{I} \models \exists^\Gamma x \varphi(x)$	*sse*	*existe um* $w \in W$ *tal que* w *é o mais preferível com respeito* $\preceq_\Gamma$ *e* $\mathfrak{I}\frac{w}{x} \models \varphi(x)$ *onde* $\preceq_\Gamma$ *é apresentado na definição 5.1.10*

- O item (i) da definição expressa a satisfação da equivalência entre termos, onde uma interpretação $\mathfrak{I}$ satisfaz $t_i \equiv t_j$ se e somente se a interpretação de cada um dos termos são equivalentes. A motivação para a criação desta satisfação surgiu da necessidade de comparar termos e avaliá-los. Por exemplo, caso queira-se averiguar a equivalência entre mundos, satisfações como a apresentada no item (i) auxiliam nesta consulta.

- Em (ii) há a satisfação de uma relação, nesta a uma interpretação $\mathfrak{I}$ satisfaz $R_k(t_i)$ se e somente se a interpretação do termo relacionado pertence aos elementos que a relação avaliada possui. Ou seja, expressa as propriedades que um mundo específico possui. A motivação para esta surgiu da necessidade de avaliar se um termo específico pertence ao conjunto de termos de uma relação específica. Na última seção deste capítulo, com a apresentação de um estudo de caso, ficará mais claro ao leitor a necessidade desta.

- Em (iii) há a satisfação de uma relação rejeitada para um agente específico, esta somente ocorre se a relação avaliada pertence ao conjunto da relações rejeitadas para o agente α em questão. Ou seja, são as propriedades que o agente não quer no objeto simbolizado pelo mundo referenciado. A motivação para a elaboração desta surgiu de uma inspiração semelhante ao item anterior. Caso queira-se avaliar se uma relação específica é rejeitada por uma agente, basta analisar a satisfação desta.

- Em (iv) há a satisfação da relação de preferência entre duas relações, de acordo com um agente específico. Esta somente ocorre se e somente se ambas as relações pertencem ao conjunto de pares de relações avaliadas para o agente um α. Ou seja, indica a preferência de um propriedade, referenciada por uma relação, a outra propriedade, referenciada por uma segunda relação. A motivação para a criação desta surgiu para avaliar se uma relação entre duas relações unárias existem dentre as relações avaliadas para um agente α qualquer. Na última seção deste capítulo, com a apresentação de um estudo de caso, ficará mais claro ao leitor a necessidade desta.

- Em (v) há a satisfação da relação de preferência entre dois termos para um agente α. Ou seja, há a preferência de mundo a outro de acordo com as relações de preferências entre as relações unárias. Esta relação de preferência entre mundos somente ocorre se e somente se há o processo de inferência dos termos avaliados. Esta deve estar de acordo com o processo de inferência explicitado na definição 5.1.6.

- Em (vi) há a satisfação da negação da uma fórmula. Esta ocorre se e somente se não há a satisfação da fórmula negada. A motivação para a elaboração desta partiu-se da necessidade de avaliar fórmulas que não ocorrem. Na última seção deste capítulo, com a apresentação de um estudo de caso, ficará mais claro ao leitor a necessidade desta.

- (vii) há a satisfação da conjunção de uma fórmula, esta é a conjunção da interpretação de cada fórmula. Tal operação ocorre se e somente se há a satisfação da primeira fórmula e a satisfação da segunda fórmula. A motivação para a criação desta partiu-se da necessidade de avaliar fórmulas mais complexas.

- Em $(viii)$ há a satisfação do existencial de acordo com o modelo apresentado. A justificativa para a concepção desta surgiu da necessidade de avaliar a existência de um mundo onde uma fórmula específica ocorre. Esta possui a satisfação igual ao existencial usual da Lógica de Primeira Ordem. Na última seção deste capítulo, com a apresentação de um estudo de caso, ficará mais claro ao leito a necessidade desta.

- Em (ix), há a satisfação da fórmula elaborada por este trabalho com o objetivo de expressar a existência de um mundo maximal onde uma fórmula é válida. Esta assemelha-se ao apresentado no item $(viii)$ desta satisfação, entretanto há a avaliação da satisfação segundo um mundo maximal. Este exterioriza um mundo "mais preferível" para um agente ou um grupo de agentes.Na última seção deste capítulo, com a apresentação de um estudo de caso, ficará mais claro ao leitor a necessidade desta.

Concluída a apresentação completa dos elementos que compõe a sintaxe e semântica da lógica que esta abordagem almeja apresentar, será exibido na seção a seguir os modelos de consulta sobre esta lógica. Estas consultas são utilizadas para a concreta avaliação da tomada de decisão, onde as avaliações são feitas através de fórmulas baseadas na sintaxe apresentada. A satisfação desta indicam a sua validação pelo Modelo proposto. Logo, estas consultas respondem as interrogações que podem surgir durante a tomada de decisão.

5.2 Consultas a Serem Realizadas pelo Tomador de Decisão

Como citado no início deste trabalho, o objetivo desta lógica é propor uma sintaxe e semântica bem formulada para modelar e instituir uma tomada de decisão em ambientes multiagentes. Para que seja possível uma correta tomada de decisão, se faz necessário ferramentas e métricas de análise de todas as possíveis opções/resultados existentes na abordagem. Para assim, através das métrica comparativas, instituir a tomada de decisão.

De fato, a sintaxe e semântica apresentada é capaz de modelar e avaliar tal ambiente de forma satisfatório, entretanto acrescentaria valor à abordagem métodos ou protocolos a serem utilizados para facilitar a aplicação de lógica operacionalmente. Para isto, será apresentado consultas sobre as informações como uma forma de abstrair a interação dos usuários com a lógica, de modo a simular uma aplicação baseada em consultas. A seguir serão apresentadas estas consultas sobre a lógica.

5.2.1 Consulta 1 - Existência de um Resultado

A tomada de decisão pode se expressar através de vários níveis de análise. Como citamos anteriormente, nos capítulos introdutórios, o processo de decisão pode ser instituído em sua forma mais simplória como o simples retorno de sim ou não diante de uma opção. Entretanto, diante da complexidade de certas abordagens, avaliar todas as opções torna-se uma tarefa onerosa e complicada. Saber se há uma opção cujo retorno será “ sim ” pode-se comportar como uma tarefa inicial à buscar por uma tomada de decisão eficiente.

Almejando tratar este tipo de problema, foi instituída a operação definida no item ($viii$) da definição 5.1.17. A satisfação desta é ligada a existência de um mundo $w \in W$, ou seja, uma opção dentro o conjunto de opções, onde a fórmula avaliada é satisfatível. O exemplo a seguir apresenta a aplicação desta consulta baseada no Modelo $\mathfrak{M}$ criado no exemplo 5.1.1.

Exemplo 5.2.1 (Exemplo Consulta - 1)**.** *Considere a estrutura* $\mathfrak{A}$ *através da seguinte tupla:* $\mathfrak{A} = (W, A, R^{\mathfrak{A}}_{p1}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{d1}, R^{\mathfrak{A}}_{d2}, R^{\mathfrak{A}}_{c1}, R^{\mathfrak{A}}_{c2}, c^{\mathfrak{A}}_1, c^{\mathfrak{A}}_2, c^{\mathfrak{A}}_3, c^{\mathfrak{A}}_4, \{\sqsubseteq_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{Rej_\alpha\}_{\alpha \in A})$*, onde:*

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $A = \{\alpha\}$
- $c^{\mathfrak{A}}_1 = w_1, c^{\mathfrak{A}}_2 = w_2, c^{\mathfrak{A}}_3 = w_3, c^{\mathfrak{A}}_4 = w_4$
- $\sqsubseteq_\alpha = [(R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{p1}), (R^{\mathfrak{A}}_{d1}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}), (R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{d1}), (R^{\mathfrak{A}}_{c2}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}), (R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{c2})]$
- $Rej_\alpha = \{R^{\mathfrak{A}}_{c2}\}$

$$\begin{array}{ll} R^{\mathfrak{A}}_{p1} = \{w_1, w_3\} & R^{\mathfrak{A}}_{p2} = \{w_2, w_4\} \\ R^{\mathfrak{A}}_{d1} = \{w_1\} & R^{\mathfrak{A}}_{d2} = \{w_3, w_4\} \\ R^{\mathfrak{A}}_{c1} = \{w_1, w_2, w_3\} & R^{\mathfrak{A}}_{c2} = \{w_4\} \end{array}$$

- *As seguintes validades para as relações:*

Considere que o agente α em questão queira fazer a compra de um carro, o qual deve possuir a propriedade de um desempenho alto e um consumo de baixo de combustível. Primeiramente, o agente permanece em dúvida sobre a existência de uma opção que possua tais propriedades.

Para sanar tal questionamento, o agente realiza a consulta sobre a existência de um mundo com tais propriedades. Esta será feita através da satisfação de fórmula $\exists x \varphi(x) = \exists x(R_{d2}(x) \wedge R_{c1}(x))$, ou seja, deve-se avaliar se $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi(x)$. Tal satisfação ocorre pois existe $w \in W$ onde substituindo x por w vale $\varphi(x)$, ou seja, $\mathfrak{I}\frac{w}{x} \models \varphi(x)$ pois existe um $x' = w$ tal que $R_{d2}(x') \wedge R_{c1}(x')$.

Com o conhecimento desta satisfação, ou seja, que há um mundo com tais relações, o agente pode proceder uma busca sobre o mundo que possui tal propriedade. Para isto, basta verificar a satisfação de $\varphi(x)$ em cada um dos mundos w_1, w_2, w_3 e w_4 do Modelo.

De posse da consulta que analisa a existência de uma mundo de acordo com uma fórmula, será apresentado a seguir a segunda consulta da abordagem para uma tomada de decisão eficiente. Esta expressa a consulta de um mundo “mais preferível” de acordo com as relações de preferência entre mundos para os agentes em questão.

5.2.2 Consulta 2 - Existência de um Maximal

Como mencionado anteriormente neste trabalho, o processo de tomada de decisão é baseado em métricas. Estas são utilizadas para a análise das opções plausíveis para, assim, determinar aquela mais favorável para o tomador de decisão. Para lógica elaborada neste trabalho, a métrica utilizada são relações binárias de preferências.

Na consulta anterior afirmamos a existência de um mundo com as propriedades de compõem a fórmula $\varphi(x)$, entretanto esta não afirma a existência de um mundo “ mais preferível ”. Por esta razão foi proposta uma segunda consulta que indica a existência de um mundo maximal de acordo com as relações de preferência de um agente α qualquer. Caso a análise seja feita por um grupo de agentes, deve-se considerar um mundo maximal de acordo com as relações de preferência entre mundos agregadas para o grupo em questão.

Almejando exteriorizar este tipo de consulta, foi instituída a operação definida no item (ix) da definição 5.1.17. A satisfação desta é ligada a existência de um mundo maximal, onde a fórmula analisada ocorre. O exemplo a seguir pretende expor a realização da consulta de acordo com o operador citado.

Exemplo 5.2.2 (Exemplo Consulta - 2)**.** *Considere a Estrutura* $\mathfrak{A}$ *representado pela tupla:* $\mathfrak{A} = (W, A, R^{\mathfrak{A}}_{p1}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{d1}, R^{\mathfrak{A}}_{d2}, R^{\mathfrak{A}}_{c1}, R^{\mathfrak{A}}_{c2}, c^{\mathfrak{A}}_1, c^{\mathfrak{A}}_2, c^{\mathfrak{A}}_3, c^{\mathfrak{A}}_4, \{\sqsubseteq_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{Rej_\alpha\}_{\alpha \in A})$. *Conjecture que cada um dos componente deste modelo são os mesmo apresentados no exemplo 5.2.1. Sobre este Modelo* $\mathfrak{M}$*, o agente* α *necessita avaliar se existe um mundo maximal de acordo com suas relações de preferência entre mundos. Para simplificar o exemplo em questão, será apresentado a seguir somente os componentes do Modelo* $\mathfrak{M}$ *relevantes para a verificação da existência do mundo Maximal. Suponha que :*

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$
- $A = \{\alpha\}$
- $c^{\mathfrak{A}}_1 = w_1, c^{\mathfrak{A}}_2 = w_2, c^{\mathfrak{A}}_3 = w_3, c^{\mathfrak{A}}_4 = w_4$
- $\sqsubseteq_\alpha = [(R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{p1}), (R^{\mathfrak{A}}_{d1}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}), (R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{d1}), (R^{\mathfrak{A}}_{c2}, R^{\mathfrak{A}}_{p2}), (R^{\mathfrak{A}}_{p2}, R^{\mathfrak{A}}_{c2})]$
- $Rej_\alpha = \{R^{\mathfrak{A}}_{c2}\}$
- *As seguintes validades para as relações:*

$$\begin{array}{ll} R^{\mathfrak{A}}_{p1} = \{w_1, w_3\} & R^{\mathfrak{A}}_{p2} = \{w_2, w_4\} \\ R^{\mathfrak{A}}_{d1} = \{w_1\} & R^{\mathfrak{A}}_{d2} = \{w_3, w_4\} \\ R^{\mathfrak{A}}_{c1} = \{w_1, w_2, w_3\} & R^{\mathfrak{A}}_{c2} = \{w_4\} \end{array}$$

Por fim, os componentes relevante do Modelo $\mathfrak{M}$ *para a satisfação da fórmula que indicada, considere as seguintes relações de preferência entre mundos para o agente* α*:*

$$\preceq_\alpha = \{(w_4, w_1), (w_4, w_3), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_2, w_1), (w_4, w_1)\}$$

Conjecture que o agente α *queira um carro de desempenho alto e consumo baixo de combustível e que estas propriedades existam no mundo considerado " mais preferível ". Ele necessita verificar se no mundo maximal, de acordo com as relações de preferência do mesmo, há a satisfação da fórmula* $\varphi(x) = R_{d2}(x) \wedge R_{c1}(x)$.

Para sanar tal questionamento, o agente realiza a satisfação da fórmula indicada pelo item (ix) da definição 5.1.17. Esta será feita através da satisfação de $\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x \varphi(x)$ *onde* $\varphi(x) = R_{d2}(x) \wedge R_{c1}(x)$*. Tal satisfação ocorre pois existe* $w' \in W$ *tal que* $\nexists w'' \in W, w' \preceq_\alpha w''$*. Onde substituindo* x *por* c *onde* $c = w'$ *temos que* $\varphi(x)$ *vale em* w'*. Ou seja* $\mathfrak{I}\frac{c}{x} \models \varphi(x)$ *pois existe um* $x' = c$ *tal que* $R_{d2}(x') \wedge R_{c1}(x')$.

Com esta satisfação, concluímos o processo de busca por um mundo maximal onde vale a fórmula analisada. Como apresentado anteriormente, esta consulta não indica qual seria este mundo maximal. Para tal, necessita-se verificar para os mundos maximais a validade de $\varphi(x)$. Para responder este tipo de interrogação, será apresentando seguir a terceira consulta.

5.2.3 Consulta 3 - Verificação de um Maximal

As consultas apresentadas anteriormente neste capítulo avaliavam somente a existência de mundos de acordo com peculiaridades estabelecidas. Estas ocorrem de acordo com operações da semântica da lógica apresentadas na definição 5.1.17. Ou seja, estas consultas não indicavam mundos com as propriedades buscadas e sim a existência destes mundos

De fato, uma tomada de decisão eficiente é aquela onde a escolha é feita por uma opção considerada a melhor, de acordo com as métrica de análise, pelo tomador de decisão. Considerando-se que para a nossa abordagem as opções são os mundos e a métrica de análise são as relações de preferências entre mundos, a determinar esta melhor opção é a busca pelo mundo maximal. Logo, a busca pelo melhor opção é indicada pela satisfação :

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \wedge x = c)$$

A verificação desta fórmula quando a constante c é cada um dos mundos do modelo indicará o mundo considerado o " mais preferível ". Ou seja, para cada mundo do modelo será feita esta consulta, para assim identificar a melhor decisão para o agente tomador de decisão. Deve ficar claro que há a possibilidade da existência de mais de um elemento que satisfaz a consulta referenciada.

O exemplo a seguir almeja apresentar um caso prático da busca pela melhor escolha com as preferência de um agente. Deve ficar claro ao leitor que este mesmo processo pode ser feito para um grupo de agentes, somente necessita-se agregar as preferências do grupo para encontrar o mundo " mais preferível " para o grupo em questão.

Exemplo 5.2.3 (Exemplo Consulta - 3)**.** *Considere o modelo $\mathfrak{M}$ apresentado anteriormente no exemplo 5.2.2. Conjecture que o agente α em questão queira fazer a compra de um carro, o qual deve possuir a propriedade de um desempenho alto e um consumo de baixo de combustível. Logo, este necessita verificar a satisfação $\varphi(x) = R_{d2}(x) \wedge R_{c1}(x)$ no mundo preferível, o qual será determinado de acordo com as relações de preferência para o agente α. Estas são :*

$$\preceq_{\alpha} = \{(w_4, w_1), (w_4, w_3), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_2, w_1), (w_4, w_1)\}$$

Considerando que $\Gamma = \{\alpha\}$, temos que verificar a constante "c" da formula $\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \wedge x = c)$ para as constantes $c_1^{\mathfrak{A}} = w_1, c_2^{\mathfrak{A}} = w_2, c_3^{\mathfrak{A}} = w_3$ e $c_4^{\mathfrak{A}} = w_4$. Analisando, primeiramente, quando $c = c_1^{\mathfrak{A}}$. temos que:

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \wedge x = c_1^{\mathfrak{A}})$$

Assim, não ocorre a satisfação, pois mesmo w_1 sendo um mundo maximal, não há relacionamento das duas relações com w_1. Quando $c = c_2^{\mathfrak{A}}$, temos que:

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \wedge x = c_2^{\mathfrak{A}})$$

Assim, não há a satisfação, pois este mundo fere a restrição inicial de ser maximal além de não ser possível a satisfação da fórmula analisada. Quando $c = c_3^{\mathfrak{A}}$*, temos que:*

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \land x = c_3^{\mathfrak{A}})$$

a qual é satisfatível visto que o mundo w_3 *é maximal e* $\mathfrak{I}\frac{w_3}{x} \models \varphi(x)$*, pois* $w_3 \in R_{d2}$ *e* $w_3 \in R_{c1}$*. Portanto temos que o mundo* w_3 *é escolhido pelo tomador de decisão. Concluindo o processo de análise, quando* $c = c_4^{\mathfrak{A}}$*, temos que:*

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \land x = c_4^{\mathfrak{A}})$$

Assim, não há a satisfação, pois fere a condição inicial de ser maximal além de não ser possível a satisfação da fórmula analisada.

Concluímos assim as consultas implementadas sobre a lógica para auxiliar a tomada de decisão. Na seção a seguir será apresentado um caso prático da aplicação da lógica auxiliando a tomada de decisão de um grupo de agentes.

5.3 Caso de Uso

O objetivo desta seção é modelar um caso onde a tomada de decisão por um grupo de agentes baseada na lógica $\mathcal{FODPA}$. Esta será baseada em uma problemática da escolha de um carro, a qual foi utilizada anteriormente neste trabalho quando se fez necessário um exemplo para facilitar o entendimento do leitor sobre certas definições.

A escolha por trabalhar sobre o problema da escolha de um carro surgiu diante da possibilidade de modelar o objeto sobre o qual será feita a decisão sobre diversos critérios. Não é uma tarefa complexa visualizar diversos atributos que um carro pode possuir, como também não se mostra como um atividade árdua analisar as diversas formas que este atributo pode expressar. Entretanto,a meta desta abordagem é auxiliar os tomadores de decisão em qualquer analise necessária sobre qualquer aspecto, mesmo individualmente ou em grupo.

O exemplo a seguir expõe a decisão de um grupo de agentes sobre uma configuração específica de uma carro. Esta será baseada nas preferências dos agentes sobre as características que um carro pode possuir e nas propriedades que estes rejeitam em um carro. Respeitando a estrutura hierárquica que este grupo de agentes possui.

Exemplo 5.3.1 (Decisão de um grupo de agentes)**.** *Conjecture o cenário onde um grupo de agentes* Γ *almejam escolher um carro de acordo com a preferência de cada um dos componentes deste grupo. Para expressar os carros foram utilizadas relações unárias que exteriorizam atributos que um carro pode possuir. Por exemplo, considere como* R_1 *a relação que descreve um carro com preço baixo, como* R_2 *o preço médio, como* R_3 *o preço alto, como* R_4 *o desempenho baixo, como* R_5 *desempenho médio, e assim sucessivamente para várias características que um carro pode assumir. A tabela a seguir expõe as características consideradas para este exemplo:*

R_1	=	Preço Baixo	R_{10}	=	Depreciação Baixa
R_2	=	Preço Médio	R_{11}	=	Depreciação Média
R_3	=	Preço Alto	R_{12}	=	Depreciação Alta
R_4	=	Desempenho Baixo	R_{13}	=	Custo Baixo
R_5	=	Desempenho Médio	R_{14}	=	Custo Médio
R_6	=	Desempenho Alto	R_{15}	=	Custo Alto
R_7	=	Consumo Baixo	R_{16}	=	Espaço Baixo
R_8	=	Consumo Médio	R_{17}	=	Espaço Médio
R_9	=	Consumo Alto	R_{18}	=	Espaço Alto

Para representar os carros sobre os quais será realizado a escolha, foram utilizados um conjunto de mundos $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$, onde para cada mundo há um tipo de carro com uma configuração diferente. A validade de uma relação com um mundo indica a presença da característica para o carro expressado pelo mundo em questão. Ou seja, a relação $R_1(c_1)$ indica que a característica R_1 é válida no mundo simbolizado para variável c_1.

Para o exemplo em questão uma observação deve ser feita sobre o modo como estas relações interagem com os mundos. Devido ao caráter exclusivo das propriedades, certas relações com um mundo geram a impossibilidade de relacionamento deste com outras. Por exemplo, a existência da relação $R_1(c_1)$ impossibilita haver $R_2(c_1)$ e $R_3(c_1)$, pois não há um carro com o preço baixo e com o preço médio simultaneamente. Tal verificação deve ser feita para as seis características utilizadas neste exemplo.

As cinco configurações de carros utilizadas neste exemplo são: Um carro com o preço alto, desempenho alto, consumo médio, depreciação média, custo médio e de baixo espaço interno. Este será o carro simbolizado pelo mundo w_1. Um carro com preço baixo, desempenho médio, consumo alto, depreciação alta e de baixo espaço interno. Este será o carro simbolizando pelo mundo w_2. Um carro com um preço alto, desempenho médio, consumo baixo, custo baixo e um baixo espaço interno. Este será o carro simbolizado pelo mundo w_3. Um carro de preço baixo, desempenho baixo, consumo médio, depreciação baixa, custo alto e um alto espaço interno. Este será simbolizado pelo mundo w_4. Por fim, um carro com desempenho médio, consumo médio, depreciação baixa, custo baixo e com um médio espaço interno. Este será simbolizado pelo mundo w_5.

Deve ficar claro ao leitor que nem todos os carros devem exteriorizar cada um dos seis tipo de característica, o que pode ser verificado pelo mundo w_5. Neste não há a característica "preço" sendo avaliada. Tal fato não deve ser analisado como a inexistência de um preço para o carro e sim como a impossibilidade de avaliar tal característica.

Suponha para o exemplo em questão que três agentes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ necessitam avaliar suas preferências para realizar a escolha de um carro, o qual deve satisfazer a necessidade de todos os envolvidos. Estes, possuem as seguintes relações de preferências que simbolizam a preferência de cada um sobre características específicas de um carro:

- $\sqsubseteq_{\alpha_1} = \{(R_3^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}}), (R_2^{\mathfrak{A}}, R_3^{\mathfrak{A}}), (R_4^{\mathfrak{A}}, R_7^{\mathfrak{A}}), (R_7^{\mathfrak{A}}, R_4^{\mathfrak{A}}), (R_6^{\mathfrak{A}}, R_{10}^{\mathfrak{A}}), (R_{18}^{\mathfrak{A}}, R_{17}^{\mathfrak{A}})\}$
- $\sqsubseteq_{\alpha_2} = \{(R_{13}^{\mathfrak{A}}, R_{14}^{\mathfrak{A}}), (R_{14}^{\mathfrak{A}}, R_{13}^{\mathfrak{A}}), (R_4^{\mathfrak{A}}, R_8^{\mathfrak{A}})\}$
- $\sqsubseteq_{\alpha_3} = \{(R_3^{\mathfrak{A}}, R_{18}^{\mathfrak{A}}), (R_{18}^{\mathfrak{A}}, R_3^{\mathfrak{A}}), (R_{18}^{\mathfrak{A}}, R_{13}^{\mathfrak{A}}), (R_{16}^{\mathfrak{A}}, R_{18}^{\mathfrak{A}}), (R_9^{\mathfrak{A}}, R_7^{\mathfrak{A}})\}$

Avalie também os seguintes conjuntos das relações rejeitadas para cada agente:

- $Rej_{\alpha_1} = \{R_{12}^{\mathfrak{A}}\}$
- $Rej_{\alpha_2} = \{R_9^{\mathfrak{A}}, R_{12}^{\mathfrak{A}}\}$
- $Rej_{\alpha_3} = \{R_{15}^{\mathfrak{A}}\}$

De posse destas relações de preferências e das relações rejeitadas para cada agente, podemos inferir as relações de preferências entre mundos. Para tal, precisamos primeiramente apresentar o modelo sobre o qual os agentes realizam suas avaliações. Considere o seguinte modelo $\mathfrak{M}$ onde as relações de preferências e os rejeitados para cada agentes são aqueles apresentados anteriormente junto desta definições:

- $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$
- $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$
- $c_1^{\mathfrak{A}} = w_1, c_2^{\mathfrak{A}} = w_2, c_3^{\mathfrak{A}} = w_3, c_4^{\mathfrak{A}} = w_4, c_5^{\mathfrak{A}} = w_5$
- *As seguintes validades para as relações:*

$$\begin{array}{lll}
R_1^{\mathfrak{A}} = \{w_2, w_4\} & R_2^{\mathfrak{A}} = \emptyset & R_3^{\mathfrak{A}} = \{w_1, w_3\} \\
R_4^{\mathfrak{A}} = \{w_4\} & R_5^{\mathfrak{A}} = \{w_2, w_3\} & R_6^{\mathfrak{A}} = \{w_1\} \\
R_7^{\mathfrak{A}} = \{w_3\} & R_8^{\mathfrak{A}} = \{w_1, w_4, w_5\} & R_9^{\mathfrak{A}} = \{w_2\} \\
R_{10}^{\mathfrak{A}} = \{w_4, w_5\} & R_{11}^{\mathfrak{A}} = \{w_1\} & R_{12}^{\mathfrak{A}} = \{w_2\} \\
R_{13}^{\mathfrak{A}} = \{w_3\} & R_{14}^{\mathfrak{A}} = \{w_2, w_4\} & R_{15}^{\mathfrak{A}} = \{w_1\} \\
R_{16}^{\mathfrak{A}} = \{w_1, w_2, w_3\} & R_{17}^{\mathfrak{A}} = \{w_5\} & R_{18}^{\mathfrak{A}} = \{w_4\}
\end{array}$$

Definidas as relações de preferências entre as relações unárias para os agentes, é possível, de acordo com a definição 5.1.6, apresentar as relações de preferência entre mundos de acordo com o conjunto de mundos apresentados.

Para cada agente e para cada relação, vamos analisar quais relações de preferência entre mundos podem ser inferidas. Analisando cada uma destas de acordo com os proposicionais rejeitados por cada agente.

Para o agente α_1:

- *Por* $(R_3^{\mathfrak{A}}, R_2^{\mathfrak{A}})$

  temos que $R_2^{\mathfrak{A}}$ *não se relaciona com nenhum mundo, logo nada pode-se inferir*

- *Por* $(R_2^{\mathfrak{A}}, R_3^{\mathfrak{A}})$

  temos que $R_2^{\mathfrak{A}}$ *não se relaciona com nenhum mundo, logo nada pode-se inferir.*

- *Por* $(R_4^{\mathfrak{A}}, R_7^{\mathfrak{A}})$

  temos que (w_4, w_3).

- *Por* $(R_7^{\mathfrak{A}}, R_4^{\mathfrak{A}})$

  temos que (w_3, w_4).

- *Por* $(R_6^{\mathfrak{A}}, R_{10}^{\mathfrak{A}})$

  temos que (w_1, w_4) *e* (w_1, w_5).

- *Por* $(R_{18}^{\mathfrak{A}}, R_{17}^{\mathfrak{A}})$

  temos que (w_4, w_5).

Para o agente α_2*:*

- *Por* $(R_{13}^{\mathfrak{A}}, R_{14}^{\mathfrak{A}})$

  temos que (w_3, w_4). *A relação* (w_3, w_2) *é desconsiderada pois* w_2 *pertence ao conjunto de mundos relacionados a uma relação rejeitada pelo agente em questão.*

- *Por* $(R_{14}^{\mathfrak{A}}, R_{13}^{\mathfrak{A}})$

  temos que (w_2, w_3) *e* (w_4, w_3)

- *Por* $(R_4^{\mathfrak{A}}, R_8^{\mathfrak{A}})$

  temos nada pode-se inferir, pois o único mundo relacionado à $R_4^{\mathfrak{A}}$ *também relaciona-se com* $R_8^{\mathfrak{A}}$.

Para o agente α_3*:*

- *Por* $(R_3^{\mathfrak{A}}, R_{18}^{\mathfrak{A}})$ *temos que* $(w_1, w_4), (w_3, w_4)$.
- *Por* $(R_{18}^{\mathfrak{A}}, R_3^{\mathfrak{A}})$ *temos que* (w_4, w_3). *A relação* (w_4, w_1) *é desconsiderada por em* w_1 *pertence ao conjunto dos mundos relacionados à relação rejeitada pelo agente em questão.*
- *Por* $(R_7^{\mathfrak{A}}, R_{18}^{\mathfrak{A}})$ *temos que* (w_4, w_3)
- *Por* $(R_{16}^{\mathfrak{A}}, R_{18}^{\mathfrak{A}})$ *temos que* $(w_1, w_4), (w_2, w_4), (w_3, w_4)$.
- *Por* $(R_9^{\mathfrak{A}}, R_7^{\mathfrak{A}})$ *temos que* (w_2, w_3).

Assim, temos as seguintes relações de preferência entre mundos :

- $\preceq_{\alpha_1} = \{(w_3, w_4), (w_4, w_3), (w_1, w_4), (w_1, w_5), (w_4, w_5)\}$
- $\preceq_{\alpha_2} = \{(w_3, w_4), (w_4, w_3), (w_2, w_3)\}$
- $\preceq_{\alpha_3} = \{(w_1, w_4), (w_3, w_4), (w_4, w_3), (w_4, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_4), (w_3, w_4), (w_2, w_3)\}$

De posse das relações de preferência entre mundos para cada agente, pode-se concluir o processo de agregação das preferências. Para tal, necessita-se analisar o modo como os agentes comportam-se de acordo com o grafo de prioridade. Considere o grafo apresentado na figura a seguir:

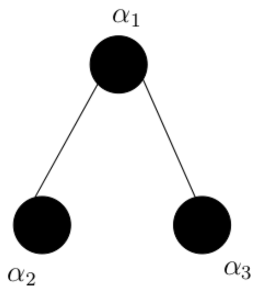

Figura 3: Grupo de três agentes em dois níveis.

Através desta figura podemos estipular a configuração de cada agente do grupo Γ*. Cada relação de preferência para os agentes deve ser analisada junto às relações dos outros agentes que compõem o grupo. A fórmula a seguir explica o processo de agregação:*

$$\Gamma = (\alpha_1/(\alpha_3||\alpha_2))$$

Vamos fazer o processo de agregação da esquerda para a direita. O primeiro passo seria operar $(\alpha_2||\alpha_3)$*, cujo resultado seria as relações* (w_3, w_4) *e* (w_4, w_3)*. Deste modo,* $\alpha_4/(\alpha_2||\alpha_3)$ *será as relações* (w_3, w_4) *e* (w_4, w_3) *unidas com as relações estritamente preferidas pelo agente* α*. Deste modo temos o seguinte conjunto de relações agregadas:*

$$\preceq_{\Gamma} = \{(w_3, w_4), (w_4, w_3), (w_1, w_4), (w_1, w_5), (w_4, w_5)\}$$

Para concluir o exemplo, vamos apresentar um caso onde as satisfações dos operadores apresentados nos itens $(viii)$ *e* (ix) *da definição 5.1.17. Considere que o grupo de agentes* Γ *chegou em um consenso que o carro devia ter uma baixa depreciação, pois o grupo deseja vender este carro em um período espaço de tempo, que o carro não pode ser pequeno, pois é um carro para quatro pessoas, como também não pode ser muito grande, pois a garagem estipulada para o carro não é para carros de grande tamanho e que o seu consumo não pode ser alto. Deste modo, o grupo de agente almeja um carro com a* *seguinte configuração* $\varphi(x) = R_{10}(x) \wedge \neg R_{16}(x) \wedge \neg R_{18}(x) \wedge \neg R_9(x)$*, a qual é equivalente a* $\varphi(x) = (R_{10}(x) \wedge (R_7(x) \vee R_8(x)) \wedge R_{17}(x))$*.*

Para validar a existência desta configuração de carro para o grupo em questão, necessita-se averiguar se há um mundo, dentre os apresentados, com o qual as relações unárias que compõe a fórmula se relacionam. Tal verificação será realizar através satisfações específicas, as quais foram expressadas nas consultas apresentadas na seção 5.2.

Primeiramente procede-se a consulta apresentada na seção 5.2.1, através desta há a verificação da existência de um mundo com as características desejadas. Esta será feita através da satisfação de fórmula $\exists x \varphi(x) = \exists x(R_{10}(x) \wedge (R_7(x) \vee R_8(x)) \wedge R_{17}(x))$ *de acordo com o modelo* $\mathfrak{M}$ *apresentado, ou seja, deve-se avaliar se* $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi(x)$*. Tal satisfação ocorre pois existe* $w \in W$ *onde substituindo* x *por* w *vale* $\varphi(x)$*, ou seja,* $\mathfrak{I}\frac{w}{x} \models \varphi(x)$ *pois existe um* $x' = w$ *tal que as relações da fórmula* $(R_{10}(x') \wedge (R_7(x') \vee R_8(x')) \wedge R_{17}(x'))$ *ocorrem.*

De posse da informação da existência de um mundo onda a fórmula $\varphi(x)$ *vale, passa-se ao segundo estágio análise de acordo com a seção 5.2.2. Nesta consulta-se a existência de um mundo "mais preferível" onde a fórmula* $\varphi(x)$ *ocorre. Tal verificação ocorre por meio da satisfação de* $\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x \varphi(x)$*. Esta ocorre pois existe um* $w' \in W$ *onde este é o elemento maximal de acordo com* $\preceq_{\Gamma}$ *e para* $x'' = w'$ *as relações* $(R_{10}(x'') \wedge (R_7(x'') \vee R_8(x'')) \wedge R_{17}(x''))$ *são válidas.*

Decorrida com sucesso a consulta sobre a existência de um mundo maximal, torna-se viável prosseguir para a análise proposta na seção 5.2.3, nesta há a busca pelo mundo "mais preferível" para o grupo Γ *em questão. Para cada mundo do modelo* $\mathfrak{M}$*, verifica-se se há a satisfação de* $\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \wedge x = c)$ *onde* c *simboliza cada constante do Modelo para os mundos registrados. Quando* $c = c_1^{\mathfrak{A}}$*, temos análise de* $\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \wedge x = c)$ *para o mundo* w_1*. A satisfação não ocorre visto que o mundo* w_1 *não é um mundo maximal de acordo com* $\preceq_{\Gamma}$*.*

A mesma falha verificada para quando $c = c_1^{\mathfrak{A}}$ *ocorre para quando* $c = c_2^{\mathfrak{A}}$*,* $c = c_3^{\mathfrak{A}}$ *e* $c = c_4^{\mathfrak{A}}$*, visto que estes mundos não são mundos maximais segundo* $\preceq_{\Gamma}$*. Quando* $c = c_5^{\mathfrak{A}}$ *temos que há a satisfação*

$$\mathfrak{I} \models \exists^{\Gamma} x(\varphi(x) \wedge x = c_5^{\mathfrak{A}})$$

pois w_5 *é um mundo maximal segundo* $\preceq_{\Gamma}$*,* $w_5 \in R_{10}$*,* $w_5 \in R_8$ *e* $w_5 \in R_{17}$*. Logo, temos que o mundo escolhido pelo grupo de agentes, caso estes queiram o carro "mais preferível", será o carro representado pelo mundo* w_5*.*

Uma observação deve ser feita sobre a possibilidade de busca por um mundo onde a fórmula seja válida, entretanto este não é um mundo maximal de acordo com as relações de preferência entre mundos para os agentes analisados. Ou seja, há um mundo, no conjunto de mundos, preferível à este mundo buscado na consulta.

De fato, sendo válida a Consulta - 1, é possível avaliar um mundo onde as propriedades expressas por $\varphi(x)$ *ocorrem. Basta verificar-se* $\mathfrak{I} \models \exists x(\varphi(x) \wedge x = c)$ *para* *todos os mundos do Modelo $\mathfrak{M}$, ou seja, para quando $x = c_1^{\mathfrak{A}}$, $x = c_2^{\mathfrak{A}}$, $x = c_3^{\mathfrak{A}}$, $x = c_4^{\mathfrak{A}}$ e $x = c_5^{\mathfrak{A}}$. Assim, teríamos somente a satisfação de $\mathfrak{I} \models \exists x(\varphi(x) \land x = c)$ para $c = c_5^{\mathfrak{A}}$.*

Outras satisfações sobre o modelo apresentado possibilitam averiguar diversas informações sobre o cenário modelado. Por exemplo, considere que queira-se averiguar se a propriedade Preço alto é válida no mundo w_3, a satisfação de $\mathfrak{I} \models R_3(c_3)$, a qual ocorre pois $w_3 \in R_3$. Conjecture que queria-se avaliar também se o agente α_4 rejeita um carro com o consumo de combustível alto, ou seja, $\mathfrak{I} \models Rej_{\alpha_3}(R_9)$, a qual é não ocorre, pois $R_9 \notin Rej_{\alpha_3}$.

Continuando a análise de satisfações que exteriorizam informações do modelo pode-se averiguar se o agente α_1 prefere um carro com grande espaço interno a um com pequeno espaço interno ou seja, $\mathfrak{I} \models R_{16} \sqsubseteq_{\alpha_1} R_{18}$, a qual não ocorre, pois $(R_{16}, R_{18}) \notin \sqsubseteq_{\alpha_1}$. Outro tipo de análise sobre relações de preferência que se pode consultar é se o mundo w_3 é preferível ao mundo w_2 pelo agente α_2, ou seja, $\mathfrak{I} \models w_2 \preceq_{\alpha_2} w_3$, a qual ocorre pois existem duas relações $R_n^{\mathfrak{A}}$ e $R_m^{\mathfrak{A}}$ tal que $(R_n^{\mathfrak{A}}, R_m^{\mathfrak{A}}) \in \sqsubseteq_{\alpha_1}$ através da qual pode-se inferir o par (w_2, w_3) pelo processo exposto na definição 5.1.6.

A pretensão do exemplo apresentado neste capítulo foi apresentar as potencialidades em modelar ambientes de tomada de decisão para um grupo de agentes. Espera-se que tenha ficado claro ao leitor todo o processo de definição dos mundos, que expressa as opções do objeto analisado para a decisão, como estas opções são qualificadas através das relações de preferências dos envolvidos e o processo de inferência destas relações.

Todo o processo de tomada de decisão foi abordado no exemplo apresentado. Desde o princípio onde modela-se todo o ambiente exposto, através dos componentes da sintaxe da lógica, até os processos de verificação e consultas, estes analisados por meio da semântica da lógica. Com isto, espera-se que todos os passos e estruturas apresentadas fiquem claras e a razão para a utilização das mesmas. Cada componente da sintaxe e semântica da lógica foi concebido para torna eficiente o processo de tomada de decisão.

A seção a seguir apresentará um estudo comparativo da $\mathcal{FODPA}$ com algumas abordagens consideradas relevantes para este trabalho. Estas contemplam não somente lógicas com agregação de preferências, como também lógicas cujo escopo não era diretamente tratar este tipo de problema entretanto são eficientes nesta problemática quando simples abstrações são feitas.

5.4 Paralelo entre a $\mathcal{FODPA}$ e abordagens relevantes

Nesta seção há a comparação da $\mathcal{FODPA}$ e outras abordagens que fazem uso da lógica matemática para expressar processos de decisão ou escolha. A escolha dos trabalhos procedeu-se através de influencia do mesmo para este trabalho ou pela relevância acadêmica da abordagem.

5.4.1 Apontamentos Comparativos sobre (GIRARD, 2008)

Como já citado em vários momentos durante este trabalho, a abordagem estrutura em (GIRARD, 2008) foi utilizada como inspiração para a elaboração da $\mathcal{FODPA}$. Como este trabalho almeja expor uma lógica eficiente diante da problemática de agregar preferências de um grupo de agentes e, através desta, alcançar um resultado, seria imprescindível buscar na literatura uma lógica funcionalmente semelhante. Assim, (GIRARD, 2008) mostrou-se de extrema relevância para esta lógica.

Componentes da sintaxe e semântica da lógica apresentada em (GIRARD, 2008) foram utilizados como inspiração para a elaboração de da $\mathcal{FODPA}$, em especial cita-se o método de agregação de preferências, a estrutura dos agentes e o conceito da relação de preferências. Tais estruturas podem ser encontradas na seção 4.2.

Posto em confronto o processo de agregação de preferências na $\mathcal{FODPA}$ com a concebida em (GIRARD, 2008) percebe-se que somente a adição do conceito de uma relação rejeitada foi incluída. Contudo, este simples conceito impõe uma restrição de forte impacto nas relações de preferências. Independente do nível do agente, deve-se averiguar se dentre os mundos “ vencedores ” ou “ preferíveis ” se não há um que seja invalidado pela rejeição de um agentes do grupo. Esta oferece um ganho de qualidade ao processo de agregação no que se refere em contemplar as necessidades do grupo como um todo. Intuitivamente estas relações rejeitadas deve ser vistas como fatos que os agentes analisam como inaceitáveis, logo devem ser desconsiderados independente do nível hierárquico do agente perante o grupo em questão.

Um segundo fato relevante ao confrontar as duas abordagens refere-se a capacidade de avaliar um mundo “ mais preferível ”. Diante da semântica apresenta em (GIRARD, 2008) percebe-se que este não se preocupa em expressar as relações de preferências de modo a haver um mundo considerado maximal diante das relações de preferências do grupo. A existência de um mundo onde a informação avaliada seja válida diante da condição que este seria preferível ao mundo atual era satisfatória. Contudo para a $\mathcal{FODPA}$ não era suficiente.

Para a nossa abordagem, tal conceito de foi extendido á uma verificação ao mundo maximal segundo as relações de preferências do grupo de agentes. Certas restrições foram impostas às relações de preferências binárias entre mundo de modo há facilitar a existência de um mundo maximal. Este era inevitavelmente necessário para a correta satisfação de uma fórmula especifica da semântica de $\mathcal{FODPA}$. Pela satisfação desta, examina-se a existência de um mundo maximal, ou seja, “ mais preferível ”, no qual a fórmula avaliada era satisfatível.

Um terceiro apontamento relevante para a comparação das duas abordagens refere-se ao método de exposição do grupo de agentes. (GIRARD, 2008) apresenta uma álgebra com operadores específicos inspirada em (ANDRÉKA; RYAN; SHOBBENS, 2002) para manifestar uma hierárquica de um grupo de agentes segundo um grafo de prioridade. Este abordagem almejando simplificar o processo de análise do grupo de agentes, removeu certos conceitos utilizados garantindo somente a transcrição do grafo, sobre o qual o grupo estava hierarquizado, para uma fórmula que representa o grupo, esta utilizada no processo de agregação de preferências.

Outro fato importante a ser mencionado sobre as estruturas de ambas as abordagens, refere-se ao modo que foram concebidas as relações de preferências para os trabalhos confrontados. Em (GIRARD, 2008) as relações de preferências entre mundos para os agentes era postas junto ao Modelo de Kripke pré-estabelecido, para, assim, proceder a agregação das preferências.

A $\mathcal{FODPA}$ infere tais informações através de relações sobre relações unárias que expressam propriedades. Tal processo torna-se mais intuitivo e simples àqueles que modelem os problemas de decisão pela lógica. Além disto, as relações binárias que exteriorizam as preferências entre mundos são restritas á certas propriedades. Tal limitação foi imposta visando evitar certos problemas durante o processo de agregação de preferências. Segundo os *Postulados de Arrow*, apresentados na seção 4.1, a existência de ciclos nas relações de preferências atrapalham o processo intuitivo de comparar os resultados. Assim, tratar estes casos torna-se de grande relevância para este trabalho, o qual não é especificamente feito em (GIRARD, 2008).

Caso o leitor esteja indagando-se sobre o ciclos existentes nas relações entre mundos, tal problema foi atentado pela a nossa abordagem. Estas são o caso onde há uma relação de preferência não estrita entre os mundos. Este ocorre diante da grande variedade de relações, que expressam propriedades, sobre os mundos. Este ciclos informa ao tomado de decisão que as relações que caracterizam estes mundos não foram suficientes para discriminá-los, logo estes são indiferentes e não podem ser considerados maximais segundo as relações de preferências analisadas.

5.4.2 Apontamentos Comparativos sobre Outras Abordagens

A utilização da Lógica Matemática como ferramenta relevante academicamente para a modelagem e construção de processos de interação entre agentes. Os quais almejam um resultado através de métricas comparativas, ou seja, um processo de escolha por meio de um métrica de utilidade comparativa. Deve ficar claro ao leitor que não necessariamente há a clara especificação de um processo de decisão, entretanto intuitivamente pode-se espera tal resultado.

Uma área de grande relevância acadêmica que aborda conceitos de tomada de decisão de modo não direto é a *Teoria dos Jogos*. Segundo (VASCONCELOS, 2007) um *jogo* a luz da *Teoria dos Jogos* seria uma situação de competição ou conflito, como também de cooperação e interdependência, onde agentes interagem entre si através da decisão sobre ações, estas são feitas através de métricas analíticas que visam otimizar a satisfação dos envolvidos. Ou seja, os agentes promovem tomadas de decisão almejando alcançar um estágio de satisfação melhor que o atual.

Dentre os trabalhos de grande relevância acadêmica que aplica a Lógica Matemática sobre a *Teoria dos Jogos*, destaca-se (VASCONCELOS, 2007). Nesta apresenta-se uma lógica modal de primeira-ordem, baseada na lógica CTL, a *Game Analysis Logic*, para raciocinar sobre jogos. È concebida uma sintaxe e semântica bem definida através das quais é possível modelar uma ambiente de tomada de decisão multiagente, onde as decisão são baseadas em métricas de analíticas de grande confiança como equilíbrio de Nash, equilíbrio de subjogo perfeito, e *Core*.

Contudo, em contraste com a $\mathcal{FODPA}$, a lógica proposta em (VASCONCELOS, 2007) não apresenta um nítido processo de agregação de preferências e de hierarquização dos agentes como o exposta neste trabalho. Mesmo com a possibilidade de abstrair tais conceitos de forma indireta, o escopo da *Game Analysis Logic* não aborda nitidamente tais processos.

Continuando a análise segundo trabalhos ligados à Teoria do Jogos, em (ROY, 2010) há elaboração de uma Lógica Epistêmica Híbrida para jogos de estratégias. Há a conceituação do chamado *game in extensive form* , este assemelha-se ao nosso Modelo de Kripke. A decisão neste jogo extensivo baseia-se nas preferências dos agentes em um componente chamado pela abordagem de “terminal”. Este seria o mundo onde deve-se alcançar, ou seja, também há uma noção de preferências entre mundos, entretanto limita-se a somente isto a decisão dos agente. Outra observação deve ser feita sobre a complexidade de abordagem em tratar jogos entre grupos de agentes.

Na abordagem apresentada em (PACUIT; ROY, 2012) há uma evolução do proposto em (ROY, 2010). Novos operadores baseados em crenças são adicionados à semântica da lógica. Estes operadores foram concebidos de acordo com a validade de fórmulas em um mundo preferível dentro de uma “corrida”. Ou seja, um agente crê em uma fórmula se esta vale em um mundo preferível. Tal conceito é semelhante ao composto pela nossa abordagem, entretanto a contribuição desta para a decisão permanece na análise das estratégias. A decisão propriamente dita é baseado em um Equilíbrio de Nash, o que atribui grande credibilidade à abordagem no que tange à escolha da melhor opção.

Já em (TAMMINGA, 2013) há a concepção de uma Lógica Deôntica para tratar a estratégia de decisão em um jogo. Este utiliza conceitos da Teoria dos Jogos junto à Lógica Condicional para analisar as possíveis estratégias de um jogo e, através de um Equilíbrio de Nash, analisar as melhores destas para serem escolhidas de acordo com as fórmulas envolvidas na obrigação. Tal modelo mostra-se tão bom ao anterior visto que as melhores estratégias serem elucidadas através do Equilíbrio de Nash, entretanto mostra-se extremamente complexo e oneroso, em relação à $\mathcal{FODPA}$, visto a necessidade de constantes transformações no modelo.

Também utilizando o conceito da Lógica Deôntica, em (OSHERSON; WEINSTEIN, 2014) há a elaboração de modalidades deôntica baseadas em preferências para expor fórmulas e proposições que tratam normas. A intuição do operador é que somente há um obrigação sobre um fórmula em um mundo atual se para todo mundo preferível ao mundo atual, tal informação é válida. Este trabalho mostra menos intuito que (TAM-

MINGA, 2013), entretanto também é possível abstrair um processo de decisão baseado nestas normas obrigatórias baseadas na satisfação de fórmulas.

Em (HINDRINKS; VISSER; JONKER, 2012) há a elaboração de uma lógica baseada em preferências para problemas multicritérios. Tal abordagem mostra-se extremamente relevante academicamente por especificar-se em tratar este tipo de problema. Para analisar os múltiplos critérios, esta baseia-se em um pré-ordem total do critérios analisados. Assim, poderia se processar da escolha de acordo com uma ordem lexicográfica.

Em contraste com a nossa abordagem, (HINDRINKS; VISSER; JONKER, 2012) apresenta um modo de analisar as preferências não tão intuitivo. Ordenar todos os critérios, caso essas sejam de grande quantidade, torna-se uma tarefa extremamente onerosa e pouco usual. Outra desvantagem, diante à abordagem proposta neste trabalho, é a não existência de um operador explícito para grupo de agentes. Percebe-se na abordagem que há a possibilidade de elaborar uma pré-ordem total para grupos, entretanto tal operação seria uma extensão ao inicialmente elaborado.

Em (XIONG; SELIGMAN, 2011) há a elaboração de uma Lógica Modal Híbrida para raciocinar sobre uma escolha racional. Neste há concepção de uma escolha racional de acordo com relações de preferências entre mundos, onde há a escolha racional sobre uma fórmula φ se e somente se esta é válida no mundo considerado maximal de acordo com as relações de preferências apresentadas.

Esta análise feita por (XIONG; SELIGMAN, 2011) segundo a restrição de ser maximal o mundo referenciado assemelha-se ao operador da $\mathcal{FODPA}$ que indica a escolha por um mundo “ mais preferível ”. Entretanto, este restringe-se o ambiente a agentes, o que limita a aplicação da lógica, e as relações de preferências são baseadas em uma ordem total dos mundos, o que não se mostra muito intuitivo em aplicações complexas.

Concluímos, assim, a análise comparativa de $\mathcal{FODPA}$ com os trabalhos de relevância acadêmica que vislumbram a tomada de decisão através da Lógica Matemática. Grande partes dos trabalhos analisados faz uso da Lógica Modal, logo como esta é uma extensão da Lógica de Primeira Ordem, considerou-se relevante promover tais paralelos.

O capítulo a seguir será apresenta a conclusão do trabalho apresentando os resultados expressivos da $\mathcal{FODPA}$. Será apresentado também as perspectivas futuras para esta abordagem como também trabalhos de refinamento sobre a sintaxe e semântica da lógica.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Neste capítulo vamos comentar as conclusões do trabalho analisando cada componente da sintaxe e semântica da lógica. Este será feito através de comentários seguindo a construção racional da lógica. Após isto, concluindo o capítulo, será apresentada as perspectivas futuras para este trabalho.

6.1 Conclusões

Nosso trabalho consistiu em criar uma Lógica de Primeira Ordem, baseada no exposto por (EBBINGHAUS, 1994), para modelar e resolver Problemas de Decisão Multicritérios para Grupos. Como citado anteriormente, a Teoria da Decisão é objeto de estudo desde tempos remotos, sendo analisada como ciência por grandes pensadores e filósofos como Aristóteles, Platão, Tomás de Aquino e outros. Devido a sua aplicabilidade em diversos meios, o estudo da Teoria da Decisão tornou-se notório em múltiplos ramos de pesquisa acadêmica como Filosofia, Psicologia, Economia, Estatística e Ciência da Computação. Nesta, está intimamente ligada às linhas de Pesquisa Operacional, Inteligência Artificial e Teoria do Jogos.

O aperfeiçoamento dos estudos continuou durante a primeira metade do século XX até chegar ao seu clímax em 1968 com a elaboração de (RAIFFA, 1968), o qual é considerado como o primeiro grande trabalho de relevância específica da área. Segundo este, Teoria da Decisão estava intuitivamente ligada às áreas de estatística e Teoria do Jogos. Assim, independente da área, o processo de escolha deveria ser analisado sobre um olhar estatístico e probabilístico das opções. Deveria também ser apreciado o modo como os tomadores de decisão relacionam-se entre si e com o ambiente, para, deste modo, determinar como estes podem influenciar de forma tendenciosa a tomada de decisão. Uma variação dos Problemas de Decisão usais são os aqueles onde vários objetivos devem ser analisados para uma correta escolha, estes são os Problemas de Decisão Multicritério.

Os Problemas de Decisão Multicritério ou Multiobjetivo são uma área de estudo da analise de decisão multicritério, em inglês *Multiple-criteria decision-making* (MCDA), esta é uma subdisciplina da área de Pesquisa Operacional que explicitamente considera múltiplos critério em um ambiente de tomada de decisão.

Estes problemas são um classe dos problemas de decisão usuais, onde basicamente aborda uma problemática onde se faz necessário a escolha de uma alternativa ou opção dentre diversas. Tal ação é condicionada através de uma análise do benefício ou utilidade que cada alternativa opção pode oferecer ao tomador de decisão. Os problemas de multicritério ou multiobjetivo são uma variação destes, onde cada alternativa/opção é composta por várias variáveis. Estas podem ser vistas como opções internas à cada alternativa. Seria como se cada opção fosse composta por pequenas opções, disto provem o nome multiobjetivo ou multicritério.

Devido a multiplicidade de áreas que comportam o estudo da Teoria da Decisão, surgiram vários métodos de modelagem e solução deste tipo de problemas. Impulsionados pela dificuldade de resolução deste tipo de problema, pesquisadores ligados à Lógica Matemática e à Inteligência Artificial lançaram-se em busca de soluções eficientes para tal problemática. O sucesso destes veio com a elaboração de diversas técnicas e metodologias de solução. Dentre estas destaca-se a Lógica Matemática.

Este trabalho inspirou-se da Lógica de Primeira Ordem, apresentada por (SKOLEM, 1922), e a Lógica de Preferências, proposta por (WON WRIGHT, 1963), para conceber uma lógica que faz uso de uma σ-Estrutura e de fórmulas com interpretações específicas para modelar e resolver os MCDP para grupos. Esta lógica foi nomeada de $\mathcal{FODPA}$, *First Order Logic for Decision Problems with Preference Aggregation*, a qual mostrou-se apta em modelar e resolver este tipo de problema.

A primeira dificuldade em formalizar este tipo de problema baseou-se em identificar e caracterizar o objeto ou fato sobre o qual será feita a escolha. Como solução para este problema, a modelagem utiliza conceitos da Lógica de Primeira Ordem. Estes são o σ-termos, o Vocabulário σ de símbolos e de fórmulas para descrever e qualificar cada critério necessário a ser analisado durante o processo de escolha. Concluindo o processo de modelagem, utiliza-se uma σ-Estrutura que expressa o modo como os componentes do ambiente se relacionam entre sim.

Diante da grande complexidade que estes ambientes possuem e pela grande carga de informações que este deve exteriorizar, conceber este ambiente mostra-se como uma tarefa árdua e onerosa. Entretanto, devido a potencialidade da σ-Estrutura, da Lógica de Primeira Ordem, modelar o ambiente não mostrou-se muito complexo. Obtivemos sucesso em modelar este ambientes com a componentes não tão complexos definidos através do Vocabulário σ e da Linguagem sobre este vocabulário.

Outro problema amplamente exteriorizado pela literatura trata-se do processo de decisão, ou seja, como indicar a escolha em si. Solucionamos este empecilho com o simples conceito de satisfação através de uma interpretação que também baseado na Lógica de Primeira Ordem. A simples satisfação de uma fórmula e dos símbolos da Linguagem sobre o vocabulários σ formalizam consultas sobre o ambiente modelado. Através destas, analisa-se o problema em questão e, por meio elementos específicos da semântica da lógica, realiza-se a tomada de decisão. Ou seja, a satisfação anuncia o processo de escolha.

Uma observação deve ser feita sobre método de caracterização das opções analisadas na tomada de decisão. Expressar propriedades através de relações unárias não é usual na literatura básica da área. Contudo, esta mostrou-se eficaz em caracterizar os mundos, ou seja, em delimitar as opções analisadas na tomada de decisão. Ao contrário do usual onde as opções são assinaladas diretamente, este abordagem descreve as propriedades e, segundos estas, as opções são descritas.

A utilização de relações binárias para expressar as preferências dos agentes oferece um carácter intuitivo à métrica de utilidade usada. Comparar propriedades através de relações binárias não é uma tarefa onerosa e facilita o processo de interação com os tomadores de decisão, por esta razão, tal método foi utilizado.

Como foi tratado o MCDP para grupos, é imprescindível que haja um método de analisar todos os envolvidos no processo de escolha. Na literatura referenciada, esta análise remete a "ouvir" e "hierarquizar" os agentes. Por meio da técnica utilizada para agregar as preferências e ordenar os agentes, todos os envolvidos influenciam no processo de escolha. Esta pode ser feita de modo direto, por meio das relações de preferências, ou indireto, através das rejeições dos agentes.

Uma segunda característica que agregar qualidade ao processo de agregação é a álgebra utilizada para expor os agentes. Hierarquizar os agentes segundo uma ordem direta facilita a modelagem do problema. Ou seja, a estrutura de ordem baseada no grafo de prioridade apresentado expõe uma métrica de ordenação dos agentes de fácil compreendimento e rápida implementação.

Posto em contraste com as abordagem mais significantes da literatura, cujo escopo é semelhante à nossa abordagem, a $\mathcal{FODPA}$ mostra-se equiparável àquelas regularmente referenciadas na literatura. Como mencionados anteriormente na seção 5.4, a $\mathcal{FODPA}$ apresenta melhorias diante da métrica proposta por (GIRARD, 2008) e mostra-se funcionalmente capaz de realizar a tomada de decisão de modo eficiente e coerente perante os envolvidos no processo.

Diante da notoriedade de casos complexos que os Problemas de Decisão podem assumir. A $\mathcal{FODPA}$ mostra-se eficiente em modelar e propor uma solução adequada aos requisitos impostos pelo tomador de decisão. De fato, o trabalho carece de estruturas avaliativas e testes comparativos mais eficientes. Entretanto, se faz notório a eficácia desta diante da problemática que se propôs a resolver.

6.2 Trabalhos Futuros

Mesmo mostrando-se eficaz em resolver a problemática que se propôs a tratar, há a clara percepção que certas estruturas da $\mathcal{FODPA}$ podem ser melhoradas. Devido à grande quantidade de componentes que a compõe, explorar potencialmente de cada um destes, segundo todas as formas de um MCDP, torna-se um trabalho oneroso e complexo.

Muito pode-se evoluir diante dos componentes da lógica. Em um primeiro momento seria válido analisar algumas abordagens presentes na literatura que tratam a agregação de preferências. Há uma variedade de abordagens com condutas singulares sobre o método de agregação e sobre as propriedades que a relação de preferência pode assumir. Avaliar cada uma destas pode propor melhorias e evoluções ao trabalho.

Um conceito que pode ser explorado é a semântica das fórmulas, em especial aquela que trata dos mundos " mais preferíveis ". Durante a concepção destas, utilizados neste abordagem, uma grande variedade de modos de analisar os mundos surgiu. Uma destas foi a apreciação em paralelo ás lógicas condicionais. Por intermédio destas, seria possível guiar a satisfação das fórmulas e diferenciá-las segundo as relações necessárias para chegar a conclusão dos mundos preferíveis.

Uma segundo conceito que pode ser explorado seria aplicar uma métrica temporal, com carácter restritivo, como condição a ser satisfeita para a tomada de decisão. Esta instituiria um conceito dinâmico às relações de preferência, ou seja, estas pode mudar segundo um tempo específico.

A aplicação de pesos às relações de preferências manifestou-se como uma característica significante. Por meio desta funcionalidade, seria capaz de promover varreduras otimizadas sobre os mundos, evitando, deste modo, empates e análises insignificantes

Há em (KACI, 2011) uma variedade de modos de conceber estas relações de preferência, seria válida explorar estes casos diante das variações dos MCDP. Não somente por meio das Lógicas Condicionais, como apresentado anteriormente, como também utilizar conceitos ligados às lógica ponderadas e às linguagens gráficas.

Como nossa abordagem tomou como característica relevante a capacidade de operar em ambientes com um ou vários agentes, uma estrutura otimizada de hierarquização destes agregaria muito valor ao trabalho. Há um arcabouço de uma ideia sobre um grafo de prioridade para os agentes. Este possuiria atualizações dinâmicas, espera-se aplicar esta funcionalidade às próximas versões deste trabalho.

Explorar outros métodos de agregação das preferências dos agentes seria válido, visto que há uma grande quantidade conceitos a serem explorados, especialmente sobre as relações de preferências e sobre as preferências estritas. Há em (KACI, 2011) diversos bons métodos de agregação de preferências que podem ser usados como estímulo e inspiração para otimizar o método atual. Pode-se citar como exemplo a *Lógica Fuzzy*.

Um trabalho futuro considerável para esta abordagem seria a axiomatização da lógica. Através desta, pode-se inferir fórmulas derivadas a partir de um pequeno e definido conjunto de sentenças. Também é possível, por meio destas axiomas, explorar o relacionamento conceitos preferência forte e fraca, por exemplo, que incluiria uma nova dimensão de análise na tomada de decisão.

A primeira versão da $\mathcal{FODPA}$ era baseada na Lógica Modal proposta por (KRIPKE, 1963). Há uma versão iniciada para concepção dos conceitos aplicados à $\mathcal{FODPA}$ de acordo com os moldes da Lógica Modal clássica. Também almeja-se analisar uma versão através de uma Lógica Modal de Primeira Ordem .

Para explorar a potencialidade da linguagem da $\mathcal{FODPA}$ seria satisfatória a elaborações de estruturas que facilitarem teste sintáticos e semânticos da lógica. Entre estes podemos citar como importantes:

- A implementação de uma ferramenta de modelagem para a $\mathcal{FOPDA}$ semelhante à apresenta em (VASCONCELOS, 2007).

- A concepção do *Tableux Semântico* para estabelece estruturas que permitem a representação e a dedução formal de conhecimento seria de grande importância para este trabalho. Em especial para contribuir para o estudo acadêmico da $\mathcal{FODPA}$.

- Elaborar formas de verificação e validação da lógica.

- Utilização de axiomas e regras matemáticas para provar a corretude do sistema através de uma Verificação Dedutiva.

- Para analisar a corretude da lógica, seria válido realizar a verificação dos modelos, (*Model Checking*), já que nossa abordagem trata-se de um sistema de estados finitos concorrentes.

REFERÊNCIAS

ALCHOURRON, C.; GÄRDENFORS, P.; MAKINSON,D. *On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions.* The Journal of Symbolic Logic, Volume 50(2), 1985. p. 510-530.

ANDRÉKA, H.; RYAN, M.;SHOBBENS,P-Y. *Operators and laws for combining preference relations.* Journal of logic and computation, Oxford Univ Press, Volume 12, Número 1, 2002. p. 13-53.

ARROW, K. *Social choice and individual values.* Cowles Commission Mongr. No. 12. Wiley, 1951.

ARROW, K.; SEN, A.; SUZUMURA, K. *Handbook of Social Choice & Welfare.* Elsevier. Volume 2, 2010.

AUMANN, R.; BRANDENBURGER, A. *Epistemic conditions for Nash equilibrium.* Econometrica: Journal of the Econometric Society, JSTOR,1995. p. 1161-1180.

BELIAKOV, G.; PRADERA, A; CALVO,T. *Aggregation functions: A guide for practitioners.* Springer, Volume 221, 2007.

BISDORFF, R. *Preference aggregation with multiple criteria of ordinal significance.* University of Luxembourg, Luxemburgo, 2004.

BLACKBURN, P.; DE RIJKE, M.; VENEMA, Y. *Modal logic.* Cambridge University Press, volume 53, 2002.

BOUTILIER, C. *Toward a Logic for Qualitative Decision Theory.* KR Journal, Volume 94, 1994. p. 75-86.

BRANS, J.; VINCKE, P. *A Preference Ranking Organisation Method:(The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making).* Management Science, JSTOR, 1985. p. 647-656.

BUCHANAN, L.; O'CONNELL, A. *Uma breve história da tomada de decisão.*Harvard Business Review, Volume 1, 2006. p. 20–29.

CALVO, T.; MAYOR, G,; MESIAR, R. *Aggregation operators: new trends and applications.* Springer Science & Business Media, Volume 97, 2002.

CALVO, T.; BELIAKOV, G. *Aggregation functions based on penalties.* Fuzzy sets and Systems, Elsevier, Volume 161, Número 10, 2010. p.1420-1436.

CHAMBERS C.; HAYASHI, T. *Preference aggregation with incomplete information.* Econometrica, Wiley Online Library, Volume 82, Número 2, 2014. p.589-599.

CHANKONG, V.; HAIMES, YY.; THADATHIL, J; ZIONTS, S. *Multiple Criteria Optimization; A State of the Art Review.* Springer, 1985. p.36-90.

CHO, K. *Multicriteria decision methods: an attempt to evaluate and unify.* Mathematical and computer modelling, Elsevier, Volume 37, Número 9, 2003. p.1099-1119.

DESANCTIS, G.; GALLUPE. *A foundation for the study of group decision support systems* . Management science, INFORMS, Volume 33, Número 5, 1987. p.589-609.

DEITRICH, F.; LIST, C.. *Arrow's theorem in judgment aggregation* . Social Choice and Welfare, Springer, Volume 29, Número 1, 2007. p.19-33.

EBBINGHAUS, H-D. *Mathematical logic* . Springer Science & Business Media, 1994.

EKLUND, M. *On how logic became first-order*. Nordic Journal of Philosophical Logic, Volume 1, Número 2, p. 147-167, 1996.

FISCHER, K.; RUB, C.; VIERLE, G. *Decision theory and coordination in multiagent systems.* Deutsches Forschungszentrum fur Kunstliche Intelligenz, Berlin, Deutschland, 2011.

FØLLESDAL, D.; HILPINEN, D. *Deontic logic: An introduction.* Springer, 1971.

GIORDANO, L.; GLIOZZI,V.; OLIVETTI, N.; POZZATO, G. *Analytic tableaux for KLM preferential and cumulative logics.* Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, Language and Computation, Springer, 2005. p. 666-681.

GIRARD, P. *Modal Logic for Belief and Preference Change.*Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, Fevereiro, 2008.

GRECO, S.; MATARAZZO, B.; SLOWINSKI, R. *Rough sets theory for multicriteria decision analysis.* European journal of operational research, Elsevier, Volume 129, Número 1, 2001. p. 1–47.

HALLDÉN, S. *On the Logic of "Better".* Philosophy, Volume 35, 1957. p.111.

HILBERT, D. *Prinzipien der Mathematik und Logik.* Unpublished notes to a course given at Gottingen in the winter semester , Volume 8, 1917.

HINDRINKS, K.; VISSER, W.; JONKER, C. *Multi-attribute preference logic.* Principles and Practice of Multi-Agent Systems, Springer, 2012. p. 181-195.

HINTIKKA,J. *Knowledge and belief.* Cornell University Press, Ithaca, NY,1962.

HUBNER, J.; SICHMAN,J. *Aplicação de Organização de Sistemas Multiagentes em Futebol de Robôs.*Anais da XI Escola de Informática da Sociedade Brasileira de Computação,1–19,2003.

IVANCEVIC, V.; IVANCEVIC, T. *Computational mind: a complex dynamics perspective.*Springer, Science & Business Media, Volume 60, 2007.

KACI, S. *Working with Preferences: Less Is More.* Springer Science & Business Media 2011.

KRAUS, S.; LEHMANN, D.; MAGIDOR, M. *Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics.*Artificial intelligence, Elsevier, Volume 44, Número 1, 1990. p.167-207.

KRIPKE, S. *Semantical Considerations on Modal Logic.* Acta Philosophica Fennica, Helsinki, Finlândia, Volume 16, 83–94, 1963.

KECK, S.; DIECIDUE, E.; BUDESCO, D. *Group decisions under ambiguity: Convergence to neutrality.* Journal of Economic Behavior & Organization, Volume 103, 2014. p.60-71.

KEENEY, R.; RAIFFA, H. *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs.* Cambridge university press, Cambridge, 1993. Este livro foi publicado originalmente em 1976.

KOOI, B.; TAMMINGA, A. *Conditional obligations in strategic situations.* In: Proceedings of the 3rd International Workshop on Normative Multiagent Systems, Luxemburgo, 2008.

KORHONEN, P.; MOSKOWITZ, H.; WALLENIUS, J. *Multiple criteria decision support-A review.* European Journal of Operational Research, Elsevier, Volume 93. Número 3, 1992. p.361-375.

LEWIS, C. *A Survey of symbolic logic.* V, Berkeley (Cal.), 1918.

LIU, F. *Von wright's "the logic of preference" revisited.* Synthese, Volume 175, Número 1, Springer, 2010. p.69-88.

LIU, F. *Reasoning about Preference Dynamics.*Volume 354, Springer, 2011

MCCARTHY, J; HAYES,P.*Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence.*Stanford University USA, 1968.

MORGENSTERN, O; VON NEUMANN,J.*Theory of games and economic behavior.*Princeton University Press, 1953.

MORRIS, S. *The logic of belief and belief change: A decision theoretic approach.* Journal of Economic Theory, Elsevier, Volume 69, Número 1, 1996. p. 1-23.

OSHERSON, D.; WEINSTEIN, S. *Deontic modality based on preference.* arXiv preprint arXiv:1409.0824. 2014.

PACUIT, E.; ROY, O. *Epistemic foundations of game theory.* Stanford encyclopedia of philosophy, Edward N. Zalta(ed), Stanford, CA , USA, 2012.

PATTY J.; PENN, E. *Aggregation, Evaluation, and Social Choice Theory.* The Good Society, Penn State University Press, Volume 24, Número 1, 2015. p.49-72.

PEREIRA, M.; FONSECA, J. *Faces da decisão: as mudanças de paradigmas e o poder da decisão.* Makron Books, São Paulo, Brasil, 1997.

PETERSON, M. *An introduction to decision theory.* Cambridge University Press, 2009.

PRATT, R. *Semantical consideration on floyo-hoare logic.*Foundations of Computer Science, 17th Annual Symposium on, IEEE, 1976. p. 109-121.

RAIFFA, H. *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices under Uncertainty.* Addison-Wesley, New York, 1968.

RIERA, J.; TORRENS, J. *Aggregation functions on the set of discrete fuzzy numbers defined from a pair of discrete aggregations.* Fuzzy Sets and Systems, Elsevier, Volume 241, 2014. p. 76-93

ROUBENS, M. *Choice procedures in fuzzy multicriteria decision analysis based on pairwise comparisons.* Fuzzy Sets and Systems, Elsevier, Volume 84, Número 2, 1996. p. 135-142.

ROY, B. *Classement et choix en présence de points de vue multiples.* RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle, EDP Sciences, Volune 2, Número V1, 1968. p.57-75.

ROY, O. *A dynamic-epistemic hybrid logic for intentions and information changes in strategic games.* Synthese , Volume 171, Número 2, Springer, 2009. p. 291-320.

ROY, O. *Epistemic logic and the foundations of decision and game theory.* Journal of the Indian Council of Philosophical Research, Volume 27, Número 2, Citeseer, 2010. p. 283-314.

SCHMIDT, A. *Processo de apoio à tomada de decisão – Abordagens: AHP e MACBETH.*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – UFSC, 1995.

SKOLEM, T. *Einige bemerkungen zur axiomatischen begründung der mengenlehre.*Matematisk-naturvidenskabelig klasse, No 6, 1922.

TAMMINGA, A. *Deontic logic for strategic games.* Erkenntnis, Springer, Volume 78, Número 1, 2013. p.183-200.

UREÑA, R.; CHICLANA, F.; MORENTE, J.; HERRERA-VIEDMA, E. *Managing Incomplete Preference Relations in Decision Making: A Review and Future Trends.* Information Sciences, Elsevier, 2015.

VAN BENTHEM, J.; VAN OTTERLOO, S.; ROY,O. *Preference logic, conditionals and solution concepts in games.* Citeseer, 2005.

VAN BENTHEM, J. *Erratum:"Rational Dynamics And Epistemic Logic In Games".* World Scientific, Volume 9, Número 2, 2005. p.377-409.

VAN DER TORRE, L.; TAN, Y-H. *Prohairetic deontic logic and qualitative decision theory.*. In: Proceedings of AAAI Spring Symposium on Qualitative Preferences in Deliberation and Practical Reasoning. Menlo Park, CA: AAAI Press, 1997. p. 103-111.

VAN HEES, M.; ROY, O. *Intentions and plans in decision and game theory.* Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam, 2006.

VAN OTTERLOO, S. *A strategic analysis of multi-agent protocols.* Citeseer, 2005.

VASCONCELOS, D. *Lógica Modal de Primeira-ordem para Raciocinar sobre Jogos.* Tese de Doutorado, PUC-Rio, 2007.

VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. *Game theory and economic behavior.* Princeton, Princeton University, 1944.

VON WRIGHT, G. *Deontic logic.* Mind, JSTOR, 1951. p.1-15.

VON WRIGHT, G. *The Logic of Preference*. 6 ed. Edinburgh, Escócia. Edinburgh University Press, 1963.

WEBER, M. *Decision Making with Incomplete Information*. European Journal of Operational Research Volume 50, 1997. p.2-18.

XIONG, Z.; SELIGMAN, J. *How questions guide choices: A preliminary logical investigation.*AI 2011: Advances in Artificial Intelligence, Springer, 2011. p.462-471.

XU, L.; YANG, J. *Introduction to multi-criteria decision making and the evidential reasoning approach.*Manchester School of Managment, University of Manchester Institute of Science and Technology, 2001.